WISKUNDE – LEERPLAN A

DERDE GRAAD ASO

STUDIERICHTINGEN MET

COMPONENT WISKUNDE

LEERPLAN SECUNDAIR ONDERWIJS

LICAP – BRUSSEL D/2004/0279/019
September 2004
(vervangt D/1992/0279/022)
ISBN-nummer: 90-6858-380-8

Vlaams Verbond van het Katholiek Secundair Onderwijs
Guimardstraat 1, 1040 Brussel

Inhoud

INLEIDING

Dit leerplan werd opgemaakt op basis van de eindtermen en de specifieke eindtermen wiskunde van de derde graad van het secundair onderwijs. Het is bestemd voor de leerlingen van de derde graad van het Algemeen Secundair Onderwijs.

Voor het aantal lestijden wordt gerefereerd aan de Lessentabellen - Voltijds secundair onderwijs - Derde graad van het Vlaams Verbond van het Katholiek Secundair Onderwijs.

Het ***leerplan a*** is opgemaakt voor het vak wiskunde in de studierichtingen met zes wekelijkse lestijden wiskunde.

Economie-wiskunde
Grieks-wiskunde
Latijn-wiskunde
Moderne talen-wiskunde
Wetenschappen-wiskunde
Wiskunde-topsport

1 BEGINSITUATIE

Bij het opstellen van dit *leerplan a* werd in principe uitgegaan van een dubbele instroom van de leerlingen, enerzijds uit de leerweg vier (aansluitend op *Economie*) en anderzijds uit de leerweg vijf (aansluitend op *Grieks, Latijn, Wetenschappen*). Deze differentiatie in de beginsituatie wordt opgevangen door een gemeenschappelijk gedeelte dat aansluit op de vooropleiding van leerweg vier en door het inbouwen van een ruime keuze waarbinnen gedifferentieerd kan worden naar gelang die vooropleiding.

De leerinhoudelijke verschillen tussen leerweg vier en leerweg vijf uit de tweede graad zijn beperkt (het vectorbegrip, een deel van de analytische meetkunde, algebraïsch rekenen, rijen). Waar nodig wordt het aanvullen van deze inhouden in dit leerplan opgevangen. Het grote verschil ligt echter in de wijze waarop wiskundig gedacht en gehandeld werd (verwoordingsvaardigheid, formalisering, redeneer- en bewijsvaardigheid, ordening en samenhang leerinhouden, probleemoplossende vaardigheden, kritische zin). Dit geeft de leerlingen uit leerweg vijf een intrinsieke voorsprong. Men zal proberen deze werk- en denkwijzen alsnog door te geven aan de leerlingen die instromen vanuit leerweg vier.

De concrete leerinhouden tweede graad en de wijze waarop ze in de lessen uitgewerkt worden kunnen opgezocht worden in het leerplan van de tweede graad (Licap D/2002/0279/47). Hier wordt de beginsituatie beperkt tot een beknopte opsomming. Daar waar nodig wordt in het begin van een onderdeel de concrete beginsituatie aangegeven.

De volgende leerinhouden werden volgens het leerplan in de tweede graad behandeld (bijkomend deel van leerweg vijf in cursief).

Meetkunde
Gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Thales. *Bewijzen.*
Samenhang congruentie, gelijkvormigheid en transformaties.
De stelling van Pythagoras en het berekenen van afstanden in het vlak en in de ruimte.
Driehoeksmeting, met sinus- en cosinusregel.
Eigenschappen in een cirkel (o.m. omtrekshoek en middelpuntshoek), raaklijnen in een punt van de cirkel.
De onderlinge ligging van cirkels.
Eigenschappen van regelmatige veelhoeken
De onderlinge ligging van rechten en vlakken.
Meetkundige problemen in de ruimte.
De doorsnede van een veelvlak met een vlak bepalen.
Vraagstukken over oppervlakte en inhouden van ruimtefiguren.

Getallenleer en algebra
Uitbreiding van het getalbegrip tot reële getallen.
Rekenen met reële getallen en met machten van getallen met gehele exponenten.
Vierkantswortel en derdemachtswortel. Rekenen met vierkantswortels.
Vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste en de tweede graad in één onbekende oplossen.
Vraagstukken die leiden tot een vergelijking van de eerste en de tweede graad met één onbekende en tot stelsels van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.
Ontbinden van een veelterm in factoren.

Algebraïsch rekenen
Euclidische deling.
Reststelling.

Reële functies
Het interpreteren van functies gegeven door middel van een grafiek, een tabel, een formule.
Functies van de eerste graad in één veranderlijke.

Functies van de tweede graad in één veranderlijke.
Elementaire begrippen in verband met functies, o.m. domein, bereik, nulpunten, tekenverandering, stijgen en dalen, extreme waarden, symmetrie.

Onderzoeken van enkele elementaire functies met voorschriften zoals $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $f(x) = \frac{1}{x}$.

Horizontale en verticale verschuivingen van een grafiek. Uitrekking van een grafiek.

Analytische meetkunde
De afstandsformule
De algemene vergelijking van een rechte.
Stelsels van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.
De vergelijking van een cirkel.
Vraagstukken analytisch oplossen. *Bewijzen.*
Vectoren.
Loodrechte stand van rechten analytisch uitdrukken. Vergelijking van een loodlijn op een rechte.
Afstand van een punt tot een rechte.
De vergelijking van de bissectrices van een rechtenpaar.
De vergelijking van de raaklijn in een punt aan een cirkel.
Problemen met loodrechte stand en afstand analytisch oplossen.

Beschrijvende statistiek
Representativiteit van een steekproef.
Gebruik en interpretatie van een frequentietabel en grafische voorstellingen.
Gemiddelde en mediaan als centrummaat en interkwartielafstand en standaardafwijking als spreidingsmaat.

Telproblemen en rekenen met kansen
Oplossen van telproblemen met behulp van schema's.
Kansen berekenen.
Kans interpreteren als relatieve frequentie.

Rijen
Rekenkundige en meetkundige rij.
Formule algemene term, formule som.

2 ALGEMENE DOELSTELLINGEN

2.1 WISKUNDE EN WISKUNDEVORMING

WISKUNDE

Wiskunde biedt middelen tot *het begrijpen, het beschrijven, het verklaren en eventueel het beheren van systemen en situaties* uit onze omgeving. Het gaat in het bijzonder om natuurverschijnselen (bijv. in de natuurwetenschappen, beschrijving in de ruimte rondom), om technische realisaties (bijv. automatiseringsprocessen) en om menselijke relaties (bijv. het gebruik van statistische gegevens in de economie en in de media).

Een kenmerk van wiskunde is het creëren van *modellen* voor die beschrijving. De mathematisering van een situatie of een probleem betekent dat, na analyse en kwantificering, een wiskundig model (bijv. een evenredigheid, een vergelijking, een functioneel verband, een stelsel, een meetkundig verband, ...) wordt gevonden, waarin de situatie of het probleem kan beschreven worden. De bijbehorende oplossingstechnieken kunnen tot een effectieve oplossing leiden. *Kritische toetsing* van de oplossing in de beschreven realiteit kan leiden tot het aanvaarden, verwerpen of bijstellen van het wiskundig model.

Een ander kenmerk van wiskunde is het steeds verder *ordenen en organiseren* van de verworven inzichten in samenhangende schema's en systemen, waarbij de toepasbaarheid en de beperkingen van wiskundesystemen kan beschreven worden. Van nieuwe vaststellingen wordt geprobeerd ze te verbinden met of te verantwoorden vanuit de bestaande systemen.

WISKUNDEVORMING

De wiskundevorming in deze studierichtingen van het secundair onderwijs heeft een drievoudige rol: de ontwikkeling van een wiskundig *basisinstrumentarium,* de ontwikkeling van *het denken in het algemeen* en van *specifieke denkmethoden en probleemoplossende werkwijzen eigen aan een wiskundige aanpak en de reflectie erop*.

- De leerlingen moeten een ruime kennis en vaardigheid verwerven in het wiskundige *instrumentarium*, nodig om te kunnen functioneren in een maatschappij waar wiskunde in vele toepassingen gebruikt wordt en (als voorbereiding op hun mogelijke vervolgstudies) om vragen aan te pakken in verband met het beschrijven en verklaren van wetenschappelijke situaties.

  Wiskundige begrippen en verbanden moeten een *brede betekenis* krijgen in relatie met realiteitsgebonden situaties. De wiskundige *technieken en methoden* moeten voldoende beheerst worden (al of niet met gebruik van hulpmiddelen zoals een rekenmachine, een computerprogramma, een formularium).

  Wil deze kennis en vaardigheid adequaat gehanteerd worden, is een efficiënte *kennisorganisatie* noodzakelijk. Daartoe moet aandacht besteed worden aan de samenhang tussen begrippen en eigenschappen en tussen de eigenschappen onderling. Efficiënte toegankelijkheid van de kennis houdt in dat ze inhoudelijk niet slechts logisch geordend is, maar dat een ordening beschikbaar is die gericht is op het gebruik ervan in toepassingen.

  In het concrete verwervingsproces en in de toepassingen kan de bewondering voor de schoonheid en de verwondering voor het vaak verrassende van wiskunde groeien.

- De wiskundevorming draagt bij tot een fundamentele *denk- en attitudevorming*. Bij het verwerven van wiskundekennis en wiskundige methoden worden meer algemene denkmethoden (bijv. het analyseren, het synthetiseren, het hanteren van symmetrie en analogie, het systematisch en methodisch werken), verwervingstechnieken van kennis (bijv. herhaling, verbanden leggen, toetsing, verdere abstractie) en attitudes (bijv. het opbouwen van vertrouwen in het eigen kunnen, doorzettingsvermogen en kritische zin) ontwikkeld.

  Omdat dit vormingsproces niet los verloopt van de sociale context van de klas, wordt onrechtstreeks bijgedragen tot de vorming van sociale vaardigheden.

Bij het mathematiseren en het oplossen van problemen kunnen leerlingen vaardigheden en strategieën verwerven die breder toepasbaar zijn. In het proces van het argumenteren en het bespreken van de kwaliteit van een wiskundige oplossing zal wiskunde bijdragen tot het verwerven van een *kritische houding*, ten aanzien van het eigen denken en handelen.

- In deze studierichtingen krijgt wiskunde de rol van poolvak toebedeeld. De specificiteit van de wiskundige vorming kan hierdoor nog meer tot uiting komen. De vorming is dus niet alleen gericht op het functioneren in breed maatschappelijke context, maar wil een basis leggen voor vervolgstudies in studierichtingen met een wiskundige, een wetenschappelijke of een toegepast wetenschappelijke invalshoek.

  Dit betekent dat zowel van de kennis op zich als de vaardigheden *een hoger beheersingsniveau* gevraagd wordt. Zo zal aandacht besteed worden aan een efficiënte conceptvorming, met het oog op een ruimere toepasbaarheid van de wiskundekennis. De gehanteerde taal zal tot een vlottere verwoording moeten leiden en kan een formeler niveau bereiken. De problemen die aangepakt worden zullen diepgaander onderzocht worden en van een hogere moeilijkheidsgraad zijn (bijv. omdat ze algemener gesteld worden). Bijzondere aandacht zal besteed worden aan de wijze waarop concepten naar hun fundamenten worden uitgediept en waarop verbanden gelegd worden binnen de wiskunde en aan het wiskundig kader waarbinnen de kennis systematisch geordend kan worden.

  Samengevat betekent het dat de leerlingen een wiskundig eigen wijze van denken, redeneren en handelen moeten ontwikkelen, d.w.z.
  - vermoedens bevragen, onderzoeken en formuleren;
  - modelleren (mathematiseren) en structureren;
  - argumenteren en bewijzen;
  - gesloten en open problemen wiskundig kunnen stellen en analyseren, oplossingen argumenteren en bespreken, en heuristiek en probleemoplossende vaardigheden accuraat aanwenden;
  - communiceren over wiskundig beschreven situaties, met inbegrip van het vlot gebruik van meer specifieke wiskundetaal;
  - kritisch reflecteren op het eigen denken en handelen.

2.2 ALGEMENE DOELSTELLINGEN VOOR WISKUNDE IN DE DERDE GRAAD

Voor de wiskundevorming in de *derde graad* van het *algemeen secundair onderwijs met een pool wiskunde* kunnen de volgende algemene doelstellingen vooropgesteld worden.

KENNIS EN INZICHT

De leerlingen gebruiken en onderhouden de kennis en de inzichten die ze al verworven hebben.
De leerlingen ontwikkelen

– een ruim wiskundig instrumentarium van begrippen, eigenschappen en methoden;
– het inzicht in de fundamentele verbanden tussen de wiskundige leerinhouden onderling en tussen de wiskundige leerinhouden en andere vakdisciplines;
– het inzicht in verbanden tussen het wiskundig instrumentarium en problemen die wiskundig vertolkt kunnen worden;
– het inzicht in het verwerken van numerieke informatie en beeldinformatie;
– redeneermethoden om hun bevindingen te argumenteren en te verklaren;
– wiskundige denkmethoden om o.m.
  – vermoedens te formuleren, te onderzoeken en te argumenteren,
  – verbanden te leggen, systematisch te ordenen en te structureren.

VAARDIGHEDEN

De leerlingen onderhouden de vaardigheden die ze al verworven hebben.
De leerlingen ontwikkelen

- rekenvaardigheden met o.m.
  - het adequaat gebruik van hulpmiddelen;
- meet- en tekenvaardigheden;
- wiskundige taalvaardigheden, met o.m.
  - het communiceren over wiskundig beschreven situaties, met inbegrip van een adequaat gebruik van een meer specifieke wiskundetaal;
- denk- en redeneervaardigheden,
  in het bijzonder meer specifieke wiskundige methoden en werkwijzen met o.m. een efficiënte conceptvorming,vaardigheid in onderzoeken en formuleren van vermoedens,
  - vaardigheid in argumenteren en bewijzen,
  - vaardigheid in het gebruik van en wisselen tussen verschillende representaties,
  - een meer systematische ordening van de domeinspecifieke kennis;
- probleemoplossende vaardigheden, met o.m.
  - het wiskundig stellen en analyseren van gesloten en open problemen, het accuraat aanwenden van een heuristiek en probleemoplossende vaardigheden, het modelleren van probleemstellingen;onderzoeksvaardigheden;
- leervaardigheden;
- reflectievaardigheden.

ATTITUDES

De leerlingen ontwikkelen

- zin voor nauwkeurigheid en orde;
- zin voor volledigheid;
- zin voor helderheid, bondigheid, eenvoud van taalgebruik;
- kritische zin, o.m.
- zelfvertrouwen, zelfstandigheid en doorzettingsvermogen;
- zelfregulatie;
- zin voor samenwerking en overleg;
- waardering voor wiskunde als een dynamische wetenschap en als een component van de cultuur.

3 ALGEMENE PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de derde graad wordt verder gebouwd op de wiskundige vorming van het basisonderwijs en van de eerste en de tweede graad. Dat houdt in dat de leerlingen de kennis, de inzichten en de vaardigheden die eerder verworven werden, blijven gebruiken en onderhouden. Voor de leerlingen die voor de pool wiskunde kiezen mag verwacht worden dat daarbij geen fundamentele problemen voorkomen. Als uit de praktijk of een diagnostische toets toch zou blijken dat bepaalde onderdelen onvoldoende verworven werden, kunnen die functioneel en gericht herhaald worden. Een gedifferentieerde aanpak is hier aangewezen. Zo kan men ervan uitgaan dat de leerlingen bereid zijn zelfstandig aan oplossingen te werken, na een minimale ondersteuning om het probleem en een efficiënte aanpak te omschrijven.

KENNIS, INZICHT EN VAARDIGHEDEN

De didactische opbouw van wiskunde kan geordend worden rond *vier kerngedachten*: een *betekenisvolle begripsvorming*, de *technieken* om berekeningen uit te voeren, de *fundamenten* tegen een algemener wiskundig kader en de *toepassingen* binnen wiskunde, wetenschappen, techniek en maatschappij. Naargelang de fase van ontwikkeling van een wiskundeonderdeel zal aan deze verschillende opvattingen meer of minder aandacht toegekend worden. In een eerste fase zal wellicht meer aandacht gaan naar de begripsvorming en de toepassing van de begrippen op een relatief eenvoudig niveau, i.h.b. van het berekeningsniveau. In volgende fases kan dan meer aandacht besteed worden aan het uitdiepen van de fundamenten van begrip en inzicht, van de moeilijkheidsgraad van de toepassingen of van het niveau van rekenvaardigheid.

- In de derde graad komen een aantal nieuwe leerinhouden en nieuwe wiskundeonderdelen aan bod. Daarbij moet aandacht besteed worden aan een betekenisvolle *begripsvorming*. Het best is aan te sluiten bij de werkwijzen die voordien gehanteerd werden en waarmee leerlingen ondertussen vertrouwd zijn. Een eerste abstractie van nieuwe begrippen wordt best onderbouwd met voorbeelden en tegenvoorbeelden, die onder meer kunnen aansluiten bij de ervaringswereld van de leerlingen of bij de problemen die ermee kunnen opgelost worden. In een onderzoeksfase kunnen de leerlingen zelf ervaren wat de relevante en niet-relevante kenmerken van een begrip zijn. Bij het verbinden van nieuwe ervaringen aan het begrip of het niet meer behoorlijk functioneren van het begrip kunnen leerlingen dan daarop terugvallen. Door begrippen van bij de vorming te koppelen aan verschillende onderdelen worden ze breder en betekenisvoller opgenomen en wordt het gebruik ervan in de verschillende onderdelen vereenvoudigd. Dit kan een motivatie zijn om leerstofonderdelen geheel of gedeeltelijk geïntegreerd te behandelen. De aanbreng van nieuwe eigenschappen kan op gelijkaardige wijze aangepakt worden.

  Voor de leerlingen die dit leerplan volgen moet een degelijk verwoordingsniveau van de leerinhouden nagestreefd worden. Daarbij zal aandacht besteed worden aan een vlot taalgebruik, maar ook aan het correct hanteren van een meer formele wiskundetaal.
- Om met concepten wiskundig te werken moeten vaak *berekeningen* uitgevoerd worden. Enerzijds moet dit leiden tot een voldoende operationele rekenvaardigheid, anderzijds tot inzicht in het aanwenden van de gepaste technieken en routineprocedures. Deze berekeningen kunnen manueel gebeuren of door middel van ICT, waarbij het manuele rekenwerk bewust beperkt wordt tot haalbare en zinvolle gevallen. Zo kan men de vraag stellen of er nog intensief moet geïnvesteerd worden in het verwerven van het manueel manipuleren van ingewikkelde uitdrukkingen. De zo nagestreefde automatismen zullen in de praktijk maar zelden effectief gebruikt worden. Door het zinvol inschakelen van rekenmachine en computer voor reken- en tekenwerk, voor onderzoek of als informatiebron draagt wiskunde bij tot het verwerven en onderhouden van ICT-vaardigheden.
- Eens de begrippen voldoende vertrouwd zijn, wordt binnen de wiskundevorming aandacht besteed aan de studie van de *fundamenten* en de theoretische preciseringen. Hierbij gaat het om de aspecten die nodig zijn om de begrippen in te passen in een samenhangende wiskundige theorie. Zo worden leerlingen geconfronteerd met wiskunde als systeem. Onder meer dit kan hen gevoelig maken voor een keuze voor een meer doorgedreven wiskundestudie in hun vervolgopleiding.

- In deze fase van de vorming is een louter abstract wiskundige vorming nog niet aangewezen. De verworven concepten worden *toegepast* om problemen uit de maatschappelijke leefwereld, uit wetenschappen en techniek te modelleren, te mathematiseren, en op die wijze op te lossen.
  - Bij het mathematiseren speelt de betekenis van de begrippen een belangrijke rol, bijvoorbeeld inzien dat een antwoord op een gestelde vraag kan gevonden worden door een afgeleide of een integraal te berekenen, een matrixberekening, een statistische beschrijving.
  - Binnen het model worden dan wiskundige bewerkingen uitgevoerd, al of niet met gebruik van ICT.
  - Dan volgt een interpretatie van het resultaat, waarbij uiteraard de betekenis van de gehanteerde concepten optreedt (demathematiseren).

  Precies toepassingen kunnen het inzicht verscherpen in verbanden tussen het gekende wiskundig instrumentarium en het oplossen van problemen en daardoor in de wiskundige begrippen en eigenschappen zelf. In het toepassingsproces kunnen de voorgaande kerngedachten verdiept worden. Zo kunnen uit toepassingen bijvoorbeeld vragen rijzen naar de samenhang tussen begrippen of naar de toepasbaarheidvoorwaarden van bepaalde technieken, wat dan in een latere fase kan leiden tot een meer fundamenteel onderzoeken ervan. Bij de toepassingen moet bijzondere aandacht besteed worden aan het onderhouden en het verder verwerven van algemene probleemoplossende vaardigheden. Daarbij zal de graad van zelfstandig werken nog toenemen. In het bijzonder zal door reflectie en kritische zin teruggekeken worden op het oplossingsproces zelf.

ATTITUDES EN OPVATTINGEN

Doorheen de wiskundevorming kunnen leerlingen een aantal attitudes en in het bijzonder *leerattitudes* verwerven, zoals orde, nauwkeurigheid, doorzettingsvermogen, zelfvertrouwen, ... Het aanpakken van problemen kan leiden tot een *onderzoeksgerichte houding*, tot *methodisch* en *planmatig* werken. Een leerproces waarin oplossingen worden vergeleken en getoetst, kan bijdragen tot samenwerking, overleg, structurering, zin voor helderheid, bondigheid, volledigheid, eenvoud in taalgebruik, waardering voor andere oplossingen.

Bij het bespreken van oplossingsmethoden en door het kritisch onderzoeken van elkaars oplossing kan *waardering* voor een andere mening aangeleerd worden en daardoor voor de persoon van de andere. Zo kan binnen het wiskundeonderwijs aandacht besteed worden aan *waarden* en *sociale vaardigheden*.

Ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit *realiteitsbetrokken situaties* kan bij de leerlingen het besef doen groeien van de bruikbaarheid en de werkelijkheidswaarde van wiskunde. Het gebruik van cijfermateriaal uit kranten en tijdschriften leert leerlingen hiermee om te gaan en er kritisch naar te kijken. Ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit een historische context kan belangstelling en waardering opwekken voor de historische en culturele aspecten van wiskunde in het algemeen.

ACTIEVE WERKVORMEN

De leerlingen moeten voldoende betrokken worden bij het ontwikkelen van de leerinhouden. Een radicale keuze voor *actieve wiskundelessen* ligt voor de hand. Begrippen en eigenschappen kunnen in goed gekozen didactische situaties door de leerlingen zelf onderzocht worden. Die leermomenten kunnen in leer- of klassengesprekken verwoord worden en aan de ervaring van anderen getoetst. Reflecties over dit proces zelf zijn aangewezen momenten om technieken in verband met het leren en het verwerven van reflectieve vaardigheden (bijv. zich vragen stellen, terugkijken op een uitgevoerde taak) aan te reiken.

In een *actief leerproces* leren leerlingen communiceren over wiskundige onderwerpen. Ook al beheersen ze de wiskundetaal wellicht minder goed, de manier waarop leerlingen onder elkaar en naar de leerkracht informatie over hun denkproces overdragen, zou begrijpbaar moeten zijn. Ook in de wiskundelessen is het hanteren van een verzorgde en behoorlijke taal belangrijk.

Van leerlingen van de derde graad mag verwacht worden, dat ze een vorm van *zelfstandig leren en werken* opbouwen. De opbouw van het leerproces moet er op gericht zijn dat leerlingen actief deelnemen aan de wiskundelessen. Die moeten zo ingericht worden dat leerlingen zelf een deel van het werk aanpakken, weliswaar binnen hun wiskundig kunnen. Door goed gekozen, progressief opgebouwde opdrachten moeten leerlingen vertrouwd gemaakt worden met het opnemen van verantwoordelijkheid voor het eigen leren en werken.

WISKUNDE EN ICT

In onze maatschappij groeit de informatie- en communicatietechnologie (ICT) uit tot een veralgemeend hulpmiddel. De leerlingen moeten er in het onderwijs al mee vertrouwd worden. Door de vele mogelijkheden biedt de wiskundevorming een weg tot het verwerven van inzicht in een aantal computertoepassingen (rekenwerk, grafische mogelijkheden, dataverwerking, onderzoeksopdrachten, informatieverzameling). Wiskunde moet deze algemene vormingsopdracht opnemen. Daartoe kan men leerlijnen ontwikkelen voor verwerving en integratie, op niveau van de individuele aanpak door de leraar, maar ook in overleg met de vakgroep wiskunde, met de vakgroepen van vakken die de wiskundetoepassingen gebruiken, bijv. wetenschappen en economie, en op schoolniveau, bijv. wat betreft beschikbaarheid, organisatie computerinfrastructuur (werkblok in wiskundeklassen).

Heel wat *routinerekenwerk* wordt in de praktijk niet meer manueel uitgevoerd. Ook in de wiskundeles kan het gebruik van moderne rekenapparatuur zoals rekenmachine en computer tijdbesparend werken, zeker bij situaties waar het handmatig rekenwerk veel tijd in beslag zou nemen. Routinerekenvaardigheden blijven weliswaar belangrijk voor een snelle schatting, bijv. na afronding van de getallen. Maar men kan niet voorbij aan de consequentie dat aan de inoefening van rekenvaardigheden minder tijd besteed wordt. Uiteraard moet misbruik van de rekenmachine voorkomen worden.

Wat het *algebraïsch rekenwerk* (formules, letterrekenen, vergelijkingen oplossen, rekenen met matrices) betreft, beschikt de computer en een aantal rekenmachines al over heel wat mogelijkheden. De leerlingen kunnen voor het rekenwerk ruim gebruik maken van een grafische (of eventueel een symbolische) rekenmachine of van software op de computer (freeware, software met goedkope leerlingenlicenties, applets). Toch is het zinvol een aantal manuele technieken te onderhouden. Daarbij is de aard van de oefeningen niet gericht op complexiteit, maar op de versterking van het inzicht in de methode, en zonder daarbij in extreme oefeningen te vervallen. Een basisniveau voor de routinerekenvaardigheden blijft zinvol. Zo zullen leerlingen bijvoorbeeld het voorschrift van de afgeleide functie van een veelterm moeten kunnen berekenen. Bij toepassingen zoals extremumproblemen zal men sneller grijpen naar ICT. Hierbij heeft het inzicht in het oplossingsproces van het extremumprobleem prioriteit op het rekentechnische aspect. Het manuele rekenwerk moet niet uitgebannen worden, maar in de praktijk zal men sneller naar een hulpmiddel grijpen. Anderzijds behoren toepassingen met realistische gegevens meer tot de mogelijkheden, omdat de moeilijkheid van de berekeningen kan opgevangen worden.

Het leren gebruiken van ICT is binnen wiskunde geen einddoelstelling op zich. Maar ook de kale rekenvaardigheid is geen doel op zich. De leerlingen moet wel geleerd worden beide als hulpmiddel doeltreffend te gebruiken. Zo zal bij het oplossen van een probleem het uittekenen van de grafiek een hulpmiddel zijn om de situatie beter te vatten. Bij de doelstelling over het verloop van een functie vanuit het interpreteren van de afgeleide(n), is het uiteraard niet de bedoeling dat de leerlingen meteen de grafiek uittekenen met ICT. Zo heeft het ook geen zin de leerlingen buiten elke context een groot aantal afgeleiden te laten berekenen met ICT. Wel kan ICT hier gebruikt worden als controlemiddel om de juistheid van besluiten te verifiëren.

De computer en grafische rekenmachines zijn handige *didactische hulpmiddelen*, o.m. bij exploratieopdrachten. Door de snelheid waarmee leerlingen een antwoord kunnen bekomen, krijgen ze ook snel terugkoppeling over hun denk-, reken- of oplossingsproces. De bijsturing die er op volgt, kan het inzicht verhogen. Zo kunnen bijvoorbeeld de grafische mogelijkheden aangewend worden bij het onderzoek van functies en hun grafieken. Zo geeft in de statistiek het voorstellen van de gegevens een beter inzicht in de statistische verwerking ervan. De *visuele ondersteuning* die uitgaat van deze ‘wiskunde in beelden’ mag voor leerzwakke leerlingen niet onderschat worden. En al zal de computer in de wiskundeles niet noodzakelijk voor flitsende beelden zorgen en vraagt het gebruik van de leerling heel wat inzet, toch kan het moderne medium de *motivatie* van een aantal leerlingen verhogen.

Het gebruik van een rekenmachine of software brengt *nieuwe mogelijkheden en moeilijkheden* mee:

- dynamisch materiaal om nieuwe concepten in te leiden, waardoor beter kan gefocust worden op de betekenisgeving en de opbouw, en waardoor minder ruis ontstaat door problemen met handmatig rekenen;
- demonstratiemogelijkheden in de hand van de leraar bij nieuwe begrippen, maar ook aangepast leerlingenmateriaal voor onderzoeksopdrachten voor de leerlingen zelf, bijv. voor het ontwikkelen en formuleren van vermoedens;
- het gebruik van concepten wordt al mogelijk vanuit een intuïtieve visuele voorstelling en haalbare rekentechnische mogelijkheden, zonder dat het begrip eerst op een hoger verbaalalgebraïsch niveau moet geëx-

pliciteerd worden;
- het adequater voorstellen van grafieken en diagrammen, en een vlotte aanpassing van situaties in functie van het leerproces;
- het vlot wisselen tussen verschillende wiskundige representaties, bijv. tabel, grafiek, functievoorschrift;
- berekeningen met moeilijkere, meer realistische gegevens, die voordien niet manueel uitvoerbaar waren;
- het interpreteren van de randvoorwaarden van een probleem (bijv. de keuze van de dimensies van het grafisch scherm);
- het extrapoleren of interpoleren (bijv. vanuit een verband vastgesteld op een grafiek);
- het simuleren van bepaalde situaties, zoals bijv. kansexperimenten;
- het gebruik als controlemiddel op manueel uitgevoerde berekeningen;
- een controlemiddel bij het verifiëren van vermoedens, veronderstellingen en schattingen;
- de ontwikkeling van nieuwe controlevaardigheden (bijv. het maken van schattingen) om meteen een kritische houding tegenover de resultaten en de mogelijkheden van deze nieuwe technologie te verwerven;
- het opzoeken van (bijkomende) informatie voor gebruik bij het oplossen van problemen;
- het opzoeken van informatie op het internet, bijv. in verband met de historische ontwikkeling van wiskunde en de rol in de ontwikkeling van de cultuur.

ICT biedt ook nieuwe impulsen aan *het zelfstandig werken en leren* van de leerling in de wiskundevorming. Als de gebruikte software krachtig en nauwkeurig genoeg is kan dit voor de leerlingen een hulpmiddel zijn om meer zelfontdekkend aan het werk te gaan. Wel is het hierbij belangrijk dat leerlingen niet zo maar wat bezig zijn, maar dat zij gericht geleid worden in een exact denkproces. De klasgroepen mogen dan ook niet te groot zijn, en er moeten voldoende toestellen beschikbaar zijn.

Met sommige ICT - toepassingen hebben de leerlingen de mogelijkheid om oefeningen te maken, die meteen geëvalueerd worden (bijvoorbeeld bij het bepalen van voorschriften van functies). Hierdoor kunnen zij individueel aan het werk en krijgen zij ogenblikkelijk feedback op hun antwoorden. Op deze wijze leren de leerlingen omgaan met zelfevaluatie.

Voorbeelden van het gebruik van ICT in de derde graad.
- Verkenning, berekening, grafische controle van het begrip functie, symmetrieën, nulpunten, verband tussen de grafiek van een functie en zijn omgekeerde.
- Ondersteuning en oefening bij de grafieken van goniometrische, exponentiële en logaritmische functies.
- Onderzoek van de invloed van parameters op de grafiek van een functie.
- Ondersteuning van de begripsvorming, berekening en grafische controle bij limieten, afgeleiden, integralen en hun toepassingen.
- Ondersteuning en berekening bij extremumproblemen.
- Ondersteuning en rekenwerk bij het numeriek bepalen van nulpunten, van integralen.
- Matrixberekeningen en oplossen van stelsels.
- Ondersteuning bij meetkundige redeneringen.
- Gebruik van statistische functies in statistiek en kansberekening. Uitvoeren van kanssimulaties.
- Berekeningen bij het onderdeel financiële algebra.

ANDERE HULPMIDDELEN, VADEMECUM

In deze tijd is het leren organiseren, gebruiken en interpreteren van informatie belangrijker dan het onthouden van de zoveelste formule. Naast het eigen geheugen worden o.m. elektronische geheugens, formularium, tabellen gebruikt. Het wiskundeonderwijs kan hieraan niet voorbij. Het kan nodig zijn de tijd te nemen om inzicht in berekeningen, regels en formules te verwerven, maar het indrillen en het berekenen met ingewikkelder getallen moet gerelativeerd worden. De gewonnen tijd kan besteed worden aan het oplossen van een probleem, een vraagstuk meer.

WISKUNDE VOOR ELKE LEERLING

In de derde graad wordt wiskunde aangeboden met een verschillend aantal wekelijkse lestijden. Er mag verwacht worden dat de leerlingengroepen meer homogeen zijn samengesteld dan voordien. Toch moet er aandacht besteed worden aan een gedifferentieerde aanpak van de leerlingen. Dit kan betekenen dat bepaalde onderdelen en doelstellingen gedifferentieerd aangeboden worden, zowel naar inhoud en werkvorm als naar de graad van zelfstandigheid. Dit impliceert dat zowel bijzondere aandacht kan gaan naar de wiskundig minder begaafde leerling als naar de wiskundig meer begaafde leerling.

RELATIE MET HET OPVOEDINGSPROJECT VAN DE SCHOOL

Een school wil haar leerlingen méér meegeven dan louter vakkennis. Haar intentieverklaring in dit verband is te vinden in het opvoedingsproject, waarin waardeopvoeding en christelijke duiding zijn opgenomen.

Een vakleerkracht in een school van het katholieke net zal geen andere wiskunde geven dan de collega's in een ander net. Wel heeft hij de taak om, waar de kans zich voordoet, naar het opvoedingsproject of een aspect daarvan te refereren. Als mededrager van het christelijk opvoedingsproject is elke leerkracht alert voor elke kans die het school- en klasgebeuren biedt om de diepere dimensie aan te reiken. Ook wiskundelessen bieden hiertoe de kans, niet in het minst in de persoonlijke contacten tussen leerlingen en leerkracht. Hoe beter de leerkracht de leerlingen persoonlijk kent, hoe beter hij zal aanvoelen wanneer er openheid is om met de leerlingen door te stoten naar zins- en zijnsvragen.

4 MINIMALE MATERIËLE VEREISTEN

Leerkrachten wiskunde hebben de beschikking over behoorlijk en gemakkelijk toegankelijk materiaal voor het uitvoeren van tekeningen op het bord, m.n. *geodriehoek en passer*. Ze kunnen vlot beschikken over een *overheadprojector en ICT-hulpmiddelen voor demonstratie.*

Leerkrachten wiskunde kunnen vlot beschikken over een *geavanceerde grafische rekenmachine en wiskundige software* voor de didactische ondersteuning van hun lessen.

Voor de derde graad betekent dit o.m.:
- software voor exploratie van reële functies;
- software voor de verwerking van statistische gegevens (exploratie van grafische voorstellingen, berekeningen, voorstellen van gegevens in grafieken en diagrammen);
- software voor demonstratie en exploratie van meetkundige situaties;
- beschikbaarheid van het internet voor het gebruik van applets, informatieve sites, bijv. van banken.

De *leerlingen* beschikken over behoorlijk tekenmateriaal (*geodriehoek en passer*).

De leerlingen moeten doorheen het onderwijs, en in het bijzonder tijdens de wiskundelessen, ICT-hulpmiddelen leren gebruiken. De toepassingsmogelijkheden in wiskunde zijn uitgebreid (rekenapparaat, informatieverzameling, internet met applets). Daarom is het vanzelfsprekend dat de leerlingen zelf beschikken over een grafische rekenmachine of zo goed als permanent kunnen gebruik maken van een computer. Zo zou men een werkblok met computers kunnen voorzien in een wiskundeklas.

Alleszins moet het duidelijk gesteld worden dat, gezien de verplichting van het ICT-gebruik vanuit de eindtermen, dit leerplan niet in voldoende mate kan gerealiseerd worden, als deze ICT-middelen onvoldoende beschikbaar zijn.

Opmerking in verband met de implementatie

Gezien het belang van het gebruik van ICT-middelen en een eventuele beperkte beschikbaarheid zal de leraar rekening houden met deze beperkingen bij het plannen van de didactische aanpak. Eventueel kan de jaarplanning aangepast worden.

De vakgroep wiskunde zal geregeld een evaluatie maken van het gebruik van en de vordering van de implementatie van ICT-hulpmiddelen, bijv. over de grenzen van de graden en de studierichtingen heen. Dit is een gelegenheid om ideeën en werkmateriaal uit te wisselen. Zo kan in de vakgroep afgesproken worden welke software de leerlingen effectief zelf leren gebruiken. Gezien de tijdsinvestering voor het aanleren van een programma is het aangewezen dat in de tweede en de derde graad dezelfde of analoge wiskundesoftware gebruikt wordt. In dit verband kan gezamenlijk materiaal ontwikkeld worden met toelichting voor het gebruik van de software, cf. werkkaarten of gebruiksvademecum.

Aanvullend overleg is wenselijk met de vakwerkgroepen wetenschappen, economie en informatica, o.m. om het wiskundig gebruik van de ICT-hulpmiddelen in die vakken aan te moedigen of toe te lichten.

Het komt de didactische verwerking in de klas ten goede als de leerlingen over eenzelfde rekenmachine beschikken. Als gevolg van de doorstroming van leerlingen naar de derde graad kan echter een situatie ontstaan waarin verschillende toestellen gehanteerd worden in de klas. Het is niet zinvol om leerlingen nog andere (dure) toestellen te laten aanschaffen. Om een continuïteit in het gebruik van rekenmachines te waarborgen doorheen de studieloopbaan van de leerlingen is het wenselijk dat hierover afspraken gemaakt worden op het niveau van de scholengemeenschap.

Tenslotte moet voorzien worden dat leerlingen uit een sociaal minder begoed midden geen probleem ervaren met de beschikbaarheid van deze hulpmiddelen. Er kan niet van worden uitgegaan dat elke leerling thuis over een computer kan beschikken. Dat impliceert dat in de school oefenmogelijkheden moeten worden voorzien.

5 LEERPLANDOELSTELLINGEN - LEERINHOUDEN PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

LEERPLANDOELSTELLINGEN, EINDTERMEN EN SPECIFIEKE EINDTERMEN

De leerplandoelstellingen zijn opgemaakt op basis van *de eindtermen wiskunde en de specifieke eindtermen wiskunde* voor de derde graad van het secundair onderwijs. Bij een aantal doelstellingen is in de laatste twee kolommen een *verwijzing naar eindtermen* opgenomen, enerzijds in de *voorlaatste kolom* naar de *eindtermen van de basisvorming*, anderzijds in de *laatste kolom* naar de *specifieke eindtermen* voor de vorming in studierichtingen met pool wiskunde. Bij een aantal doelstellingen staan meer verwijzingen, als gelijktijdig aan het realiseren van meer dan een eindterm gewerkt wordt. Eindtermen komen vaak niet uitsluitend bij een enkele doelstelling voor. Verschillende doelstellingen kunnen verwijzen naar eenzelfde eindterm. In hoofdstuk 8 is een concordantietabel opgenomen.

LEERINHOUDEN, VAARDIGHEDEN EN ATTITUDES

De doelstellingen voor *vaardigheden en attitudes* zijn doelstellingen die doorheen de gehele wiskundevorming aan bod moeten komen. Ze vragen een eerder permanente aandacht in het onderwijsleerproces, dan wel specifieke lessen om ze aan te leren. Ze bouwen voort op gelijkaardige doelstellingen uit de eerste en de tweede graad. Omwille van hun brede formulering en hun ruim toepassingsgebied kunnen ze op verschillende *beheersingsniveaus* en verschillende wijzen gerealiseerd worden. Het gaat daarbij meer om het verwerven van een wiskundige dispositie en methode, dan wel om concreet specifieke doelen.

In verband met de controle geldt de opmerking dat attitudes altijd na te streven zijn en dat de effecten ervan op de leerlingen geen deel uitmaken van een inspectieonderzoek.

De *leerinhoudelijke* doelstellingen worden samengebracht in een aantal onderdelen op basis van samenhangende leerinhouden.

Met de inhoudelijke groepering wil het leerplan niet opleggen op welke wijze de leerinhouden moeten aangebracht worden. Ook de volgorde, waarin de verschillende leerstofonderdelen in het leerplan zijn weergegeven, is niet noodzakelijk de volgorde waarin ze in de klas moeten worden behandeld. Zo is bijvoorbeeld een integratie tussen verschillende onderdelen mogelijk. De aanbevelingen over het aantal te besteden lestijden zijn slechts *richtinggevend*.

VERWERKING VAN HET LEERPLAN

Om tegemoet te komen aan de onderlinge leerlingenverschillen is differentiatie van de didactische verwerking noodzakelijk. Een eerste differentiatie gebeurt in de derde graad op basis van de studierichtingen, i.h.b. het aantal lestijden wiskunde per week en de bijbehorende verschillende leerplannen. *Zo geldt dit leerplan specifiek voor een invulling wiskunde vanaf zes wekelijkse lestijden.*

De organisatie en de formulering van de doelstellingen is opgemaakt om een verdere differentiatie mogelijk te maken, rekening houdend met de vooropleiding (bijv. Economie met leerweg vier) en de intrinsieke mogelijkheden van leerlingen en leraren. Het leerplan bevat enerzijds een aantal *basisdoelstellingen,* onderverdeeld in *kerndoelstellingen* en *verdiepingsdoelstellingen,* en anderzijds suggesties voor *uitbreidingsdoelstellingen* en *keuzeonderwerpen*.

KERNDOELSTELLINGEN

De kerndoelstellingen vormen de minimale inhoudelijke basiskennis van deze leerlingen. De lijst komt tot stand door het implementeren en integreren van de opgelegde eindtermen en de specifieke eindtermen en door dit geheel overzichtelijk te ordenen. Het verwerken van deze kerndoelstellingen zal *ca. 75 % van de lestijden* in beslag nemen. Kerndoelstellingen geven meestal maar het minimale basisniveau aan. Dat heeft consequenties op het nagestreefde niveau van beheersing dat verwacht wordt.

VERDIEPING

De specifieke eindtermen voorzien in het algemeen gedeelte terecht ook het principe dat de wiskundevorming een verdiepend karakter heeft (zie ook *2.2 Algemene doelstellingen voor wiskunde in de derde graad*).

> 'De decretale specifieke eindtermen wiskunde hebben betrekking op kennis, inzichten, vaardigheden en attitudes waarmee leerlingen:
> - verbanden leggen tussen wiskunde en praktische toepassingen uit het dagelijkse leven en zo relaties leggen met problemen uit maatschappij, wetenschap en techniek;
> - verbanden leggen binnen de wiskunde en daarmee hun wiskundig kader meer systematisch ordenen;
> - een wiskundig denken en redeneren ontwikkelen, d.w.z. een wiskundig eigen wijze van:
>   - bevragen, onderzoeken en formuleren van vermoedens,
>   - modelleren en structureren,
>   - argumenteren en bewijzen;
> - gesloten en open problemen wiskundig kunnen stellen en analyseren, en oplossingen argumenteren en bespreken;
> - communiceren over wiskundig beschreven situaties, met inbegrip van het vlotte gebruik van meer specifieke wiskundetaal;
> - kritisch reflecteren op denken en handelen.'

Aan het realiseren van deze algemene doelstellingen voor de specifieke wiskundevorming moet intentioneel aandacht besteed worden. Ze worden niet vanzelfsprekend gerealiseerd door met wiskundige leerinhouden bezig te zijn, omdat ze meer zeggen over het beheersingsniveau van de wiskundekennis, dan wel over de inhoudelijke kennis op zich. De specifieke eindtermen laten een leerinhoudelijke ruimte om deze vorming te realiseren. Dit betekent dat, voor de onderdelen die verdiept kunnen worden, een zekere keuze wordt gelaten. Hetzelfde geldt voor de mate waarin verdieping uitgewerkt wordt. Concreet biedt het leerinhoudelijke luik heel wat mogelijkheden om tegemoet te komen aan dat verdiepend principe.

Het leerplan wil deze keuzeruimte voor de leraar toejuichen en legt daarom hier geen verplichting op. Wel moét verdieping voor *minstens 10 % van de lestijden* aan bod komen, bovenop de uitwerking van de minimale kerndoelstellingen. Dat wil zeggen dat men er bijvoorbeeld voor kan kiezen de verdiepingstijd te spreiden over de verschillende onderdelen, of ze te besteden aan één onderdeel of een beperkt aantal onderdelen. Aan de algemene verdiepingsdoelstellingen kan gewerkt worden naargelang het klasniveau (bijv. in functie van de vooropleiding, cf. leerweg vier of leerweg vijf), de interesse van de leerlingen (bijv. in functie van de vervolgopleidingen; differentiatie tussen concrete leerlingengroepen is dus mogelijk), het aantal beschikbare lestijden. Daar waar de verdieping wel expliciet is opgenomen in de specifieke eindtermen zelf, maken de overeenkomstige doelstellingen uiteraard deel uit van de kerndoelstellingen.

Als ondersteuning en inspiratie worden bij een aantal onderwerpen suggesties geformuleerd om de verdieping uit te werken. Zo worden een aantal verdiepingsdoelstellingen voorgesteld en van didactische commentaar voorzien. Gezien de keuzevrijheid hoeven niet alle vermelde verdiepingsdoelstellingen expliciet aan bod te komen. Als de leraar binnen het voorgeschreven curriculum andere mogelijkheden tot verdieping ziet, kan zelfs daarvoor geopteerd worden.

Omdat *het principe van verdieping in de zes lestijden weliswaar vanuit de eindtermen opgelegd wordt, zal in het jaarplan opgenomen en verantwoord worden, welke opties daarvoor genomen werden,* eventueel in afspraak met de vakgroep wiskunde (cf. de spreiding over de graad).

ONDERZOEKSCOMPETENTIES

De specifieke eindtermen bevatten een aantal eindtermen betreffende het verwerven van onderzoekscompetenties. De aanpak hiervan wordt toegelicht in de leerplanonderdelen *5.1.1 Vaardigheden* bij *6 Onderzoeksvaardigheden* en in deel *5.2.7 Onderzoekscompetenties*. Omdat het leerproces van de leerlingen hier een aanbrengfase, een verwerkingsfase met eventueel coaching, en mogelijk ook klassikale rapportering en/of presentatie kan inhouden, wordt hiervoor *4 % van de lestijden* voorzien.

UITBREIDING EN KEUZEONDERWERPEN

Het leerplan voorziet een aantal mogelijkheden om de overblijvende ruimte in te vullen (10 %).

- Men kan ervoor opteren een gedeelte te besteden aan het *verder verdiepen* van een onderwerp of aan het verdiepen van een ander onderwerp.
- Voor een aantal onderdelen zijn *uitbreidingsdoelstellingen* geformuleerd. Het zijn doelstellingen van een beperkte inhoudelijke omvang, die nauw aansluiten bij het betreffende onderdeel.
- Bij een aantal onderdelen zijn *keuzeonderwerpen* geformuleerd. Ze hebben een inhoudelijk ruimer gehalte en zijn meestal ook losser verbonden met het betreffende gedeelte. Een aantal keuzeonderwerpen laten toe nieuwe onderdelen in het curriculum in te brengen en nieuwe inhouden te verkennen. Sommige bieden de leraar de kans om het voornoemde idee van verdieping bijkomend vorm te geven. Een aantal onderdelen sluiten perfect aan bij een aantal mogelijkheden voor uitwerking in de vrije ruimte. De leraar kan er ook voor kiezen een eigen onderwerp uit te werken voor maximaal 15 lestijden.

De keuze kan bepaald worden in functie van de studierichting (bijv. financiële algebra in economie, regressie en correlatie in wetenschappen) of in functie van de vervolgstudierichtingen. Het verdient sterke aanbeveling de keuze over de verschillende onderdelen wiskunde te spreiden. *De keuze zal verantwoord worden in het jaarplan*.

VRIJE RUIMTE

De lessentabellen voorzien een aantal lestijden in het complementair gedeelte, de zogenaamde vrije ruimte. De invulling van deze lestijden behoort tot de vrije keuze van de scholen. In die zin voorziet dit leerplan wiskunde uiteraard geen enkele verplichting naar inhouden en/of werkvormen.

Toch bestaat de mogelijkheid dat scholen het globale aantal lestijden wiskunde verhogen, zij het als vakgebonden lestijden, zij het als seminarie-uren toegekend aan de wiskundeleraar. Voor de vrije ruimte zijn verder een aantal belangrijke doelstellingen vooropgezet, zoals
- vakoverschrijdend werken,
  vanuit een combinatie van vakken wordt aan een gemeenschappelijk project gewerkt waarin verschillende vakinhouden aan bod kunnen komen;
- projectmatig werken,
  waarbij een project een focus legt op een thema of een onderdeel, en waarbij wellicht niet exhaustief gewerkt wordt;
- zelfstandig werken en leren,
  waarbij hoofdzakelijk de leerling zelf de verantwoordelijkheid voor zijn leerproces leert opnemen;
- uitdiepend werken
  waarbij in hoofdzaak geen extra leerinhouden worden aangereikt, maar wel opdrachten worden uitgevoerd naar meer interne samenhang binnen een vak en tussen vakken onderling.

Deze doelstellingen passen in een moderne opvatting van de wiskundevorming. Wiskunde kan een volwaardige bijdrage leveren in het realiseren van deze doelstellingen, zeker in de studierichtingen waarin het een poolvak is.

Als ondersteuning bij het maken van keuzes binnen deze vrijheid biedt dit leerplan mogelijkheden aan, waarbij opdrachten en thema's worden aangereikt vanuit de voorhanden zijnde wiskundeonderdelen, waardoor een zinvolle invulling kan gegeven worden aan vrije ruimte aangestuurd vanuit wiskunde of met wiskunde.

Doel daarvan is een dynamisch leerplan te creëren, waarbij leraren vanuit een vakkencombinerende aanpak kunnen ingaan op nieuwe tendensen en nieuwe didactische mogelijkheden, maar ook op de vragen vanuit andere vakgebieden of vanuit het verwerven van onderzoeksvaardigheden waarbij wiskunde betrokken zou zijn. Deze vrijheid voor de leraar schept meteen een belangrijke *medeverantwoordelijkheid*, opdat deze lestijden ingevuld worden met zinvolle, uitdagende, creatieve ideeën. Men zal in de studierichtingen met wiskunde als poolvak rekening houden met het niveau waarop in de reguliere lestijden aan wiskunde gedaan wordt, m.a.w. het opnemen van toepassingen in de vrije ruimte die al tot het reguliere curriculum behoren moet vermeden worden. De keuzevrijheid kan ook niet onbeperkt gebruikt worden, bijv. om de leerlingen een of ander onaangepast of (te) moeilijk hoofdstuk te laten verwerken. De leerkrachten zullen hun keuze *bespreken in de vakgroep* en *bindend vastleggen in het jaarplan*. Daarin wordt een verantwoording van de keuze opgenomen.

OVERZICHT LEERPLAN A

1 Vaardigheden en attitudes (5.1)

Worden geïntegreerd in de verwerking van de leerinhoudelijke doelstellingen.

2 Verplichte leerinhoudelijke doelstellingen **90 %**

- **Analyse** (5.2.1) 40 %
  - **Precalculus** (5.2.1.1) 17 %
    - **Basiseigenschappen, veeltermfuncties, rationale functies, irrationale functies**
    - **Exponentiële en logaritmische functies**
    - **Goniometrische functies**
  - **Afgeleiden en integralen** (5.2.1.2) 23 %
- **Discrete wiskunde** (5.2.2) 6 %
  - **Rijen** (5.2.2.1)
  - **Telproblemen** (5.2.2.3)
- **Algebra** (5.2.3) 10 %
  - **Complexe getallen** (5.2.3.1)
  - **Matrices en stelsels** (5.2.3.3)
- **Meetkunde** (5.2.4) 10 %
  - **Ruimtemeetkunde** (5.2.4.1)
- **Statistiek en kansrekenen** (5.2.5) 10 %
  - **Statistiek** (5.2.5.1)
  - **Kansrekenen** (5.2.5.3)

- **Verdieping** 10 %

  Naargelang de keuze bijkomend te verdelen over een of meer van de voorgaande onderwerpen.

- **Onderzoekscompetenties** 4 %

3 Uitbreiding en keuzeonderwerpen **10 %**

- **Uitbreiding**:

  wordt aangegeven bij de verplichte onderwerpen
- **Keuzeonderwerpen**

Keuzeonderwerp	# lestijden
Differentiaalvergelijkingen (5.2.1.3)	10
Convergentie van een reeks (5.2.1.3)	10
Numerieke methoden (5.2.1.3)	15
Iteratie (5.2.2.2)	10
Fractalen (5.2.3.2)	5
Lineaire programmering (5.2.3.4)	10
Financiële algebra (5.2.3.4)	20
Getaltheorie (5.2.3.4)	15
Analytische meetkunde A (5.2.4.2)	30
Analytische meetkunde B (5.2.4.2)	60
Lineaire regressie en correlatie (5.2.5.2)	12
Toetsen van hypothesen (5.2.5.2)	8
Mathematiseren (5.2.6)	15
Eigen keuzeonderwerp	max. 15

De aanbevelingen over het aantal te besteden lestijden zijn slechts *richtinggevend*.

5.1 VAARDIGHEDEN EN ATTITUDES

5.1.1 VAARDIGHEDEN

LEERPLANDOELSTELLINGEN

De leerlingen ontwikkelen (binnen het gekende wiskundig instrumentarium)

<table>
<tr><td>1</td><td>rekenvaardigheid, o.m.
- het rekenen met getallen, formules, algebraïsche vormen en matrices;
- het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden, stelsels, …;
- het voorspellen en inschatten van de grootteorde van een resultaat;
- het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het uitvoeren van bewerkingen.</td><td>7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>meet- en tekenvaardigheid, o.m.
- het analyseren en opbouwen van een figuur bij een redenering, bij een probleemsituatie;
- ruimtelijk voorstellingsvermogen;
- het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het opbouwen van figuren en grafieken.</td><td>7</td></tr>
<tr><td>3</td><td>wiskundige taalvaardigheid, o.m.
- het begrijpen van wiskundige uitdrukkingen (zowel mondeling als schriftelijk);
- het lezen van figuren, tekeningen, grafieken en diagrammen;
- het analyseren, schematiseren en structureren van wiskundige informatie;
- het verwoorden van hun gedachten en hun inzichten (zowel mondeling als schriftelijk).</td><td>1
2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>denk- en redeneervaardigheden, o.m.
- het onderscheid maken tussen hoofd- en bijzaken, gegeven en gevraagde, gegeven en te bewijzen;
- het begrijpen van een redenering of argumentering bij een eigenschap;
- het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het opbouwen van een redenering;
- het opbouwen van een redenering ter verklaring van een eigenschap of de oplossing van een probleem; dit houdt onder meer in:
    - een hypothese (vermoeden) formuleren en argumenteren;
    - een eigenschap formuleren op basis van een onderzoek op een aantal voorbeelden, een inductieve redenering;
- een gegeven redenering op haar geldigheid onderzoeken.</td><td>2
3
7</td></tr>
<tr><td>5</td><td>probleemoplossende vaardigheden, zoals
- een probleem leren ontdekken en het wiskundig behoorlijk leren stellen;
    dit houdt o.m. in: kennis, inzicht en vaardigheden, die ze verwerven in wiskunde, gebruiken bij het verkennen, vertolken en verklaren van problemen uit de realiteit en bij het begrijpen van de bijdrage van wiskunde in sommige kunstuitingen;
- een probleem analyseren (bijv. onderscheid maken tussen gegevens en gevraagde, de relevantie van de gegevens nagaan en verbanden leggen ertussen) en vertalen naar een passend wiskundig model;
- probleemoplossende vaardigheden (i.h.b. heuristische methoden) toepassen bij het werken aan problemen, zowel over alledaagse als over wiskundige situaties;
    bijv. een opgave herformuleren, een probleem opsplitsen in deelproblemen, een goede schets of een aangepast schema maken, notaties invoeren, onbekenden kiezen, voorbeelden analyseren;
- reflecteren op de keuzen voor representatie, oplossingstechnieken en resultaten;
- resultaten controleren op hun betrouwbaarheid en volledigheid;
- ICT-hulpmiddelen gebruiken om wiskundige informatie te verwerken en wiskundige</td><td>2
3
4
5
7
8
9</td></tr>
</table>

problemen te onderzoeken.

6 onderzoeksvaardigheden, o.m.

- de onderzoeksopdracht formuleren en afbakenen;
- een aanpak plannen en zo nodig opsplitsen in deeltaken;
- informatie verwerven en op relevantie selecteren, o.m.
  - de waarde van informatie beoordelen in functie van de opdracht;
  - relatie tussen gegevens en beweringen opzoeken en interpreteren;
- een doelmatig wiskundig model selecteren of opstellen, o.m.
  - een onderdeel van een opdracht herkennen als een wiskundig of een statistisch probleem;
  - vaststellen of een model voldoet en het eventueel bijsturen;
  - zo nodig bijkomende informatie verzamelen om het aangewezen model te kunnen hanteren;
- een bij het model passende oplossingsmethode correct uitvoeren;
- de resultaten binnen de context betekenis geven en ze daarin kritisch evalueren;
- reflecteren op het gehele proces, i.h.b. op de gemaakte keuzen voor representatie en werkwijze;
- het resultaat van het onderzoek zinvol presenteren, het standpunt argumenteren en verslag uitbrengen van het proces.

7 leervaardigheden, o.m.

- het verwerken van losse gegevens;
- het verwerken van samenhangende informatie;
- het raadplegen van informatiebronnen;
- het plannen van de studietijd;
- het sturen van het eigen leerproces.

8 reflectievaardigheden, o.m. over

- de aanpak van hun werk, hun leren;
- hun leerproces en hun inzet;
  - bijv. leiden ze tot het bereiken van de doelstelling?
- de effectiviteit bij het werken, het leren;
- de sterke en zwakke elementen in de uitvoering van hun opdracht;
- het concretiseren in een plan tot verbetering;
  - bijv. welke elementen worden gebruikt om het leren en werken te verbeteren?
- de gezamenlijke aanpak en het overleg bij een groepsopdracht.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerlingen moeten bij hun wiskundevorming een aantal vaardigheden ontwikkelen. Voor de duidelijkheid werden ze gescheiden geformuleerd. Dit betekent echter niet dat ze altijd zo gescheiden voorkomen. In een wiskundig leerproces wisselen ze voortdurend af.

Het is belangrijk te beseffen dat vaardigheden maar bereikt worden doorheen een proces van langere duur. Een aantal vaardigheden werden aangezet in het basisonderwijs en in de eerste en de tweede graad. Ze moeten verder uitgewerkt worden in de derde graad.

Vaardigheden worden niet automatisch gegenereerd door de studie van ermee verwante leerinhouden. Er moet bewust aandacht aan besteed worden. Dit betekent niet noodzakelijk dat ze in afzonderlijke lessen gepresenteerd moeten worden. Ze moeten precies meermaals bij het spontaan gebruik geëxpliciteerd worden.

Een aantal vaardigheden winnen aan belangrijkheid in functie van de vervolgopleiding van de leerlingen of van hun latere beroepsloopbaan.

1 REKENVAARDIGHEID

In de derde graad moeten een aantal rekenvaardigheden paraat beschikbaar blijven, bijv. bij het rekenen met formules, het rekenen met functievoorschriften en bij gebruik in de statistiek. Daarnaast zijn rekenprocedures vereist voor het rekenen met matrices, het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels, het berekenen van afgeleiden en integralen. Het rekenapparaat is slechts een *middel* bij het oplossen van problemen. En precies daarbinnen krijgt het zijn juiste betekenis. Aan het langdurig oefenen van rekenprocedures in geïsoleerde situaties werd in de vooropleiding weinig aandacht besteed en dat blijft ook zo in de derde graad.

Met de opgang van geavanceerde rekenmachines en gemakkelijk toegankelijke en adequate software kan de aandacht voor het automatiseren van deze technieken en procedures beperkt worden. Het is nu al duidelijk dat wie later nog rekenprocedures nodig heeft, in de praktijk veelal zal gebruik maken van moderne informatie- en communicatietechnologie. Weliswaar is inzicht nodig in de precieze werking van de gebruikte procedures. Het gebruik van een rekenmachine of een computer mag het inzicht in die noodzakelijke basisvaardigheden dus niet verminderen. Maar er zal minder aandacht besteed worden aan de manuele beheersing ervan. Ook de kritische houding ten aanzien van wat op het scherm van een toestel verschijnt moet verworven worden.

Anderzijds bieden rekenmachines nieuwe mogelijkheden. Praktische problemen die tot nu toe niet binnen het bereik van het secundair onderwijs lagen, omdat de berekeningen (bijv. bij het oplossen van vergelijkingen) te ingewikkeld of te moeilijk waren, kunnen nu wel behandeld worden.

2 MEET- EN TEKENVAARDIGHEID

In de derde graad is voor deze leerlingen de impact van meetkunde beperkt. Toch worden vaak meet – en tekenvaardigheden gemobiliseerd bij het tekenen van grafieken (functieleer en statistiek). Ook bij probleemaanpak wordt vaak een voorstelling gemaakt. Er is dus ruim de gelegenheid om de al verworven vaardigheid te onderhouden.

Grafische rekenmachines en wiskundige software kunnen als een veredelde pen een meerwaarde brengen aan de behandelde leerinhoud, zonder dat ze een aantal basisvaardigheden overbodig maken. Zo dienen leerlingen toch kritisch om te springen met de getoonde resultaten, bijvoorbeeld de begrensdheid inzien van het uitleesvenster of een snelle controle uitvoeren (cf. het schatten bij het rekenen) aan de hand van een nulpunt of van enkele specifieke punten, het stijgen en dalen van de grafiek, eventueel het asymptotisch gedrag.

3 WISKUNDIGE TAALVAARDIGHEID

Wiskunde is uitgegroeid tot een wetenschap waarin begrippen en eigenschappen welomschreven moeten worden. Daartoe wordt de omgangstaal vaak verengd tot een meer *specifieke vaktaal* met eigen regels.

Begrippen, eigenschappen, procedures en wiskundige verbanden worden erin omschreven met behulp van typische *vaktermen* (bijv. vierkantswortel, evenredig, richtingscoëfficiënt, stelsel, evenwijdig met, middelloodlijn, ligt op gelijke afstand van, histogram, ...). Soms moet een onderscheid gemaakt worden tussen de wiskundige en de dagelijkse betekenis van een term, waarbij de wiskundige betekenis meestal minder vaag omschreven wordt. In de omschrijving van de begrippen en de formulering van eigenschappen worden naast vaktermen specifieke *kernwoorden* gebruikt, die wijzen op het veralgemeningsproces, verbanden, samenhang, ... (bijv. gelijk aan, als ... dan, daaruit volgt, alle, sommige, ...). De wiskundetaal kent vanuit haar voorgeschiedenis een sterke *formalisering* en *symbolisering* die snelle communicatie en universalisering mogelijk maakt, maar die wiskunde voor sommige leerlingen precies zo moeilijk toegankelijk maakt. De eisen die gesteld worden aan deze formalisering zullen uiteraard toenemen naarmate de leerling voor een hoger aantal wekelijkse lestijden wiskunde kiest. Naast de verbale taal is in wiskunde de specifieke *visuele taal* van tekeningen en wiskundige voorstellingen van belang. Een bijzondere vorm van visueel geordend aanbieden van informatie is die in tabelvorm.

Buiten de vaktaal waarmee wiskunde opgebouwd wordt, moeten leerlingen de *beschrijvende taal* blijven hanteren waarin over het wiskundig handelen gesproken wordt (met termen zoals definitie, eigenschap, kenmerk, verklaar ..., bereken ..., los op ..., construeer ..., vraagstuk).

Tenslotte, reële problemen worden meestal niet rechtstreeks in de wiskundetaal gesteld. Een belangrijke vaardigheid is het mathematiseren, het omzetten of het *vertalen* van de situatie, vaak uitgedrukt met behulp van de omgangstaal, naar de wiskundige situaties en modellen, in het bijzonder naar en met wiskundige vaktaal. Daarbij moet de informatie die de probleemsituatie beschrijft geanalyseerd worden op elementen die verwijzen naar wiskundige begrippen, relaties, …. Het schematiseren en het structureren van wiskundige informatie gebruikt zowel die taalvaardigheid als redeneervaardigheden en probleemoplossende vaardigheden.

In een actief leerproces krijgen de leerlingen heel wat kansen om de verschillende communicatieve vaardigheden (zowel lezen, luisteren, spreken als schrijven) te hanteren en ze toe te passen op wiskundige situaties. In communicatie met andere leerlingen kunnen voorbeelden en tegenvoorbeelden van begrippen en eigenschappen besproken worden, wat de begripsvorming ondersteunt. Speciale aandacht kan gaan naar de betekenis van de wiskundige vaktermen en kernwoorden. De leerlingen moeten leren de geëigende vaktermen voldoende correct te gebruiken. Ze moeten vertrouwd geraken met strengere eisen die aan wiskundige wendingen worden gesteld. Leerlingen moeten leren hun ervaringen, bevindingen, vermoedens, besluiten en oplossingen te verwoorden. Precies in het verwoorden van hun gedachten en hun inzicht kunnen ze beter de tekortkomingen ervan ervaren en daardoor hun inzicht verdiepen.

Omdat wiskundige informatie visueel kan overgebracht worden, moet aandacht besteed worden aan het lezen en interpreteren van visuele informatie (bijv. op tekeningen in de meetkunde of informatie op een grafiek of een diagram in de statistiek). Het hanteren van een schets of een nauwkeurige tekening als middel tot communicatie moet aangemoedigd worden. Het maken van een meer abstracte of formele redenering zal ondersteund worden door het redeneren op figuren.

Bijzondere aandacht moet besteed worden aan het verwerven van de leesvaardigheid bij het lezen van de tekst van opgaven, problemen en vraagstukken. Vaak is deze moeilijkheid voor de leerlingen groter dan het uitvoeren van gekende rekentechnieken. Aan deze belangrijke stap, noodzakelijk bij het analyseren van problemen en het formuleren van vermoedens, moet bijzondere aandacht besteed worden.

4 DENK- EN REDENEERVAARDIGHEDEN

Met denk- en redeneervaardigheden worden onder meer bedoeld: abstraheren (bij de begripsvorming), een vermoeden formuleren, veralgemenen (ontdekken van een eigenschap), analyseren, synthetiseren, structureren, ordenen, analoog werken, argumenteren, bewijzen. Het gaat om meer dan het kunnen bewijzen van eigenschappen.

Vanuit het actief onderzoeken van relaties tussen begrippen worden leerlingen geconfronteerd met vele vormen van beweringen en vermoedens. Niet elk intuïtief vermoeden leidt tot een 'eigenschap', niet elke bewering zal blijken juist te zijn, veralgemeenbaar, ... Daarom is het zinvol bij de besluitvorming aandacht te besteden aan de argumenten die ervoor kunnen gegeven worden. Ook bij het actief oplossen van problemen zullen de leerlingen hun oplossing of hun redenering op een of andere wijze moeten argumenteren.

Het verwerven van deze redeneervaardigheid vraagt een geleidelijke en geduldige aanpak. Zinvol is aandacht te besteden aan de verschillende fasen van het opbouwen van een redenering of een bewijs, o.m. het redeneren op een tekening, het argumenteren van delen van een redenering (bijv. het expliciteren van gegeven en vraag), het inzien van en/of zelf ontdekken van de kernidee uit een redenering, het maken van redeneringen in analoge situaties, het zelf uitschrijven van een behoorlijk geordende verklaring.

5 PROBLEEMOPLOSSENDE VAARDIGHEDEN

Leerlingen moeten vaardigheid verwerven in het zelfstandig oplossen van problemen. Het bevorderen van dit probleemoplossend denken is een van de voornaamste opdrachten van leerkrachten wiskunde. De transferwaarde van deze vaardigheden naar andere vakken kan zeer groot zijn. De leerlingen ervaren hierdoor dat de inzichten en de vaardigheden, die ze opdoen bij de wiskundevorming, ruim kunnen ingeschakeld worden bij het vertolken en het verklaren van problemen uit de andere vakken en uit de maatschappelijke leefwereld. Probleemoplossende vaardigheden zijn een essentiële troef in de studie- en beroepsloopbaan van leerlingen.

De meest zinvolle aanpak lijkt die van een volgehouden *integratie* ervan *in het normale lesgebeuren*. Leerlingen zullen deze vaardigheden maar verwerven doorheen een actief proces van zich vragen stellen, patronen ontdekken, antwoorden zoeken en onderzoeken, voorbeelden en tegenvoorbeelden opzoeken, vraagstelling vereenvoudigen, voorstellen analyseren, testen en bijsturen, vermoedens argumenteren, ...

Belangrijk is dat de leerlingen aantrekkelijke, haalbare problemen aangeboden krijgen. Vooral succeservaring zal leerlingen aanzetten om nieuwe en moeilijkere problemen aan te pakken. Leerlingen moeten evenwel problemen leren ‘zien’. Daarom zullen geregeld open problemen, weliswaar haalbaar op het niveau van de leerlingen, aangeboden worden. Problemen moeten niet noodzakelijk altijd buiten de wiskunde gezocht worden. Ook wiskundige situaties kunnen als aantrekkelijke problemen gepresenteerd worden.

Het verwerven van probleemoplossende vaardigheden is een lang en arbeidsintensief proces. Daarom moet de aanpak in de derde graad aansluiten op de inspanningen die al in de eerste en de tweede graad werden gedaan. Zo kan men terugvallen op verschillende stappen die voor leerlingen misschien al vertrouwd zijn.

In de eerste plaats zal aandacht besteed worden aan een goede *probleemstelling*. Het probleem moet voor de leerlingen duidelijk zijn (dit kan bijvoorbeeld door de leerlingen het probleem in eigen woorden te laten stellen). Als het gaat om het onderzoeken van verbanden of eigenschappen moet dit leiden tot een duidelijke formulering van een vermoeden of hypothese.

Daarop volgt het *analyseren* en/of het *mathematiseren*. Dit betekent dat de leerlingen de wiskundige probleemstelling kunnen herkennen in het gestelde probleem of in de opgave (bijv. het probleem is te herleiden tot het bepalen van een maximum van een functie, tot het berekenen van een oppervlakte, …). Dit betekent onder meer dat ze bij een situatie gegeven en gevraagde kunnen bepalen, kwantificeerbare elementen kunnen opzoeken en wiskundig vertolken, relaties tussen elementen (gegevens onderling, gegevens en gevraagde) kunnen leggen en wiskundig vertolken, uit te voeren bewerking(en) kunnen bepalen. In deze fase worden vaak *zoekstrategieën* of *heuristische methoden* gebruikt. In een leerproces van probleemoplossende vaardigheden is het belangrijk deze te expliciteren. Bij een complexer probleem is het zinvol in deze fase een planmatige aanpak te voorzien en de uitvoering van het plan verderop te bewaken.

Daarop volgt het *uitschrijven van een oplossing, het berekenen van het resultaat of het uitschrijven van een verklaring*, het maken van een *(reken)proef*, het maken van een *realiteitsproef* (kan dit resultaat in deze context) en het formuleren van een *antwoord* op het gestelde probleem.

Heuristische methoden
Voorbeelden van veel gebruikte heuristische methoden zijn:
- gegeven en gevraagde wiskundig expliciteren;
- bij een gegeven situatie een schets of een tekening maken;
- bij een gegeven situatie een voorbeeld of een tegenvoorbeeld geven;
- bij een situatie bijzondere gevallen onderzoeken;
- gebruik maken van analogie, symmetrie, …;
- een eenvoudigere probleemstelling onderzoeken;
- een of meer veranderlijken in het probleem constant houden;
- een gestelde voorwaarde laten vallen.

Heuristische methoden worden veelvuldig gebruikt. Belangrijk is ze bewust te laten ervaren en te expliciteren op het ogenblik dat ze spontaan gebruikt worden. Een actieve aanpak van het leerproces laat toe dat leerlingen hierover onderling en met de leerkracht informatie uitwisselen. Met het oog op het verwerven van een hogere graad van zelfwerkzaamheid bij de leerlingen kan een aantal complexere oefeningen aangeboden worden waarbij doelbewust het inzicht in het gebruik van heuristische methoden wordt nagestreefd.

Bij het oplossen van problemen worden de leerlingen geconfronteerd met het toepassen van hun kennis in diverse situaties. Het is belangrijk te beseffen dat probleemoplossende vaardigheden en heuristische methoden maar effectief zullen werken, als de leerlingen over een efficiënte kennisorganisatie beschikken. Het oplossen van problemen kan leerlingen precies motiveren deze kennisorganisatie te onderhouden.

De *rol van de leerkracht* kan erin bestaan leerlingen individueel tot nadenken aan te zetten, discussie over oplossingen uit te lokken en hierbij een kritische houding aan te bevelen. Zeker in de derde graad zal de leerkracht proberen in een eerste fase minder inhoudelijke hulp aan te reiken en meer te verwijzen naar het gebruik van heuristische methoden en de beschikbare kennisorganisatie (niet naar specifieke kennis). Zo worden de leerlingen geconfronteerd met het opnemen van verantwoordelijkheid voor het uitvoeren van de opdracht of voor hun leren. Pas als dit niet lukt is het zinvol om terug meer leiding te geven.

De leerkracht zou zelf een analoge werkwijze kunnen hanteren bij het klassikaal opstellen van bewijzen van eigenschappen en het opbouwen van redeneringen. Ook is het zinvol dat de leraar aan het eind van een oplossingsproces of redenering de denkstappen eens controlerend overloopt en de gebruikte heuristische methoden eens expliciet laat formuleren of bevragen.

Het verdient aanbeveling dat voldoende differentiatie in de opdrachten wordt nagestreefd, omdat in de verwerving van probleemoplossende vaardigheden het verschil tussen de leerlingen erg groot kan zijn. Voor wiskundig sterke leerlingen kan men bijv. vlugger naar open problemen grijpen.

6 ONDERZOEKSVAARDIGHEDEN

De leerlingen worden geconfronteerd met onderzoeksopdrachten die ze zelfstandig of in groep moeten verwerken. Een aantal vaardigheden die ze daarbij kunnen hanteren zijn al gedeeltelijk aan bod gekomen bij het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden. Nu komen er uitdrukkelijker de regulerende en de reflectieve onderdelen bij.

Een onderzoeksopdracht begint met het uitklaren van de onderzoeksvraag. Belangrijk voor de haalbaarheid, zeker in de beginfase, is deze voldoende te beperken en af te bakenen, anders riskeren de leerlingen in een te groot project verloren te lopen. Dat kan door de onderzoeksopdracht op te splitsen in deelvragen (wie, wat, waar, wanneer, waarom, hoe, welke, waarmee, waartoe, …).

Interessant is dat leerlingen ook gevoeligheid ontwikkelen voor de soort vraag die ze onderzoeken, bijv.
- beschrijven of exploreren van een situatie,
- vergelijken en ordenen van situaties,
- onderzoek gericht op verklaring of het theoretisch organiseren,
- evaluatie- of toetsingsonderzoek,
- onderzoek gericht op voorspellingen,
- onderzoek met het doel een concreet probleem op te lossen.

Afhankelijk van het soort onderzoek zal men vaak ook een andere planning volgen en op een andere wijze gegevens verzamelen, beoordelen of interpreteren. Vaak hanteert men ook andere denkmethoden, bijv.
- reproductief denken,
- abstraherend denken,
- inductief denken,
- reductief denken,
- deductief denken.

Leerlingen zullen in deze beginfase allicht maar met de meest eenvoudige vormen van dit uitgebreid palet van onderzoeksmogelijkheden geconfronteerd worden.

Na het formuleren van een vermoeden of sterker een hypothese zal men de vraag meestal analyserend uiteenrafelen, gegevens verzamelen in functie van de vraag, om te komen tot verificatie. Daarbij kunnen allerlei zoeksystemen gehanteerd worden (bibliotheek, media, internet).

Het is niet alleen belangrijk te weten wat onderzocht zal worden, men zal er ook een concrete werkorganisatie voor opzetten. Een dergelijk plan van aanpak bestaat uit een onderzoeksplan en een tijdplan. In het onderzoeksplan staan de deelvragen die men geselecteerd heeft, de vermoedens en hypothesen, de methoden, de bronnen en hulpmiddelen. Een tijdsplan is zinvol om de concrete organisatie op te volgen wat betreft de beschikbaarheid van materiaal en hulpmiddelen, verwerkingstermijnen, eventuele taakverdeling en afspraken.

In deze studierichtingen, waar wiskunde als poolvak voorkomt, moeten de specifieke eindtermen in verband met onderzoekscompetenties mede door wiskunde worden gerealiseerd. Het onderdeel 5.2.7 bevat een aantal concrete suggesties voor het afbakenen van mogelijke opdrachten. Ook voor de andere poolvakken waaraan wiskunde gekoppeld wordt (bijv. economie of wetenschappen) bevatten opdrachten vaak een wiskundige of statistische component. Leerlingen moeten deze modellen leren herkennen en vlot gebruiken in deze toepassingssituaties. Ook de opdrachten binnen de vrije ruimte kunnen een wiskundige component bevatten. Een wiskundig oog bij het kiezen van modellen zal vaak ook letten op een mogelijke algoritmisering van een proces.

Wat betreft het procesverloop kan men terugvallen op de in wiskunde ontwikkelde probleemoplossende en controlerende vaardigheden.

Belangrijk is ook het proces af te sluiten met een reflectiefase, waarin de leerling zelf terugkijkt op het verloop van het proces en er zijn leerervaringen bij formuleert en eventueel een werkplan opstelt om moeilijkheden en tekorten op te vangen.

7 LEERVAARDIGHEDEN

Aan het verwerven van leervaardigheden moet in de derde graad nog steeds bewust gewerkt worden. Daarbij moet steeds meer aandacht gaan naar het zelfstandig leren van de leerlingen. Belangrijk is dat de bijdrage van wiskunde kadert in een bredere aanpak van de problematiek leren leren in de school en de groei naar een zelfverantwoord leren. Omdat het 'de leerling' is die adequate technieken moet verwerven, zal over de vakken heen toch een zekere eenvormigheid nagestreefd worden. Algemene technieken worden uiteraard vakspecifiek vertaald.

Bij het verwerven van wiskunde worden een aantal *leervaardigheden* geactiveerd.

Voorbeelden zijn

- het inprenten (notaties, symbolen, formules);
- het gebruik van de vormkenmerken van een tekst (titels, subtitels, afbeeldingen, schikking kaders, lettertype, tekstmarkeringen);
- de aandacht voor het begrijpen en analyseren van het geleerde;
- het opnieuw opzoeken en zo nodig inoefenen van voorkennis (het aanleggen of gebruiken van een vademecum kan hierbij ondersteunend werken);
- het verdiepen van de leertekst in leerboeken of notities (zich vragen stellen bij de leerinhoud, de tekst structureren bijv. met tekstmarkeringen, kleur, ..., het bijhouden van een kennisschema);
- het gebruiken van 'informatiebronnen' (een inhoudstafel, een register, een samenvatting van de leerinhouden in het leerboek, een vademecum, een handleiding van de rekenmachine);
- het zichzelf sturen bij het leren, bijv.
  - de keuze van het verwerkingsproces eigen aan de wiskundige leerinhoud,
  - het oordeelkundig gebruiken van een antwoordblad, een correctiesleutel,
  - het hanteren van een studiewijzer,
  - het bijhouden van een overzichtelijke synthese van wat verworven werd,
  - het plannen van de studietijd,
  - het onderzoeken van de gemaakte fouten (bijv. door de eigen werkwijze te vergelijken met die van anderen, aangeven waarom iets fout gegaan is) en hoe die kunnen vermeden worden.

Belangrijk is te beseffen dat *tijdens het leerproces* zelf al sterk kan bijgedragen worden tot het realiseren van leervaardigheden. Zo kan een leerproces waarin de leerling actief betrokken wordt bij het bevragen van de leerinhouden, die leerling leren 'vragen stellen'. Het 'analyseren' van een definitie of eigenschap in de klas ondersteunt het analyseren tijdens het instuderen. Het gebruik van een ordelijk bordschema met het geëxpliciteerd (niet automatisch) gebruik van verdiepingstechnieken (kleur, kaders, structuur) zal leerlingen aanzetten dit te doen. Het vergelijken van het bordschema met de neerslag van de leerstof in het leerboek (veel meer dan het aanduiden van de leerstof) en het wijzen op de vormkenmerken ervan ondersteunt het leren. Het hernemen van de structuur bij de aanknopingsfase van de les, het laten raadplegen van overzichten van leerinhouden (bijv. samenvatting in het leerboek en/of in een beschikbaar of eigenhandig aangelegd vademecum) zal hen telkens opnieuw confronteren met structurering en synthese van hun kennis en hen meteen leren hun voorkennis zelfstandig op te zoeken en aan te vullen. De wijze waarop de leerkracht omgaat met fouten en deze aangrijpt als leerkansen, kan leerlingen de waarde leren van het onderzoeken van hun fouten. De wijze waarop leerlingen betrokken worden bij het leerproces kan hun zelfwerkzaamheid en hun verantwoordelijkheid voor het eigen leren versterken.

8 REFLECTIEVAARDIGHEDEN

Leerlingen moeten leren systematisch reflectie in te bouwen bij het uitvoeren van opdrachten en i.h.b. bij het leren. Niet alleen het verwerven van nieuwe kennis en inzichten, het vinden van de oplossing van een probleem of het uitvoeren van een leertaak zijn belangrijk, maar ook de wijze waarop het proces verlopen is, biedt belangrijke leerkansen. Leerlingen moeten dus leren stilstaan bij het proces zelf. Na het handelen volgt het terugblikken op dat handelen, waarbij men zich bewust wordt van de essentiële elementen ervan, de goede ervaringen en de problemen die zijn opgetreden. Daarbij zal de leerling, eventueel gecoacht door de leraar, alternatieven formuleren en selecteren vanuit bezinning en overleg, om ze in een nieuwe situatie uit te proberen.

Voorbeelden van reflectieve vragen zijn:

- Wat was het doel, wat wilde ik bereiken?
- Hoe is het proces concreet verlopen?
    - Hoe kijk ik zelf terug op het proces?
- Welke problemen deden zich effectief voor en hoe kan ik dit positief omschrijven?
- Welke oplossingen, alternatieven zijn er?
    - Welke voordelen en nadelen zie ik al?
    - Hoe stuur ik mijn leervaardigheden bij vanuit deze ervaring?

Het is evident dat dergelijke inzichten niet vanzelfsprekend automatisch worden voortgebracht. Ze kunnen bijvoorbeeld als werkwijze aan bod komen bij meer klassikaal verwerkte opdrachten of zelfs na een klassikale les. Er kan dan klassikaal gereflecteerd worden, bijvoorbeeld aan de hand van voornoemde vragen. Toch lijkt een individuele aanpak met een meer persoonlijke feedback van de leraar zinvoller. Dat veronderstelt weliswaar een van nabij opvolgen van het leerproces van de (individuele) leerling, bijv. vanuit een observatieschema. De rol van de leraar verschuift hierbij dus van die van alwetende informatiebron naar begeleider en ondersteuner van het leerproces (leraar als coach).

5.1.2 ATTITUDES EN OPVATTINGEN

LEERPLANDOELSTELLINGEN

De leerlingen ontwikkelen

9	zin voor nauwkeurigheid en orde, o.m. - een houding van gecontroleerd uitwerken en terugkijken op uitgevoerde opdrachten.	11
10	zin voor helderheid, bondigheid, volledigheid, eenvoud en doelmatigheid van de gebruikte wiskundetaal, o.m. - de ervaring dat gegevens uit een probleemstelling toegankelijker worden door ze doelmatig weer te geven in een geschikte wiskundige representatie; - de doelmatigheid van het rekenen, voor een adequate keuze tussen het manuele werken en het gebruik van ICT-hulpmiddelen.	1 3 4 7
11	kritische zin, o.m. - een kritische houding tegenover berekeningen, beweringen en handelingen; - een reflectieve houding ten aanzien van gemaakte keuzen voor representatie en oplossingstechnieken; - een kritische houding tegenover de mogelijkheden en de beperkingen van het gebruik van wiskunde.	2 5
12	zelfvertrouwen, zelfstandigheid, doorzettingsvermogen en doelmatigheid bij het aanpakken van problemen en opdrachten.	
13	zelfregulatie, o.m. - een onderzoeksgerichte houding ten aanzien van feiten, opgaven en problemen; - het oriënteren, plannen, uitvoeren en bewaken van een oplossingsproces.	12 4

14	zin voor samenwerking en overleg, o.m. - de ervaring dat ze hun mogelijkheden kunnen vergroten door samenwerking met anderen; - appreciatie voor een andere oplossing of aanpak.	13	
15	waardering voor wiskunde door inzicht in de bijdrage ervan in de culturele, historische en wetenschappelijke ontwikkeling, o.m. - zin voor bewondering door de rol van wiskunde in de kunst; - zin voor de rol van wiskunde bij de ontwikkeling van exacte en humane wetenschappen en de techniek; - zin voor de rol van wiskunde bij de ontwikkeling van de cultuur; - zin voor de rol van wiskunde bij het beschrijven van reële problemen; - zin voor verwondering en bewondering voor de elegantie van een redenering of een oplossing.	6 8 9	19
16	inzicht in hun studie- en beroepskeuzeproces, o.m. door het inwinnen van informatie over het aandeel van wiskunde in een vervolgopleiding en die vergelijken met hun voorbereiding.	10	

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Doorheen de wiskundevorming kunnen leerlingen een aantal attitudes en in het bijzonder leerattitudes verwerven. Omdat het zoals bij leervaardigheden, de leerling is die attitudes moet verwerven, zal over de vakken heen een zekere eenvormigheid nagestreefd worden en moet de bijdrage van wiskunde *kaderen in een bredere attitudevorming in de school*.

Het is belangrijk te beseffen dat attitudes maar bereikt worden doorheen een *proces van langere duur*. Daarom zullen attitudes ook in de derde graad nog nagestreefd worden.

9 ZIN VOOR NAUWKEURIGHEID EN ORDE

Zin voor nauwkeurigheid en orde kan nagestreefd worden bij de ontwikkeling van reken-, meet- en tekenvaardigheid. De leerlingen moeten beschikken over de gewoonte op hun uitvoeringsproces terug te kijken als een vorm van *controle*. Ze kunnen zo vlugger tot nauwkeurige resultaten komen.

Omdat de graad van complexiteit van de wiskunde en de opdrachten toeneemt, moet nauwkeurigheid nagestreefd worden bij het gebruik van notaties en symbolen, bij het verwoorden van definities en eigenschappen (zowel schriftelijk als mondeling). Het leerproces in de klas moet voldoende kansen bevatten om terugkoppeling te geven over antwoorden en oplossingen van leerlingen zelf. Het is precies in het toetsen van hun onvolmaakte antwoord dat de leerlingen de kans krijgen het te corrigeren.

Ordelijk en systematisch werken is een belangrijke leerhouding. Ze kan bijvoorbeeld bijgebracht worden bij het noteren, het maken van oefeningen en het aanpakken van problemen.

10 ZIN VOOR KWALITEIT VAN DE WISKUNDIGE REPRESENTATIE

Leerlingen moeten hun gedachten en hun inzicht behoorlijk leren verwoorden. Het leerproces in de klas moet daartoe voldoende kansen bieden. Vanuit de vaak intuïtieve verwoording in de fase van de begripsvorming of het vermoeden van een eigenschap moeten de leerlingen geleidelijk aan een correcte wiskundetaal hanteren. Een wiskundige formulering is vaak helder, bondig en van alle ballast ontdaan. De leerlingen kunnen hierbij ervaren dat het gebruik van dergelijke formuleringen vaak het denkproces helder doet verlopen. Ligt de beknoptheid van symbolische formuleringen voor de hand, dan is een behoorlijke verwoording ervan vaak een probleem. Dit vraagt bijzondere aandacht.

Omdat een zoekproces soms met vraag en antwoord, met gissen en missen en dus niet rechtlijnig ontwikkeld wordt, zal eens het doel bereikt, de uiteindelijke redenering synthetiserend overlopen worden, om een helder inzicht te bekomen. Voor leerzwakke leerlingen biedt dit vaak de gelegenheid terug aan te pikken. Ook bij het oplossen van problemen zal aandacht besteed worden aan het overhouden van een duidelijke synthese. Een heldere oplossing zal meestal overzichtelijk zijn en gemakkelijker te begrijpen. Zowel bij het leerproces van de wiskundige inhouden zelf, als bij het oplossen van problemen zal men bij het synthetiserend overlopen aandacht besteden aan de doelmatigheid van een aanpak door de voor- en nadelen van bepaalde werkwijzen te bespreken.

11 KRITISCHE ZIN

Wiskundevorming moet leiden tot een bevragende, onderzoekende, controlerende, verifiërende houding. Dit wil zeggen dat berekeningen, beweringen, argumenteringen en redeneringen niet zomaar worden aanvaard en overgenomen. Dit slaat op vermoedens, oplossingstechnieken, redeneringen door leerlingen in de klasgroep gebracht ter bespreking, en op de gekozen modellen of representaties en op de eigen berekeningen, oplossingen en redeneringen. Bij de keuze van een model of bij een berekening, een redenering, een oplossing van een probleem zijn zowel het proces als het eindproduct van belang. Oog krijgen voor de oplossingsmethode kan leiden tot het leren waarderen van andere oplossingen. Zo kunnen de leerlingen een werkwijze leren waarderen omdat ze eenvoudiger is, minder tijd vraagt, wiskundig helder geformuleerd is, sneller veralgemening toelaat.

Naarmate men doordringt in de wiskundekennis moet ook de bevragende, onderzoekende, controlerende, verifierende houding groeien. Ze is onmisbaar bij de verdere ontwikkeling van wiskunde. Gelukkig doen zich ook meer kansen voor om ze te ontwikkelen.

Belangrijk is dat deze onderzoekende houding herkenbaar is in het didactisch optreden van de leerkracht. Zowel de aanbreng van nieuwe leerinhouden als het toepassen van kennis en het oplossen van problemen bieden kansen tot stimulerende klassengesprekken. Leerlingen zullen maar oog krijgen voor het oplossings'proces', als hieraan ook tijdens het onderwijsleerproces voldoende aandacht besteed wordt en als ze bijvoorbeeld gestimuleerd worden verschillende oplossingen of antwoorden te vergelijken.

Doorheen het ontwikkelen van een dergelijke kritische houding worden leerlingen geconfronteerd met de mogelijkheden en de beperkingen van het gebruik van wiskunde in de praktijk. Dat is een belangrijke houding voor wiskundegebruikers, die de meeste leerlingen in de toekomst zullen zijn. Een gezonde relativering naast de verwondering over de mogelijkheden van de wiskunde kan bij leerlingen leiden tot een gemotiveerde, evenwichtige opvatting over wiskunde.

12 ZELFVERTROUWEN EN ZELFSTANDIGHEID

Bij vaardigheden werd uitvoerig ingegaan op het aanpakken van problemen. Het is niet moeilijk in te zien dat het verwerven van probleemoplossende vaardigheden een uitgelezen kans biedt om zelfwerkzaamheid en doorzettingsvermogen te verwerven. Met het oog op vervolgstudies moet in de derde graad de zelfstandigheid bij het verwerken van opdrachten toenemen.

Een goede aanpak van deze leerprocessen zal de leerlingen een solide basis geven waarop zij kunnen terugvallen. Succeservaring zal daarbij het zelfvertrouwen en de motivatie van leerlingen onderbouwen. Sommige leerlingen geraken ontmoedigd als ze geen succes kennen. Daarom moeten ze aangezet worden eenzelfde stap meermaals te hernemen. In een gedifferentieerde aanpak kunnen opdrachten zo aangeboden worden dat voor de ene leerling de stappen niet te groot zijn en dat voor een andere een meer open vorm aangeboden wordt, waarin een grotere klemtoon ligt op het zelf leren een probleem te ontdekken en te stellen.

Het is evident dat leerlingen fouten zullen maken. Het is belangrijk in te zien dat fouten maken inherent deel uitmaakt van het leerproces. Een goede leerkracht zal deze aanwenden als belangrijke leerkansen. Een aanmoedigende en respectvolle benadering zal leerlingen zeker stimuleren en uiteindelijk leiden tot betere resultaten.

13 ZELFREGULATIE

Bij het oplossen van problemen moeten de leerlingen over een goede kennisorganisatie beschikken en zoekstrategieën kunnen hanteren. Daarnaast moeten ze hun zoeken en werken gecontroleerd uitvoeren. Dit betekent dat ze zelf hun werk kunnen 'reguleren'. Dit houdt onder meer in dat ze hun resultaat toetsen (bijv. bij een rekenresultaat zowel op juistheid als op realiteitswaarde). Het is echter niet alleen aan het einde van het proces dat 'controle' nodig is. Die kan van bij de aanvang in het oplossingsproces opgenomen worden. Van bij de verkenning van het probleem (de oriëntatie), bij het opmaken van een uitvoeringsplan en bij de uitvoering zelf kan stapsgewijze gewerkt worden en kan elke stap gecontroleerd worden. Zo leidt het aanpakken van problemen tot een onderzoeksgerichte houding en tot methodisch, planmatig en gecontroleerd werken. Bij het opzetten van een redenering, bij het verklaren van een eigenschap kunnen dezelfde regulatietechnieken gevolgd worden.

Het is evident dat leerlingen deze houding maar geleidelijk aan zullen verwerven en dat dit gemakkelijker zal gaan, naarmate deze houding tijdens het leerproces in de klas aan bod komt in de werkwijze van de leerkracht.

Met het ontwikkelen van een dergelijke onderzoeksgerichte houding kan wiskunde bijdragen tot een meer algemene vorming. Ze kan overgedragen worden op het aanpakken van andere dan wiskundige problemen. Zo kan ze leiden tot de leerhouding van methodisch, planmatig en gecontroleerd werken. Op deze wijze kan wiskunde bijdragen tot het verwerven van een kritische houding ten aanzien van het globale eigen denken en handelen.

14 ZIN VOOR SAMENWERKING EN OVERLEG

Een onderwijsleerproces waaraan de leerlingen volwaardig en actief kunnen deelnemen, waarin ze hun bevindingen en hun oplossingen kunnen vergelijken en toetsen aan die van anderen, kan hen een positieve waardering bijbrengen voor samenwerking en overleg. Bij het bespreken van oplossingsmethoden, bij het kritisch onderzoeken van elkaars oplossing kan waardering voor elkaars mening aangeleerd worden en daardoor waardering voor de persoon van de andere zelf.

Bij het uitvoeren van een aantal opdrachten, bijv. het oplossen van bepaalde (ruimer gestelde) problemen, het opzoeken van allerlei historische gegevens, het opzoeken van informatie op het internet over wiskundigen, belangrijke wiskundige stellingen, wiskundige illustraties of toepassingssituaties kan de samenwerking gestimuleerd worden door de opdrachten in groep te laten afwerken. Zo kunnen leerlingen aangezet worden tot samenwerking en overleg.

15 WAARDERING VOOR WISKUNDE

Wiskundevorming staat niet los van die van de andere vakken. Wiskunde zelf is doorheen eeuwen ontwikkeld precies in samenhang met de opvattingen en de problemen van die tijd. Een aantal historische contexten bieden vandaag nog een zinvolle instap om bepaalde wiskundeproblemen en leeronderdelen aan te pakken. Daarom zal die historische context geïntegreerd worden in de aanpak.

Een meer realistische aanbreng en voldoende concrete toepassingen moeten er borg voor staan dat de ontwikkeling van wiskunde bij de leerlingen niet los staat van de wereld rondom hen. Anderzijds biedt wiskunde zelf heel wat kansen om door te dringen tot de essentie van bepaalde problemen en situaties. Door een beter begrijpen kan de verwondering en de bewondering voor de context groeien. De elegante wijze waarop met behulp van wiskunde problemen beschreven en opgelost worden kan op zich al verwondering wekken.

16 INZICHT IN HET STUDIE- EN BEROEPSKEUZEPROCES

Aan het einde van de derde graad staan leerlingen voor een belangrijke keuze in verband met de vervolgopleiding die ze zullen volgen en de latere beroepskeuze. In een aantal vormen van hoger onderwijs en studierichtingen krijgt wiskunde nog een belangrijke vormende en ondersteunende rol toebedeeld. Het al of niet vlot kunnen omgaan met de moderne wiskundemethoden die in de wiskundevorming van de derde graad aan bod komen, kan een aanwijzing geven voor deze keuze.

5.2 INHOUDELIJKE DOELSTELLINGEN

5.2.1 ANALYSE

ALGEMENE INLEIDING

De didactische opbouw van de analyse kunnen we zoals aangegeven in *3 Algemene pedagogisch-didactische wenken* ordenen rond vier kerngedachten: de *betekenis* van de begrippen, de *berekeningen*, de *fundamenten* en de *toepassingen*.

De *betekenis* van begrippen is verbonden met de abstractie en explicitering van gemeenschappelijke kenmerken. Hier wordt vooral aandacht besteed aan de begrippen functie, afgeleide en integraal.

- Het begrip *functie* duidt op het verband dat bestaat tussen twee grootheden, tussen twee veranderlijken. Aan elke waarde van de als onafhankelijk veranderlijke gekozen grootheid beantwoordt hoogstens één waarde van de afhankelijk veranderlijke grootheid. Dit verband kan naargelang de situatie beschreven worden door verschillende voorstellingswijzen: *beschrijving, tabel, grafiek en voorschrift*.

  De leerlingen zijn al enigszins vertrouwd met dit functiebegrip. Ze beschikken over een begrippenkader met o.m. nulpunt, domein, tekenverloop, extremum, stijgen en dalen. Dat wordt uitgebreid met begrippen als limiet en asymptoot.

- De *afgeleide* is een maat voor de verandering van een functie op een bepaald ogenblik. In contexten verschijnt de afgeleide onder verschillende gedaanten: afgeleide als helling van een grafiek in een punt, afgeleide als snelheid, afgeleide als marginale grootheid, … Op deze manier krijgt het begrip een grafische, fysische, economische, … betekenis. De fundamentele rol die afgeleiden vervullen bij extremumproblemen, veranderingsprocessen en lineaire benaderingen versterken de betekenis van het begrip.
- De essentie van het begrip (bepaalde) *integraal* is ‘oppervlakte onder een grafiek’. Volumes, gemiddelden, arbeid, … kunnen herleid worden tot het berekenen van dergelijke oppervlakten.

De betekenis van begrippen wordt ontwikkeld uit concrete situaties waarin het begrip wordt gehanteerd, gebruikt, al ‘toegepast wordt’. Dit genetisch proces is wezenlijk voor de begripsvorming zelf.

Om met concepten wiskundig te kunnen werken moeten onder meer *berekeningen* uitgevoerd worden. Deze berekeningen kunnen manueel gebeuren of door middel van ICT, waarbij het manuele rekenwerk bewust beperkt wordt tot zinvolle gevallen.

Eens vertrouwd met de begrippen, wordt aandacht besteed aan de studie van de *fundamenten* en de theoretische preciseringen, die kunnen uitmonden in een samenhangende wiskundige theorie.

De concepten worden *toegepast* om bepaalde situaties te modelleren en/of te mathematiseren, waarbij een betekenisvolle weg gevolgd wordt.

- De situatie wordt gemathematiseerd onder meer op basis van de betekenis van de begrippen (bijv. inzien dat het antwoord op een gestelde vraag kan gevonden worden door een integraal te berekenen).
- Binnen het model de wiskundige bewerkingen uitvoeren.
- De wiskundige resultaten interpreteren in de oorspronkelijke situatie (demathematiseren).

Het is evident dat een aanpak die aansluit bij de genetische ontwikkeling van begrippen, de betekenis ervan verder versterkt. Bij deze toepassingen moet echter ook nog bijzondere aandacht besteed worden aan het onderhouden en het verder verwerven van algemene probleemoplossende vaardigheden, zowel bij de probleemstelling als bij berekeningen, de interpretatie van resultaten en het controlerend terugkijken.

Deze visie op de ontwikkeling van de analyse wordt geconcretiseerd in de volgende onderdelen, maar ook in de algemene doelstellingen voor analyse die hierop volgen. Deze doelstellingen moeten als een rode draad doorheen die ontwikkeling lopen en moeten voortdurend aandacht krijgen. Doelstellingen AN1 en AN2 plaatsen begripsvorming en –formulering en probleemaanpak centraal in de gehele wiskundevorming. Doelstellingen AN3 en AN4 leggen zowel het manuele rekenwerk als het gebruik van ICT vast, waarbij de klemtoon ligt op een verantwoord gebruik van beide.

KERNDOELSTELLINGEN

AN1	Een definitie formuleren voor begrippen uit de analyse en de samenhang met hun gebruik in toepassingen aangeven.		7
AN2	Met behulp van de beschikbare analysekennis problemen wiskundig modelleren en oplossen.		10
AN3	Bij het oplossen van vergelijkingen of ongelijkheden, het omvormen van functievoorschriften, het berekenen van afgeleiden of integralen op een verantwoorde wijze gebruik maken van rekenregels, formules en manuele rekentechnieken.		11
AN4	Bij het onderzoeken van functies, het oplossen van vergelijkingen of ongelijkheden, bij berekeningen van afgeleiden en integralen en bij het oplossen van problemen die geformuleerd zijn met functies, op een verantwoorde wijze gebruik maken van ICT-middelen.	31 32	12

5.2.1.1 PRECALCULUS

1 BASISEIGENSCHAPPEN VAN FUNCTIES, VEELTERMFUNCTIES, RATIONALE EN IRRATIONALE FUNCTIES

KERNDOELSTELLINGEN

AN5	Op een grafiek van een functie - eventuele symmetrieën, - het stijgen, dalen of constant zijn, - het teken, - de eventuele nulpunten, - de eventuele extrema aflezen.	14	
AN6	Bij concrete problemen die te herleiden zijn tot een aspect van een veeltermfunctie, rationale functie of irrationale functie de wiskundige vertaling maken en het probleem met ICT oplossen.	3 6 9 31 32	12
AN7	Delingen van veeltermen uitvoeren.		1
AN8	Voor geschikte domeinen een verband leggen tussen de functies $f(x)=x^2$ en $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=x^3$ en $g(x)=\sqrt[3]{x}$ en naar analogie tussen de functies $f(x)=x^n$ en $g(x)=\sqrt[n]{x}$.	23	

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de tweede graad maakten de leerlingen al kennis met de kenmerken van grafieken van functies. Nu wordt dit onderzoek uitgebreid naar nieuwe functies. In contexten kunnen de voorschriften in deze fase nog gegeven worden, eenvoudige voorschriften leren de leerlingen zelf al opstellen.

Bij de tweede doelstelling ligt de klemtoon op het vertalen van het concrete probleem naar een wiskundig probleem, dus op het opstellen van functievoorschriften en inzien welke karakteristiek van de functie gevraagd wordt. De concrete oplossing van de wiskundige vertaling zal in de meeste gevallen met ICT gebeuren. Het concrete manuele rekenwerk wordt in ieder geval beperkt.

Het is niet nodig een volledige studie van de klassen van functies te maken. Het volstaat dat de leerlingen kennismaken met enkele karakteristieken van deze functies: asymptoot, beperkt domein, beperkt bereik, ... Bij praktische problemen leidt de context vaak tot een beperkt domein, zodat de praktische speciale waarden niet noodzakelijk overeenkomen met de wiskundige waarden (bijv. een maximum aan de rand van het domein als het wiskundige maximum buiten het praktische domein valt).

De functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $f(x) = \sqrt[3]{x}$ zijn al aan bod gekomen in de tweede graad. De leerlingen moeten nu inzien dat de grafieken van inverse functies mekaars spiegelbeeld zijn t.o.v. de eerste bissectrice, eventueel na beperking van het domein.

In leerweg vier van de tweede graad is de deling van veeltermen nog niet aan bod gekomen. Het heeft geen zin dit hier systematisch in te oefenen. Het volstaat dat leerlingen de betekenis van de deling van veeltermen inzien. Een zinvolle toepassing is de bepaling van schuine asymptoten bij rationale functies. In voorbeelden kan de reststelling (bij deling door $x - a$) geïllustreerd worden.

VERDIEPING

AN9	Uit de grafiek van een functie met voorschrift f(x) de grafiek van de functies met voorschrift $f(x)+k$, $f(x+k)$, $k.f(x)$ en $f(k.x)$ grafisch opbouwen.
AN10	Kenmerken van (eenvoudige) samengestelde functies afleiden uit de kenmerken van de functies waaruit de functie is samengesteld.

Het transformeren van grafieken is in leerweg vijf al aan bod gekomen in het vierde jaar. Ook in de derde graad kan dit aan bod komen: bij homografische functies, bij exponentiële functies, bij goniometrische functies. Het is niet noodzakelijk dat dit bij alle klassen functies systematisch gebeurt, maar wel dat de leerlingen hier in het algemeen mee vertrouwd zijn.

In hoofdzaak onderzoekt men het samenstellen van een eerstegraadsfunctie met functies van de vorm $f(x) = x^n$, $f(x) = \sqrt{x}$ en $f(x) = \frac{1}{x}$. Men legt hierbij het verband tussen de kenmerken van de samengestelde functie en deze van de functies waaruit ze is samengesteld.

U	**UITBREIDING**
AU1	De invloed op het functievoorschrift onderzoeken bij het verschuiven van een assenstelsel.
AU2	Bewerkingen uitvoeren op voorschriften van rationale functies.
AU3	Irrationale vergelijkingen oplossen die gevormd worden door een som van een eerstegraadsvorm en een elementaire irrationale vorm.
	In de wiskunde tracht men het voorschrift van een functie in zijn meest eenvoudige vorm te noteren. *Verschuiven van assenstelsels* is hierbij een hulpmiddel. Zo kan men aantonen dat elke eerstegraadsfunctie kan herleid worden naar de vorm $f(x) = ax$, elke tweedegraadsfunctie naar de vorm $f(x) = ax^2$, elke homografische functie naar de vorm $f(x)=\frac{a}{x}$ en elke functie van de vorm $f(x)=\sqrt{ax+b}$ naar de vorm $f(x)=\sqrt{ax}$. Het verband met het verschuiven van een assenstelsel ligt hier voor de hand. Het heeft weinig zin nog veel tijd te spenderen aan het verwerven van automatismen in kale rekenopgaven over het *rekenen met rationale en irrationale functies*. In de praktijk zal het rekenwerk toch uitgevoerd worden met behulp van ICT. Maar bij het gebruik van ICT kan het voorkomen dat het voorschrift van een rationale functie niet in zijn meest eenvoudige vorm wordt weergegeven. Daarom is het zinvol dat leerlingen op een minimale wijze leren met zulke voorschriften om te gaan. Er moet

wel op gewaakt worden dat dit rekenwerk zinvol blijft en dat men niet vervalt in onverantwoord en onnuttig rekenwerk.

Met elementaire irrationale functies worden irrationale functies met wortelexponent twee bedoeld waarvan de graad van de vorm onder het wortelteken hoogstens twee is. Bij het oplossen van *irrationale vergelijkingen* vormen de bestaans- en de kwadrateringsvoorwaarden een belangrijke inperking van de oplossingen. Uit deze voorwaarden wordt het interval afgeleid waarin de oplossingen moeten voorkomen. Een andere mogelijkheid is dat de irrationale vergelijking wordt opgelost zonder stil te staan bij de nodige voorwaarden. Hier kan een grafische interpretatie van de opgave verduidelijkend werken. De leerlingen kunnen inzien dat door kwadrateren in de nieuwe voorstelling extra oplossingen optreden, die geen oplossing zijn van het oorspronkelijke probleem. Er moet nagegaan worden of de bekomen oplossingen voldoen aan de gegeven vergelijking. Wanneer een oplossing niet voldoet aan de gegeven vergelijking is het wel belangrijk dat de vraag gesteld wordt naar de oorzaak, naar het waarom daarvan. En zo komt men terug op de bestaans- en kwadrateringsvoorwaarden. Ook hier ligt de klemtoon echter op het verwerven van het inzicht in dergelijk type vergelijkingen, dan wel op de automatisering van een onnuttige rekentechniek. Men zal zich dus beperken tot rekentechnisch beperkte opgaven.

2 EXPONENTIËLE EN LOGARITMISCHE FUNCTIES

KERNDOELSTELLINGEN

AN11	De betekenis van de uitdrukking a^b, met $a > 0$ en b rationaal, uitleggen.	21	
AN12	Exponentiële groeiprocessen onderzoeken en daarbij gebruik maken van de begrippen beginwaarde, groeifactor en groeipercentage.	25	
AN13	De grafiek van de functie $f(x) = b.a^x$ tekenen en domein, bereik, bijzondere waarden, stijgen/dalen en asymptotisch gedrag van de grafiek aflezen en beschrijven.	22 24	
AN14	Het verband tussen de functies $f(x) = a^x$ en $f(x) = {}^a\log(x)$ bespreken aan de hand van grafieken en tabellen.	23	
AN15	Bij grafieken van functies van de vorm $f(x) = b.a^x$ en $f(x) = {}^a\log(x)$ het voorschrift bepalen.		
AN16	Basiseigenschappen van logaritmen bewijzen.		
AN17	Eigenschappen van exponenten en logaritmen gebruiken in berekeningen.		11
AN18	Vergelijkingen en ongelijkheden vanuit exponentiële en logaritmische functies oplossen.	24	11
AN19	Vraagstukken en problemen, die vertaald kunnen worden naar problemen i.v.m. exponentiële en logaritmische functies, oplossen en exponentiële en logaritmische functies gebruiken als modellen.	3 6 9 31 32	6 10 11 12

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De betekenis van a^b met $a > 0$ en b rationaal kan voor de studie van exponentiële groeiprocessen aangebracht worden, maar kan er ook in geïntegreerd worden. Met behulp van tabellen van exponentiële functies kan men aantonen dat de rekenregels voor machten met gehele exponenten blijven gelden voor machten met rationale exponenten.

Om de belangrijkste kenmerken van exponentiële groei (exponentiële functies) aan te brengen is het zinvol deze groeiprocessen te vergelijken met lineaire groeiprocessen, die in de tweede graad behandeld zijn. Geschikte contexten voor exponentiële functies zijn: samengestelde interest, radioactief verval, magnitude van aardschokken, kiemverspreiding bij besmettelijke ziekten, geluidsintensiteiten, …

Van de leerlingen mag verwacht worden dat ze de basisfuncties $f(x) = b.a^x$ en $f(x) = {}^a\log(x)$ kunnen schetsen zonder berekeningen te maken en dat ze hierbij aandacht hebben voor de essentiële kenmerken.

Het begrip *logaritme* wordt gedefinieerd als de macht die je aan een grondtal moet geven om een ander getal uit te komen. Steunend op deze definitie zijn de bewijzen van de eigenschappen van logaritmen niet zo moeilijk. Een aantal eigenschappen wordt als basis aangebracht: logaritme van een product (en daarmee samenhangend quotiënt en macht) en de verandering van grondtal. In een context komt de hoofdeigenschap van logaritmische functies vaak op een natuurlijke manier naar voor: bij een exponentiële groei komt de som van de tijden die nodig zijn om een grootheid achtereenvolgens te verviervoudigen en te vervijfvoudigen overeen met de tijd nodig om die grootheid te vertwintigvoudigen: ${}^a\log 4 + {}^a\log 5 = {}^a\log 20$.

Het inoefenen van rekentechnieken moet beperkt worden. Een goede grens zijn de berekeningen die voorkomen in concrete problemen.

Bij het oplossen van problemen kunnen de leerlingen een functievoorschrift, een vergelijking of een ongelijkheid opstellen en gebruik maken van tabellen en grafieken om functievoorschriften, vergelijkingen en ongelijkheden te interpreteren. Begrippen die hierbij aan bod kunnen komen zijn: de halveringstijd (bijv. bij radioactief verval) en verdubbelingstijd.

Heel wat verschijnselen kunnen benaderd worden door een exponentiële groei. De exponentiële functie wordt dan als model voor de bestudering van dit verschijnsel gebruikt (groei van een populatie, evolutie van het aantal ziektegevallen bij een epidemie, afname van de waarde van een gebruiksvoorwerp, …). Achteraf moet het model dan zeker geëvalueerd en soms ook gerelativeerd worden.

De studie van exponentiële functies kan ook een gelegenheid zijn om het onderscheid tussen rationale en reële getallen te verdiepen. Zo kan er opgemerkt worden dan bijv. $2^{\sqrt{2}}$ nu betekenis heeft gekregen.

U	**UITBREIDING: LOGARITMISCHE SCHAAL**
AU4	Logaritmische schalen en logaritmisch papier gebruiken.
	In wetenschappen wordt vaak met *logaritmische schalen* en logaritmisch papier gewerkt. Logaritmische schalen worden gebruikt als de verhoudingen van wat men op een as uitzet belangrijk zijn. Logaritmisch papier speelt een belangrijke rol bij het opstellen van het voorschrift van een functie als model voor een tabel cijfergegevens. Blijken de uitgezette punten bij benadering op een rechte te liggen, dan past bij deze gegevens een exponentieel, logaritmisch of machtsfunctiemodel, naargelang van het soort papier. Dit onderwerp kan toegepast worden in fysica, biologie, aardrijkskunde, …. Leerlingen kunnen dit ook als onderzoeksopdracht zelf uitwerken.

3 GONIOMETRISCHE FUNCTIES

KERNDOELSTELLINGEN

AN20	Het verband leggen tussen graden en radialen.	26
AN21	De grafieken van $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ en $f(x) = \tan x$ tekenen.	27
AN22	Domein, bereik, periodiciteit, stijgen/dalen, extrema van de functies $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ en $f(x) = \tan x$ aflezen van de grafieken en beschrijven.	28
AN23	De grafiek van een functie met voorschrift $f(x) = a{\cdot}\sin(b(x+c))+d$ schetsen en de in-	29

	vloed van de parameters uitleggen.		
AN24	Uit de grafiek van een algemene sinusfunctie het voorschrift afleiden en de algemene sinusfunctie gebruiken als model.	6	
AN25	De begrippen amplitude, evenwichtsstand, faseverschuiving en periode gebruiken bij een periodiek verschijnsel.	9	
AN26	Vergelijkingen van de vorm $a \cdot \sin(b(x+c))+d = e$ oplossen.	30	11 12
AN27	Ongelijkheden van de vorm $a \cdot \sin(b(x+c))+d \leq e$ (of > e) oplossen.		11 12
AN28	Problemen oplossen waarbij gebruik gemaakt wordt van een goniometrisch verband, o.m. over periodieke verschijnselen die beschreven worden met een algemene sinusfunctie.	3 6 31 32	6 11 12
AN29	Som- en verschilformules, verdubbelingsformules en formules van Simpson gebruiken om goniometrische uitdrukkingen te vereenvoudigen, vergelijkingen op te lossen en eenvoudige identiteiten te bewijzen.		11

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de tweede graad hebben de leerlingen driehoeksmeting bestudeerd met sinus, cosinus en tangens van hoeken (in een driehoek). Als dat niet eerder aan bod is gekomen, moet eerst het hoekbegrip uitgebreid worden. Nadat de stap van hoek naar reëel getal is gemaakt, door de radiaal als hoekeenheid te kiezen, kunnen de goniometrische functies als reële functies gedefinieerd worden.

Bij de studie van de functies zal ruim aandacht besteed worden aan het kenmerkende van deze functies: de periodiciteit. Er zijn heel wat betekenisvolle situaties waaruit de grafiek en de belangrijkste eigenschappen afgeleid kunnen worden: de schroef van een vliegtuig, een draaiend rad, …

De grafiek van $f(x) = a \cdot \sin(b(x+c))+d$ wordt stapsgewijs afgeleid uit de grafiek van $f(x) = \sin x$ en hierbij zal de rol van de parameters aangegeven worden. Hier kan bijv. het verschil tussen sin2*x* en 2sin*x* geïllustreerd worden.

Bij het oplossen van problemen kunnen de leerlingen een functievoorschrift, een vergelijking of een ongelijkheid opstellen en gebruik maken van tabellen en grafieken om functievoorschriften, vergelijkingen en ongelijkheden te interpreteren. Enkele voorbeelden van periodieke verschijnselen die kunnen bestudeerd worden zijn: getijden, debiet bij het in- en uitademen, de gemiddelde dagtemperatuur, cirkelvormige bewegingen, de harmonische trilling, …

Bij het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden is een illustratie op de grafiek of de goniometrische cirkel aangewezen om alle oplossingen te bepalen.

Met behulp van grafieken en concrete cijfervoorbeelden zien de leerlingen in dat de sinus niet lineair is. (Bijv. de grafieken van $\sin x + \sin 2x$ en sin3*x* zijn niet gelijk, $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}$ is niet gelijk aan $\sin\pi$.) Vervolgens kan de somformule bewezen worden vanuit de afstandsformule tussen twee punten. De andere formules kunnen daaruit afgeleid worden. Het is niet nodig alle formules te bewijzen en te laten memoriseren. Verderop kunnen de leerlingen gebruik maken van een formularium.

De moeilijkheidsgraad van de oefeningen zal beperkt gehouden worden. Het is aangewezen te zoeken naar zinvolle berekeningen: bijv. de grafiek van $f(x) = \sin x + \cos x$ lijkt een algemene sinusfunctie te zijn, toon dit aan.

Het oplossen van vergelijkingen waarbij formules gebruikt worden, kan ook uitgesteld worden tot de studie van het verloop van functies met afgeleide.

VERDIEPING

AN30	De graf ieken van de standaard cyclometrische functies tekenen, het verloop beschrijven en het verband met sinx, cosx en tanx bespreken.

Bij de functies $f(x)=\sqrt{x}$ en $f(x)=\sqrt[3]{x}$ kwam al aan bod dat de grafieken van inverse functies mekaars spiegelbeeld zijn t.o.v. de eerste bissectrice, eventueel na beperking van het domein. Ook het zoeken naar inverse functies voor de goniometrische functies leidt ertoe dat de invertering maar mogelijk is mits bijkomende voorwaarden op het domein. Voor de grafiek van de cyclometrische functies zal men gebruik maken van het verband dat bestaat tussen de grafieken van twee inverse functies in een orthonormaal assenstelsel.

De behandeling van de cyclometrische functies kan ook gebeuren bij de studie van de afgeleiden van inverse functies.

5.2.1.2 AFGELEIDEN EN INTEGRALEN

ALGEMENE INLEIDING

Bij deze onderdelen zijn er verschillende mogelijkheden voor de volgorde en de didactische aanpak. Voor de studie van afgeleiden en limieten is de spiraalaanpak bekend. Bij veeltermfuncties maken de leerlingen kennis met de betekenis van een afgeleide. De berekeningen zijn nog eenvoudig, maar toepassingen zoals vraagstukken over extrema worden al behandeld. Ingewikkeldere rekenregels komen pas aan bod bij die functies waar ze nuttig voor zijn. Het voordeel van deze aanpak is dat er meer aandacht kan gaan naar de betekenis en de toepassingen van afgeleiden. Op dat moment hoeft men zich in die eerste fase bij toepassingen niet meer te beperken tot veeltermfuncties. Als de leerlingen de afgeleide niet rechtstreeks kunnen berekenen, kunnen ze gebruik maken van ICT.

De studie van integralen komt meestal na de studie van de afgeleiden binnen de verschillende klassen van functies. Het is mogelijk dit begrip in de ontwikkeling van de spiraallijn in te passen. Men bestudeert dan in de eerste fase zowel afgeleide als integralen van veeltermfuncties. Het voordeel van deze aanpak is dat het begrip integraal meermaals terugkeert in de derde graad. Een ander voordeel is dat het begrip dan tijdig gevormd is zodat het bruikbaar is in andere vakken, bijv. fysica.

Het valt zeker te overwegen om vooraf het onderdeel *Rijen* uit *Discrete wiskunde* te behandelen. Hierin maken de leerlingen kennis met limietprocessen en met het begrip ‘oneindig’ bij discrete processen.

KERNDOELSTELLINGEN

AN31	De afgeleide gebruiken als maat voor de ogenblikkelijke verandering van een functie en met behulp van een intuïtief begrip van limiet het verband leggen tussen het begrip afgeleide, het begrip differentiequotiënt en de richting van de raaklijn aan de grafiek.	15	7
AN32	Het begrip afgeleide herkennen in situaties binnen en buiten de wiskunde.	19	7
AN33	De eerste en tweede afgeleide van functies berekenen en ze in concrete situaties gebruiken.	16 17	8 11 12
AN34	Extremumproblemen wiskundig modelleren en oplossen.	20	10
AN35	Het verloop van een functie onderzoeken, in het bijzonder voor veeltermfuncties en rationale, irrationale, goniometrische, exponentiële en logaritmische functies, met beperking van de moeilijkheidsgraad.	18	6
AN36	De formule voor de afgeleide van enkele basisfuncties bewijzen.		
AN37	Limieten van functies bepalen en het asymptotisch gedrag van een functie onderzoeken.		7

AN38	Het verband leggen tussen het begrip bepaalde integraal en de oppervlakte tussen de grafiek van een functie en de horizontale as.		7
AN39	Het begrip bepaalde integraal herkennen in situaties binnen en buiten de wiskunde.		7 9
AN40	De bepaalde en de onbepaalde integraal van functies berekenen en ze in concrete situaties gebruiken.		9
AN41	Het verband leggen tussen de begrippen bepaalde integraal en primitieve functie.		

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De theoretische volgorde is eerst limieten en dan afgeleiden, omdat het begrip limiet gebruikt wordt in de definitie van het begrip afgeleide. Men staat voor een keuze, want anderzijds heeft men, om de betekenis van het begrip afgeleide te begrijpen, geen formele limietdefinitie en rekentechnieken voor het berekenen van limieten nodig. Een intuïtief begrip van limiet volstaat. Dat limietbegrip kan vrij eenvoudig ontstaan vanuit een aantal tabellen van functiewaarden waarbij de idee van (het dubbel en geconditioneerd) ‘naderen naar’ wordt ingebouwd.

Ook bij deze leerlingen kan dus gestart worden met afgeleiden zonder een lang verdiepend hoofdstuk over limieten ter voorbereiding. Zo komt het begrip afgeleide meteen aan bod. Ook in andere vakken kan men dan sneller over het begrip afgeleide beschikken. Verdere wiskundige verfijningen kunnen later besproken worden bij ingewikkeldere functies. Precies de ‘intuïtievere aannames’ uit voorgaand proces kunnen vanuit een wiskundig kritische ingesteldheid de aanleiding zijn om dit achteraf grondiger te onderzoeken.

Het begrip *afgeleide* is een rijk begrip. De afgeleide geeft de ogenblikkelijke verandering van een functie in een punt. Het is de limiet van een gemiddelde verandering. Opdat dit begrip ook voor leerlingen een rijke inhoud zou hebben en ze het kunnen toepassen in concrete situaties, is het zinvol dit begrip in verschillende contexten aan te brengen (helling van een berg (kromme), ogenblikkelijke snelheid, marginale kosten, …).

Met behulp van de afgeleide kan men ook de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van een functie opstellen. Dit kan gebruikt worden om functies te benaderen door een eerstegraadsfunctie.

Om de afgeleide functie en eigenschappen van de afgeleide aan te brengen kan men gebruik maken van applets. Om bijv. het verband tussen de grafiek van een functie en de afgeleide functie te illustreren, bestaan er dynamische applets waarbij op de grafiek van een functie de raaklijnen worden getekend en in een tweede grafiek de hellingen van de raaklijnen worden uitgezet. Ook de betekenis van de tweede afgeleide kan op basis van grafieken ontdekt worden.

Met behulp van ICT kunnen de leerlingen de afgeleide van basisfuncties ontdekken. Het is niet nodig alle formules voor de afgeleide van basisfuncties en de rekenregels te bewijzen, enkele volstaan als illustratie. In sommige gevallen kunnen de bewijzen het inzicht in de functies en de betekenis van afgeleiden verdiepen.

Bij het oplossen van *extremumproblemen* zal men voldoende aandacht besteden aan het opstellen van het functievoorschrift en het modelleren van het probleem. Men heeft daarbij ook aandacht voor het praktische domein en voor de evaluatie van de berekende oplossing. Bij zulke problemen kan men gebruik maken van ICT om het probleem rekentechnisch op te lossen, maar ook om zich in te werken in de context via tabellen en grafieken. Bij heel wat van zulke problemen zijn er voorstellingen te maken met een dynamisch meetkundeprogramma. Vaak helpt dit ook om een goede veranderlijke te kiezen.

Met de ICT-hulpmiddelen die er bestaan, is het niet zinvol meer om eerst alle *kenmerken van de grafiek* van een functie te berekenen om daaruit de grafiek af te leiden. Eventueel kunnen voor een beperkt aantal functies het voorschrift en de resultaten van de berekeningen gegeven worden, zodat de leerlingen leren om deze informatie samen te vatten in een grafiek. Vaak kunnen de resultaten van berekeningen grafisch gecontroleerd worden met ICT. De vraag kan ook omgekeerd gesteld worden: ‘Welke grafiek kan passen bij de gegeven grafieken van de eerste en tweede afgeleide, bij de gegeven limieten?’ In ieder geval zal de complexiteit van de berekeningen beperkt worden.

Bij de afgeleide van exponentiële functies komt het getal e aan bod.

Een diepgaandere fundering van het begrip *limiet* kan aansluiten bij het onderdeel Rijen uit *Discrete wiskunde*. Bij het berekenen van limieten heeft het geen zin volledigheid na te streven. Het is belangrijk dat de leerlingen bij de berekeningen ook grafieken gebruiken en grafisch en numeriek nadenken (bijv. delen door een heel groot getal, …). Dit numeriek denken helpt bijv. om in te zien, dat bij het berekenen van limieten van rationale functies in oneindig de hoogstegraadstermen van teller en noemer een belangrijke rol vervullen (door het opstellen van een tabel met stijgende x-waarden waarbij de verschillende termen van de teller en noemer afzonderlijk berekend worden en waaruit blijkt dat enkel de hoogstegraadstermen het eindresultaat bepalen).

De *bepaalde integraal* kan aangebracht worden als georiënteerde oppervlakte via limiet van onder- en bovensommen. De berekeningen voor groter wordend aantal deelintervallen kunnen met applets gebeuren. Dit kan de begripsvorming en het ontdekken van eigenschappen ondersteunen. De notatie van onder- en bovensommen is dan een verklaring voor het integraalsymbool.

Men kan echter aan de hand van concrete contexten laten inzien dat sommige problemen (afgelegde weg berekenen als de snelheidsfunctie gekend is, volume berekenen als het debiet bekend is, …) te herleiden zijn tot het bepalen van de oppervlakte met een teken tussen de grafiek van een functie en de horizontale as. Die georiënteerde oppervlakte krijgt dan de naam ‘bepaalde integraal’. Het voordeel is dat het begrip integraal onmiddellijk in andere contexten een betekenis heeft. In deze fase worden integralen dan niet gedefinieerd, maar wel berekend als limiet van een rij benaderingen met rechthoekjes (sommen van oppervlakten van rechthoekjes). In beide gevallen kunnen de sommen helpen om verderop in te zien dat een probleem op te lossen is door een integraal te berekenen. In ieder geval zal men in de beginfase voldoende aandacht besteden aan de begripsvorming en de mogelijke toepassingen.

Vervolgens wordt het verband tussen de oorspronkelijke functie en de bepaalde integraal met veranderlijke bovengrens geïllustreerd. Dit kan door bijv. bij een eerstegraadsfunctie de oppervlaktefunctie te vergelijken met de functie zelf of door de expliciete (eerdere) betekenisgeving in een contextsituatie (enerzijds is de snelheidsfunctie de afgeleide van de afgelegde weg, anderzijds is de functie die de afgelegde weg geeft te vinden als oppervlakte onder de snelheidsfunctie). Het verband wordt bewezen. Dit brengt de leerlingen bij de berekeningsmethode van bepaalde integralen met behulp van *primitieve functies* en bij het begrip onbepaalde integraal. De verklaring kan gebruik maken van de betekenis van de bepaalde integraal als georiënteerde oppervlakte:

als $c < a < b$ en $I(x) = \int_c^x f(t)dt = F(x) + c$, dan is $\int_a^b f(t)dt = I(b) - I(a) = F(b) + \cancel{c} - F(a) - \cancel{c}$.

Deze stelling vormt een motivatie om primitieven te leren berekenen. Dit kan in een eerste fase beperkt blijven tot primitieven van veeltermfuncties.

Bij toepassingen kan gebruik gemaakt worden van ICT om de bepaalde integralen te berekenen. Het is trouwens belangrijk dat de leerlingen beseffen dat veel integralen niet te berekenen zijn met een primitieve functie. Heel wat toepassingen kunnen dus al aan bod komen voor de integratietechnieken behandeld zijn.

Toepassingen op bepaalde integralen zijn onder meer oppervlakteberekeningen: de betekenis van de bepaalde integraal wordt gebruikt om de oppervlakte van willekeurige delen van het vlak te berekenen. Andere toepassingen zijn het berekenen van gemiddelde functiewaarde over een interval, inhouden, …. Ook in de fysica zijn er veel toepassingen: snelheid uit versnelling, afgelegde weg uit snelheid, volume uit debiet, arbeid uit kracht. Men zal de toepassingen kiezen in functie van de studierichting. In de economie worden integralen gebruikt om sommen te benaderen. Vaak zal de numerieke benadering van een probleem (benaderen met een som) aangeven dat het probleem met integralen is op te lossen. O.m. daarom is het zinvol om als *uitbreiding* enkele numerieke benaderingsmethoden te bekijken.

Het is de bedoeling dat de leerlingen een aantal integratietechnieken leren gebruiken. De volgende *integratietechnieken* worden behandeld: splitsen van integralen, substitutiemethode en partiële integratie. In ieder geval zal men de moeilijkheidsgraad beperken. Het belang van primitieven ligt vooral in het oplossen van differentiaalvergelijkingen, waarbij het belangrijk kan zijn om het functievoorschrift van een algemene oplossing te kennen.

VERDIEPING

AN42	Een aantal begrippen (zoals limiet, afgeleide) formeler definiëren en hun samenhang bespreken met eigenschappen.
AN43	De middelwaardestellingen van Rolle en Lagrange illustreren en toepassen.
AN44	Het begrip ‘oneigenlijke integraal’ illustreren en toepassen.

De middelwaardestellingen van Rolle en Lagrange geven een dieper inzicht in het gebruik van het begrip afgeleide bij functieonderzoek. Men kan deze stellingen aan de hand van voorbeelden illustreren, maar men kan ze ook bewijzen. Zij vinden o.a. hun toepassing in het opstellen van de formules voor het bepalen van een booglengte, het bepalen van de manteloppervlakte bij een omwentelingslichaam en voor het bewijs van de regel van de l’Hospital (zie verder uitbreiding).

Bij een aantal problemen heeft men te maken met integralen waarbij minstens één van de grenzen oneindig is of waarbij de integrand oneindig wordt in het integratie-interval. In dat geval spreekt men van een oneigenlijke integraal. Ze wordt berekend met behulp van een limiet. Als deze limiet eindig is, dan spreekt men van een convergente oneigenlijke integraal. In het andere geval spreekt men van een divergente oneigenlijke integraal.

U	UITBREIDING
AU5	De regel van de l’Hospital toepassen bij het bepalen van limieten.
AU6	De integraal van een rationale functie bepalen steunend op het splitsen in partieelbreuken.
AU7	Het begrip integraal gebruiken bij het bepalen van manteloppervlakten en booglengten.
	De *regel van de l’Hospital* is een handig middel om van bepaalde functies de limiet eenvoudig te berekenen. De belangrijkheid van deze regel is echter binnen de ICT-mogelijkheden sterk afgezwakt. Het *splitsen in partieelbreuken* bij het integreren van rationale functies kan behandeld worden om het principe duidelijk te maken, maar zeker zonder te vervallen in te ingewikkelde berekeningen. In de praktijk zal men toch, als men vanuit opdrachten tot dergelijke integralen komt, ICT-hulpmiddelen gebruiken om de integraal zelf op te lossen.

U	UITBREIDING
AU8	Bij een probleem, met de middelen van de analyse, een model opstellen en dat gebruiken om het probleem op te lossen.
	De leerlingen beschikken nu over een uitgebreid instrumentarium binnen de analyse en over de nodige probleemoplossende vaardigheden. Als afsluiting van dit deel kunnen ze in het kader van een onderzoeksopdracht het aanwenden hiervan diepgaander gaan beheersen door eens een ruimer probleem aan te pakken, waarvan de oplossing niet meteen voor de hand ligt. Een mogelijkheid daartoe wordt bijvoorbeeld geboden door wat in de les behandeld werd voor oppervlakten en inhouden ten opzichte van de eerste coördinaatas zelfstandig uit te werken voor situaties gekoppeld aan de tweede coördinaatas (bijv. inhoud bij wenteling rond de y-as). Men kan hier uiteraard ook meer praktische problemen aan bod brengen.

5.2.1.3 KEUZEONDERWERPEN

K	DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN
	Voor het oplossen van een probleem (bijv. uit de wetenschappen) hebben de leerlingen vaak een beroep gedaan op functies die een wiskundig model weergeven van het – rechtstreeks - verband tussen de variabelen die in de context voorkomen. Heel wat wetmatigheden beschrijven echter geen rechtstreeks verband tussen grootheden, maar een verband tussen de verandering van de grootheid en andere grootheden, m.a.w. ze geven het verband tussen de afgeleide van de grootheid (al dan niet naar de tijd) en deze of andere grootheden. Dergelijke verbanden kunnen gesteld worden in de vorm van differentiaalvergelijkingen. De oplossingen daarvan zijn functies. Differentiaalvergelijkingen zijn vaak mooie voorbeelden van wiskundige modellen. Drie fasen komen duidelijk tot uiting: - het opstellen van de differentiaalvergelijking als model voor een ‘veranderende’ situatie, - het technisch oplossen (numeriek, grafisch of exact), - het interpreteren van de oplossing(en), met daarbij het bespreken van de rol van de beginsituatie. Differentiaalvergelijkingen vormen een belangrijke toepassing van wiskunde in de fysica. Fysische modellen worden vaak geformuleerd als differentiaalvergelijkingen (de tweede wet van Newton, radioactief verval, de afkoelingswet van Newton, de wetten van Maxwell, …). Vaak legt een differentiaalvergelijking uit waar een (moeilijke) functie die een situatie beschrijft vandaan komt (logistische groei, valweg van een parachute, …). De functies zijn oplossingen van differentiaalvergelijkingen die direct vertalingen zijn van eenvoudige modellen of fysische wetten. Differentiaalvergelijkingen bieden een andere kijk op enkele standaardfuncties en eigenschappen van deze functies (e^x is de functie die voldoet aan $y' = y$, $\sin x$ en $\cos x$ aan $y'' = -y$, …). De nieuwe technologie laat toe om aspecten van differentiaalvergelijkingen te behandelen zonder veel aandacht te besteden aan rekentechnieken. Aanbeveling aantal lestijden: ca. 10.
DV1	In een model, het verband tussen de verandering van een variabele en de optredende variabelen weergeven door een differentiaalvergelijking.
DV2	Eenvoudige differentiaalvergelijkingen oplossen.
DV3	Vraagstukken oplossen waarbij differentiaalvergelijkingen gebruikt worden.
	De leerlingen hebben het begrip afgeleide gebruikt als maat voor een ogenblikkelijke verandering. Een aanknopingspunt vormt de exponentiële groei, waarbij de groei van de populatie evenredig is met de populatie zelf. Dat leidt tot het opstellen van een zogenaamd dynamisch model voor de exponentiële groei van de populatie ($f' = k.f$). De studie van differentiaalvergelijkingen kan eventueel aansluiten op een studie van differentievergelijkingen in discrete wiskunde. Maar het kan ook omgekeerd, eerst de differentiaalvergelijkingen en dan de discrete tegenhanger. Op deze wijze maken de leerlingen kennis met vergelijkingen van de vorm: $g(x, y', y'', ...) = 0$, die informatie geven over de verandering van een grootheid. Dan wordt duidelijk dat het vastleggen van de grootheid zelf met haar functievoorschrift prioritair is. Dat wordt oplossing van de differentiaalvergelijking genoemd wordt. Het hoofddoel van dit thema is praktische problemen oplossen met behulp van differentiaalvergelijkingen. Het volstaat dus enkele methodes voor te stellen voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen met beperking van orde en graad. Aandacht zal ook besteed worden aan de soorten oplossingen zoals algemene, particuliere en singuliere oplossing. In praktische toepassingen zijn we meestal aan voorwaarden gebonden zoals de beginsituatie van waarnemingen, bijzondere waarden van de afhankelijke veranderlijke voor gegeven onafhankelijke veranderlijken. Door verrekening van deze

randvoorwaarden kunnen een aantal integratieconstanten gevonden worden die toelaten die particuliere oplossing te bekomen die aan het probleem beantwoordt.

De techniek voor het vinden van een veld van lijnelementen is ook nuttig om de integraalkrommen van de differentiaalvergelijking te voorspellen. Aangepaste software werkt hier ondersteunend.

Voorbeelden van situaties die leiden tot de oplossing van een differentiaalvergelijking kunnen zijn:
- positiebepaling van een puntmassa die in het luchtledige valt van op een hoogte h;
- snelheid van een parachutist na het opengaan van zijn valscherm;
- berekening van de ontsnappingssnelheid van een verticaal afgeschoten projectiel van op de aarde;
- vraagstukken over exponentiële groei;
- ontlading van een condensator;
- berekening van de tijd die een afgevuurde kogel aflegt door een hoop zand indien de afremming van de kogel gelijk is aan de vierkantswortel van de indringsnelheid bij gegeven indringsnelheid;
- prooi- en roofdiermodel;
- absorptie van licht dat een glasplaat binnendringt;
- temperatuuraanpassing van een voorwerp aan de omgevingstemperatuur;
- afnamesnelheid van radioactiviteit.

K	**CONVERGENTIE VAN EEN REEKS**
	De bedoeling van Taylor- en Maclaurinreeksen is om functies te benaderen door veeltermfuncties. Een concrete toepassing hiervan zijn computers en rekenmachines. Deze berekenen willekeurige functiewaarden, alhoewel zij in wezen enkel de elementaire bewerkingen optellen en vermenigvuldigen kennen. De reeksen van Taylor en Maclaurin zijn wel niet de methoden die bij deze toestellen gebruikt worden, maar een aanzet daartoe. Aanbeveling aantal lestijden: ca. 10.
CR1	De convergentie van een reeks onderzoeken en gebruiken in toepassingen.
CR2	De formule van Taylor en Maclaurin gebruiken om een functie te benaderen door een veeltermfunctie.

De leerlingen zijn vertrouwd met ‘som van een eindig aantal termen’. Een situatie waarbij de som van een oneindig aantal termen berekend werd kwam bij een meetkundige rij voor.

Onmiddellijk rijst de vraag of deze ‘som‘ bestaat (cf. onderdeel rijen). Veralgemening hiervan leidt tot het begrip reeks, en gebruikmakend van de rij van partieelsommen, tot de convergentie. Het is niet de bedoeling systematisch de convergentie van reeksen te onderzoeken maar wel een bondig overzicht te geven van de convergentie van een aantal bekende reeksen (rekenkundige, meetkundige, harmonische, ...) door gebruikmaking van een beperkt aantal convergentiemethodes. Belangrijk is eerder deze resultaten toe te passen in een aantal vraagstukken die verbonden zijn aan (convergentie) van reeksen (lengte netwerk in een driehoek, in een vierkant, lengte kantige spiraal in een vierkant, verdelen papierstrook enz.).

Uitgaande van gepaste voorbeelden kan de stelling van Taylor plausibel gemaakt worden. De raaklijn aan de grafiek in een punt kan namelijk gebruikt worden om waarden te benaderen van de functie in een kleine omgeving van het punt. Immers, in deze omgeving zullen de functiewaarden en alsook de eerste afgeleide van de functie en van de raaklijnfunctie gelijk zijn. De vraag kan gesteld worden of het mogelijk is een benadering voor de functie van de tweede (…, nde) graad op te stellen, zodat de functiewaarde, de eerste, de tweede (…, de nde) afgeleide gelijk zijn. Met deze voorwaarden kunnen de formules van Taylor afgeleid worden (voor het specifieke geval van een benadering rond 0 is dit de formule van Maclaurin).

De Maclaurinbenaderingen voor de gekende elementaire functies kunnen opgesteld worden. Hiermee

	kunnen benaderde waarden van functies in bepaalde punten berekend worden (bijvoorbeeld het getal e en het getal π). Ook kan het verband gelegd worden met de stelling van Lagrange i.v.m.afgeleiden. Het bestaan van de restterm wordt hierdoor geïllustreerd. Met behulp van ICT is het mogelijk om de grafieken van de functies en haar opeenvolgende Maclaurinbenaderingen uit te tekenen. Zo zien we dat de intervallen waarvoor de benaderingen goed zijn voor de meeste elementaire functies groter worden bij grotere waarden van n. Voor $f(x) = \ln(1+x)$ blijkt de benadering slechts te convergeren in een beperkt interval. Om het convergentiegebied van de reeksen te bepalen kan gebruik gemaakt worden van het convergentiekenmerk van d'Alembert. Dit kan bewezen worden of geïllustreerd worden met behulp van de convergentie van meetkundige reeksen. Om dit kenmerk toe te passen moet dan eerst de algemene term van de verschillende reeksen opgesteld worden. Hierna kunnen leerlingen dan het convergentiegebied van de verschillende reeksen berekenen. Bij $f(x) = \ln(1+x)$ zien ze dat dit inderdaad beperkt is tot het gebied waarvoor $\lvert x \rvert < 1$, hetgeen grafisch ook opgemerkt werd. Eventueel kan de reeks van $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$ berekend worden. Deze zal wel voor elke x, van het domein convergeren en hiermee kan dan de neperiaanse logaritme berekend worden van een willekeurig getal. Indien de leerlingen over enige programmeerervaring beschikken kunnen zij een programma schrijven dat de waarde van een functie benadert door gebruik te maken van de reeksontwikkeling. Enkele numerieke berekeningen, zoals $\cos(1+10^{-24}) - \cos 1$, met ICT laten uitvoeren onderstrepen de begrensdheid van de rekenmachine en illustreren een oplossing hiervoor door gebruik te maken van de Taylor- en Maclaurinformule. Andere mogelijke toepassingen zijn vergelijkingen zoals $\sin x - \frac{x^2}{2} = 0$ (benaderend) oplossen, door $\sin x$ te vervangen door een aantal termen van haar Maclaurinformule. Vergelijken met ICT-oplossingen blijft nodig.

K	**NUMERIEKE METHODEN**
	In een tijdperk van computers en programmeerbare rekenmachines is het belangrijk te beschikken over een aantal numerieke methodes om een aantal wiskundige grootheden te berekenen. Het is daarom interessant om voor de leerlingen een tipje van de numerieke sluier op te lichten en ze te confronteren met een aantal numerieke mechanismen aangepast aan hun kunnen. Daarbij leren ze omgaan met nauwkeurigheid van resultaten als men de vraagstukken aan een concrete context bindt. Een aantal numerieke methodes steunt op een iteratief proces om tot een oplossing te komen. Men start van een giswaarde en men past herhaaldelijk dezelfde werkwijze toe totdat de verkregen waarde de vooropgestelde nauwkeurigheid bereikt. Naast de zuiver wiskundige aspecten van de methodes, kan men aandacht besteden aan de programmatische aspecten van de methodes. Dit kan aanleiding geven tot een zelfstandig werk waarbij de leerlingen een bepaalde methode moeten programmeren. Aanbeveling aantal lestijden: ca. 10.
NM1	In concrete situaties, numerieke methodes toepassen om de oplossingen van vergelijkingen te vinden.
NM2	In praktijkvoorbeelden de afgeleide in een punt numeriek bepalen.
NM3	In concrete situaties, toepassingen in verband met integralen numeriek berekenen.

De klassieke methodes om een oplossing van een vergelijking te vinden zijn:

- de methode van de intervalmiddens,
- de methode van de regula falsi,
- de methode van Newton.

Er bestaat ook een zogenoemde methode van de dekpunten (iteratiemethode). Deze bestaat erin om de vergelijking zo om te vormen, dat het zoeken van de oplossing herleid wordt tot het zoeken van het dekpunt van een iteratief proces. Bij deze methode kan de wijze van het omvormen van de vergelijking tot merkwaardige resultaten leiden.

Ook dient de aandacht gevestigd te worden op het feit dat deze methoden altijd maar een oplossing geven van de vergelijking terwijl er misschien meerdere zijn.

Het kan interessant zijn om de verschillende methodes op hetzelfde voorbeeld toe te passen. Daarmee kan aangegeven worden dat de snelheid waarmee de verschillende methodes tot de oplossing convergeren nogal kan uiteen liggen. Het ligt zeker niet in de bedoeling om hier aan een streng wiskundig convergentieonderzoek te doen. Het is er hem om te doen dat de leerlingen beseffen dat de keuze van de methode nogal wat gevolgen kan hebben. Waakzaamheid blijft de boodschap.

De leerlingen moeten ook beseffen dat het hier niet gaat om wondermiddelen. Er kunnen zich situaties voordoen waarbij geen oplossingen gevonden worden met de gebruikte methode, terwijl de vergelijking wel duidelijk oplossingen heeft.

Numerieke differentiatiemethodes zijn belangrijk wanneer we naar concrete situaties overgaan. Deze concrete situaties worden meestal beschreven vanuit discrete data (waarnemingsgetallen bijvoorbeeld) en niet onmiddellijk door een functievoorschrift.

Bijvoorbeeld: we gooien een voorwerp omhoog of we laten een voorwerp vallen dan kunnen we met een bepaalde eenvoud de hoogte bepalen op geregelde tijdstippen. Wanneer we nu beschikkend over deze data, een idee willen krijgen over de snelheid (en zijn evolutie in de tijd) dan komen we met de analytische methoden voor het berekenen van afgeleiden niet ver. We moeten dit op een andere manier aanpakken. Het kan ook zijn dat de analytische methode wel bestaat maar veel te omslachtig is om tot een oplossing te komen dan is de numerieke afgeleide de redder in nood.

Bij de numerieke methodes voor integratie, vermelden we graag:

- de methode van de intervalmiddens,
- de trapeziumregel,
- de methode van Simpson.

Ook hier kan dezelfde opmerking, zoals bij de numerieke differentiatie, gemaakt worden. Met goed gekozen voorbeelden kunnen de voor- en de nadelen van de verschillende methodes aangegeven worden. Een praktische toepassing zou kunnen zijn: de leerlingen krijgen een willekeurig omwentelingslichaam en een schuifmaat. Er wordt gevraagd naar de inhoud van dat omwentelingslichaam. Daarna kan het bekomen resultaat proefondervindelijk gecontroleerd worden. Indien het mogelijk is, zou men ook kunnen proberen om een voorschrift van een functie te zoeken die door de door meten verkregen punten gaat en pogen ofwel manueel ofwel met behulp van ICT de integraal te berekenen. Hierdoor komen de leerlingen tot het besef dat er voldoende meetgegevens moeten zijn. Hoe meer meetgegevens hoe groter de nauwkeurigheid wordt.

5.2.2 DISCRETE WISKUNDE

INLEIDING

In de discrete wiskunde worden discrete structuren bestudeerd. Deze bestaan uit los van elkaar te beschouwen elementen waartussen allerlei relaties kunnen bestaan. Dit in tegenstelling tot de continue wiskunde van de differentiaal- en integraalrekening. Een van de voornaamste toepassingsgebieden van de discrete wiskunde is de informatica.

Tot het domein van de discrete wiskunde behoren o.a.
- telproblemen en combinatoriek,
- rijen,
- grafentheorie,
- algebraïsche structuren,
- verzamelingen en relaties.

BEGINSITUATIE

Bepaalde wiskundige onderwerpen die tot de discrete wiskunde mogen worden gerekend en die de leerlingen reeds kennen zijn:
- de telproblemen in het tweede jaar van de tweede graad;
- de studie van de rekenkundige en meetkundige rijen voor de leerlingen van leerweg vijf in het tweede jaar van de tweede graad.

In de tweede graad is ‘rijen’ een onderdeel van het leerplan voor leerweg vijf, maar niet voor leerweg vier. Zo hebben de leerlingen uit leerweg vijf al kennis gemaakt met enkele notaties en begrippen i.v.m. rijen (algemene term, expliciet en recursief voorschrift, gebruik van indices, …). Met deze verschillende beginsituaties moet rekening worden gehouden.

Binnen dit leerplan worden volgende onderwerpen uitgewerkt als leerinhouden:
- Rijen en dynamische processen;
- Combinatoriek en telproblemen.

Deze onderwerpen kunnen afzonderlijk of geïntegreerd (bijv. dynamische processen in de analyse) worden behandeld.

5.2.2.1 RIJEN EN DYNAMISCHE PROCESSEN

KERNDOELSTELLINGEN

DI1	De convergentie of divergentie van een rij met voorbeelden illustreren.		
DI2	Limieten van eenvoudige rijen bepalen.		
DI3	Problemen met betrekking tot discrete veranderingsprocessen wiskundig modelleren en oplossen.		18

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Een doelstelling van dit onderdeel is de leerlingen te confronteren met het fenomeen ‘oneindig’, dat een essentieel begrip is in de analyse. Leerlingen ontmoeten in dit onderdeel situaties waarin ze een idee krijgen over de subtiliteit van het begrip oneindig en waarin ze tevens leren hoe er toch wiskundig over geredeneerd kan worden. Aan de hand van enkele klassieke paradoxen (o.a. van Zeno) en probleempjes over oneindige processen en oneindige sommen kan de convergentie van rijen op een informele manier onderzocht worden. De leerlingen maken hierbij kennis met aspecten van oneindig bij discrete processen, bijv. ‘een strikt stijgende rij gaat niet altijd naar oneindig’. Het discrete aspect maakt de moeilijkheden i.v.m. oneindig groot en oneindig klein en oneindige processen toegankelijker. Hiervan kan gebruik gemaakt worden bij de studie van functies.

Het is niet de bedoeling dit onderwerp diepgaand te bestuderen. Het gaat om een eerste kennismaking met deze ‘nieuwe’ ontwikkelingen in de wiskunde. Het is aan de leerkracht om de keuze te maken in welk onderdeel van de wiskunde deze doelstellingen gerealiseerd worden, bijv. als afzonderlijk hoofdstuk voor limieten, geïntegreerd in de analyse bij het bepalen van nulpunten of bij complexe getallen.

We gaan nu uitvoeriger in op enkele mogelijkheden.

- Bij een numerieke methode voor het berekenen van de nulpunten van een functie worden via een recursief voorschrift een rij van getallen gegenereerd. Als het recursief proces onbeperkt herhaald wordt kan de vraag gesteld worden of deze rij getallen convergeert naar een zekere waarde (het te zoeken nulpunt).
- Bij de studie van de complexe getallen kan men als uitbreiding dieper ingaan op fractalen. Bij de baan van de grafische weergave van een rij complexe getallen, gegenereerd via een recursief voorschrift, merkt men dat sommige punten naar oneindig evolueren en andere punten ‘aangetrokken’ worden tot een zekere limietstand.
- Als voorbeeld van discrete veranderingsprocessen kunnen problemen bestudeerd worden, die leiden tot lineaire recursievergelijkingen (met constante coëfficiënten en constant rechterlid). Dit zijn vergelijkingen van de vorm $t_n = a \cdot t_{n-1} + b$, met a en b getallen. Zulke recursievergelijkingen zijn vrij eenvoudig op te lossen, ze beschrijven rijen van de vorm $t_n = C \cdot a^n + \frac{b}{1-a}$ en hebben een grafiek die voor leerlingen toegankelijk is.

  Bovendien zijn er nogal verschillende mogelijkheden voor het verloop, naargelang de waarde van a en C. Een concreet voorbeeld van zulke rij: je neemt 5 ml van een geneesmiddel in, na 6 uur blijft daar nog 50 % van over in je lichaam, dan neem je een nieuwe slok, … De hoeveelheid geneesmiddel na n tijdseenheden van 6 uur voldoet dan aan de recursievergelijking $t_n = 0{,}5 \cdot t_{n-1} + 5$.
- Elke recursievergelijking is ook om te zetten in een differentievergelijking. De differentie van een rij wordt gedefinieerd door $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$. Een voorbeeld van een differentievergelijking is $\Delta t_n = 0{,}5 t_{n-1} + 2$ (elk tijdsinterval komt er de helft bij van wat er al was en nog een vaste hoeveelheid 2). Als je de differentie uitwerkt, krijg je $t_n = 1{,}5 \cdot t_{n-1} + 2$. De convergentie van zulke rijen kan grafisch onderzocht worden met ICT waarbij men bijv. ook gebruik kan maken van webdiagrammen. Het numeriek oplossen van differentiaalvergelijkingen gebeurt ook door er differentievergelijkingen van te maken.

5.2.2.2 KEUZEONDERWERP

K	ITERATIE
	Iteratie is een proces dat niet alleen in de wiskunde voorkomt. Ook in onze alledaagse handelingen kunnen we iteraties ontdekken: bijvoorbeeld het in vieren plooien van een brief. De filmwereld maakt soms gebruik van iteratie: bij een opname wordt een TV opgenomen, waarop de uitzending te zien is, zodat het TV-scherm wordt weergegeven in het TV-scherm van het TV-scherm enz. Iteratie is een onderdeel dat aansluit bij rijen. Zo kunnen rijen met een recursief voorschrift opgebouwd worden door middel van iteratie. Iteratie vindt zijn oorsprong in de studie van dynamische systemen. Zulk systeem heeft een input en een output. Om de evolutie in de tijd van het systeem te onderzoeken en te bestuderen, zal de verkregen output als nieuwe input aangeboden worden aan het systeem en dit een aantal keren na elkaar. Dit is een iteratie. Het systeem kan evolueren naar een stationaire toestand (dekpunt), kan springen tussen een aantal toestanden (periode) of kan uit zijn voegen barsten (blijven toenemen of afnemen). Een stationaire toestand kan nog twee verschijningsvormen kennen: aantrekkend of afstotend. Dit is te vergelijken met de fysische toestand ‘evenwicht’ waar men spreekt van stabiel (aantrekkend, terugkerend naar zijn oorspronkelijke toestand) en labiel (afstotend, niet terugkerend naar zijn oorspronkelijke toestand) evenwicht.

	Toepassingen van iteratie kunnen in verschillende situaties voorkomen. - Het herhaaldelijk verschalen van een figuur in de meetkunde. - Het herhaaldelijk toepassen van dezelfde groep transformaties. - Met een rekenmachine kan men bijvoorbeeld de vierkantswortel van een getal nemen en daarna de vierkantswortel van het resultaat en dat blijven herhalen. - De studie van de evolutie van populaties. - Benaderingsmethodes voor nulpunten van functies. - Het bepalen van oplossingen voor vergelijkingen of stelsels van vergelijkingen. - Meetkundige en rekenkundige rijen. - De oplossing van het probleem van de toren van Hanoi. Een aantal toepassingen kan als onderzoeksopdracht worden uitgewerkt. Aanbeveling aantal lestijden: ca. 10.
IT1	De begrippen baan en dekpunt illustreren bij eenvoudige voorbeelden.
IT2	De dekpunten van een iteratie bepalen.
IT3	Het belang van de startwaarde voor de baan bij een iteratie illustreren met een voorbeeld.
IT4	Soorten banen en dekpunten bij een iteratief proces onderscheiden met behulp van ICT-middelen.
IT5	Het verschil tussen een aantrekkend of afstotend karakter van een dekpunt illustreren.
IT6	De periodiciteit van een baan onderzoeken.
IT7	Vraagstukken in verband met iteraties oplossen.
	Het is de bedoeling dat de leerlingen in eenvoudige voorbeelden, zowel grafisch als algebraïsch, de dekpunten kunnen afleiden. De leerlingen moeten de baan van een iteratief proces kunnen aangeven. De startwaarde van een iteratief proces is belangrijk voor het verdere verloop of gedrag van het iteratief proces. De baan en de dekpunten kunnen nogal verschillen. Dat wordt geïllustreerd door startwaarden (beginwaarden) van het proces te veranderen en te kijken naar het verloop van het proces. Daartoe kan gebruik gemaakt worden van tabellen en grafieken. Een webdiagram is een grafische voorstelling die gebruikt wordt bij het bestuderen van de soorten banen en voor het opsporen van dekpunten. Om een webdiagram te construeren, kan het best ICT gebruikt worden. Het is een eenvoudig maar belangrijk hulpinstrument. Het is leerrijk om het webdiagram van eenvoudige iteraties te bestuderen waarbij zoveel mogelijk verschillende situaties optreden. Met behulp van tabellen en/of webdiagrammen kan besloten worden of een dekpunt aantrekkend of afstotend van karakter is. Daarbij worden zeer kleine afwijkingen genomen ten opzichte van het dekpunt en wordt de baan beschreven met die waarden als startwaarde. Komt de baan na enige iteraties terug op het dekpunt dan spreekt men van aantrekkend. Vlucht de baan weg van het dekpunt dan is het dekpunt afstotend. De periodiciteit van een baan is het aantal iteraties dat moet uitgevoerd worden opdat een waarde op zichzelf wordt afgebeeld. De baan die zo ontstaat wordt een periodieke baan of cyclus genoemd. Bij het maken van vraagstukken is het niet de bedoeling om alleen de nadruk te leggen bij het rekentechnisch aspect van iteraties. Er kunnen vele vragen gesteld worden rond grafieken en tabellen zonder dat er daarbij veel rekenwerk nodig is. In de praktijk komen in vele gebieden iteratieve processen voor. Iteraties in de wiskunde kunnen ook meetkundig van aard zijn, bijv. het genereren van fractalen. Het ligt voor de hand dat niet alle iteratieve processen aanleiding geven tot eenvoudige berekeningen. Bij meetkundige iteraties kunnen een aantal voorbeelden praktisch gerealiseerd worden door de leerlingen. Eventueel kunnen eenvoudige voorbeelden, onder begeleiding geprogrammeerd worden op een grafische rekenmachine of computer.

5.2.2.3 TELPROBLEMEN

BEGINSITUATIE

In de tweede graad losten de leerlingen reeds eenvoudige telproblemen op door ze voor te stellen met een boomdiagram, venndiagram of een ander schema.

KERNDOELSTELLINGEN

DI4	Systematisch mogelijkheden tellen in situaties waarin herhalingen zijn toegestaan en in situaties waarin herhalingen niet voorkomen.		18
DI5	Het binomium van Newton en de relaties in de driehoek van Pascal gebruiken.		1

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De belangrijkste doelstelling blijft dat leerlingen leren telproblemen systematisch aan te pakken. De bedoeling daarbij is het oplossen van de problemen, die weliswaar hoger liggen dan deze die behandeld werden in de tweede graad. Leerlingen kunnen nog altijd gebruik maken van een boomdiagram, een wegendiagram of een venndiagram. Maar wanneer het aantal gevallen toeneemt is een visuele voorstelling van de mogelijke gevallen niet altijd mogelijk. Hier kan het classificeren van problemen en het invoeren van formules helpen. De begrippen variatie, permutatie en combinatie worden hiervoor ingevoerd.
Bij experimenten met twee uitkomsten wordt de band met de driehoek van Pascal en de bijhorende roostervoorstelling gelegd. Het verband tussen de driehoek van Pascal en het binomium van Newton is een mooie toepassing. Men kan overwegen het bewijs van deze formule te geven, en daarbij kan aandacht besteed worden aan de idee van een bewijs door inductie.

5.2.3 ALGEBRA

ALGEMENE INLEIDING

De didactische opbouw van de algebra kunnen we zoals aangegeven in *3 Algemene pedagogisch-didactische wenken* ordenen rond vier kerngedachten: de *betekenis* van de begrippen, de *berekeningen*, de *fundamenten* en de *toepassingen*.

Als begrippen wordt vooral aandacht besteed aan complex getal en matrix.

- Het begrip *complex getal* ontstaat als een abstracte maar handige uitbreiding van het gekende rekenen met getallen. Een aantal situaties, zowel binnen als buiten de wiskunde, die met reële getallen niet beschrijfbaar zijn, krijgen een elegante oplossing, die past in het stramien van de getallenverzamelingen.
- Bij het *matrixbegrip* gaat het om geordende blokken getallen die als geheel worden beschouwd, en waarmee ook in hun geheel bewerkingen kunnen worden uitgevoerd.

Met deze nieuwe 'getal'concepten kunnen *berekeningen* uitgevoerd worden. De berekeningen kunnen manueel gebeuren of door middel van ICT. Zowel bij complexe getallen als bij matrices moet aandacht besteed worden aan de definities van de bewerkingen en aan de rekenregels. Er bestaat weliswaar een verregaande analogie met deze bij reële getallen, maar voor het eerst worden leerlingen geconfronteerd met niet-evidente werkwijzen (bijv. de vermenigvuldiging bij matrices) en het niet voldaan zijn aan vertrouwde eigenschappen zoals de commutativiteit.

Deze vaststellingen kunnen er toe leiden dat aandacht besteed wordt aan een meer fundamentele studie van de bewerkingen en theoretische precisering van het kader van de rekenregels. Leerlingen moeten inzien dat het mogelijk is met complexe getallen en matrices te rekenen als met meer abstracte wiskundige objecten. Dat kan onder meer door vergelijking van een aantal fundamentele eigenschappen van bewerkingen en die te ordenen om een beter inzicht te verwerven in de samenhang. Zo worden ze geconfronteerd met een belangrijke stap in het wiskundig denken, met name dat een abstractieproces niet alleen kan gebeuren vanuit contextsituaties naar wiskundige modellen, maar dat ook wiskundige situaties verder geabstraheerd kunnen worden.

De concepten worden *toegepast* om bepaalde situaties te modelleren en/of te mathematiseren, waarbij een betekenisvolle weg gevolgd wordt:

5.2.3.1 COMPLEXE GETALLEN

KERNDOELSTELLINGEN

AL1	De definitie van een complex getal geven.		
AL2	Complexe getallen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.		2
AL3	Een complex getal meetkundig voorstellen.		2
AL4	Tweedegraadsvergelijkingen in één complexe onbekende oplossen.		3
AL5	De goniometrische vorm van een complex getal bepalen.		2
AL6	Twee complexe getallen in goniometrische vorm vermenigvuldigen en delen.		2
AL7	De nde macht berekenen van een complex getal, gegeven in zijn goniometrische vorm.		2
AL8	De nde machtswortels uit een complex getal, gegeven in zijn goniometrische vorm, berekenen.		2

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerlingen zijn in de loop van de vorige jaren geconfronteerd met opeenvolgende uitbreidingen van het getalbegrip. Schijnbaar was met het invoeren van de reële getallen die uitbreiding afgewerkt. Nu blijkt dat in bepaalde situaties het gebruik van ‘fictieve’ getallen wiskundige voordelen biedt. Zo is historisch gezien het invoeren van ‘complexe’ getallen gekoppeld aan het oplossen van vergelijkingen van de derde graad. Het rekenen met wortelvormen van negatieve getallen gaf zonder inhoudelijke betekenis toch juiste oplossingen. Een eerste kennismaking met complexe getallen kan via die idee van rekentruc. De problematiek van het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen met negatieve discriminant is een voor de hand liggende aanknoping.

De schrijfwijze $\sqrt{-1}$ is niet vol te houden omdat dit tot foutieve interpretaties leidt van de vertrouwde rekenregels. Het symbool i wordt ingevoerd, zodat voor een complex getal de notatie $a + bi$ ontstaat.

De notatie $a + bi$ voor een complex getal laat toe op zeer eenvoudige wijze met dat getal een koppel reële getallen te associëren en omgekeerd. En deze notatie met koppels reële getallen leidt onmiddellijk tot een voorstelling van complexe getallen in het vlak (voorzien van een euclidisch assenstelsel).

De hoofdbewerkingen met complexe getallen kunnen worden uitgevoerd volgens de rekenregels voor reële getallen, waarbij $i^2 = -1$. De eigenschappen van de optelling en de vermenigvuldiging blijven dezelfde als deze van reële getallen.

Gebruik makend van de voorstelling in het vlak kan een derde schrijfwijze voor een complex getal opgesteld worden. Daarbij moeten, steunend op de associatie met goniometrie en analytische meetkunde (afstandsformule), de begrippen argument en modulus ingevoerd worden.

Met behulp van de goniometrische vorm blijkt de vermenigvuldiging en de deling van complexe getallen vrij eenvoudig te verlopen.

De formule van de Moivre wordt afgeleid. Hiermee kan de nde macht van een complex getal berekend worden. De punten die bij grafische voorstelling overeenstemmend met opeenvolgende machten van een complex getal liggen op een spiraal.

Met behulp van de goniometrische vorm kunnen de nde machtswortels uit een complex getal berekend worden. Uit de berekeningswijze volgt dat een complex getal verschillend van nul steeds n verschillende nde machtswortels heeft. De n verschillende nde machtswortels zijn de hoekpunten van een regelmatige ingeschreven n-hoek en de raakpunten van een regelmatige omgeschreven n-hoek aan een cirkel.

Met behulp van de nde machtswortels kunnen binomiaalvergelijkingen opgelost worden.

U	**UITBREIDING**
CU1	Het verband leggen tussen de bewerkingen met complexe getallen en een meetkundige voorstelling.
CU2	Het aantal en de aard van de oplossingen van een veeltermvergelijking met reële coëfficiënten bepalen met behulp van de stelling van d’Alembert.
	Het optellen van twee complexe getallen, het vermenigvuldigen van een complex getal met een reëel getal en de vermenigvuldiging van twee complexe getallen onderling kan men visualiseren in het complexe vlak. De deelbaarheid van een veelterm met reële coëfficiënten door factoren van het type $x - a$ hangt samen met het bestaan van een nulpunt a van de veelterm. Men kan zich dan afvragen of er wel voor elke veelterm nulpunten bestaan. Wanneer a ook een complex getal kan zijn, kan dit probleem opgelost worden door een beroep te doen op de stelling van d’Alembert, dikwijls de hoofdstelling van de algebra genoemd. Het bewijs van de stelling behoort uiteraard niet tot de leerinhouden. Wel kan hieraan een meer theoretische onderzoeksopdracht gekoppeld worden.

5.2.3.2 KEUZEONDERWERP

K	FRACTALEN
	Dit onderwerp kan deels door de leerlingen via zelfstandige onderzoeksopdrachten verwerkt en gepresenteerd worden. Aanbeveling aantal lestijden: ca. 5.
FR1	Aan de hand van een recursief voorschrift een dynamisch systeem in het complexe vlak beschrijven.
	Op basis van een recursief voorschrift kan de baan van een punt gevolgd worden in het complexe vlak. Dergelijke dynamische systemen leiden tot wonderbaarlijke figuren: fractalen. Zo vertoont bijvoorbeeld de familie van kwadratische functies $Q_c(x) = x^2 + c$, waar c een reële parameter is, een gecompliceerd dynamisch gedrag. De functie Q_c kan toegepast worden op complexe getallen en ook voor de parameter c kan een complex getal gekozen worden. In het dynamisch gedrag van deze complexe kwadraatfunctie overheersen twee soorten van gedrag: punten met modulus kleiner dan 1 itereren naar het dekpunt 0 en punten met modulus groter dan 1 itereren naar oneindig. Dan resteren nog de punten waarvan de modulus precies gelijk is aan 1. Die punten vullen de 'eenheidscirkel' van het complexe vlak op. De verzameling van die punten vormt de zogenaamde *Julia-verzameling* van de functie $T(z) = z^2$.

5.2.3.3 MATRICES EN STELSELS

INLEIDING

Bij de klassieke aanpak van de studie van matrices is het oplossen van stelsels vaak de enige toepassing. Nochtans geven tal van problemen, zowel binnen als buiten de wiskunde, aanleiding tot het werken met matrices bij het mathematiseren. De matrix is dan, zoals bij stelsels, een handige wiskundige notatie voor een tabel met numerieke gegevens. Passende bewerkingen met matrices kunnen dan leiden tot de oplossing van het probleem.

Het verwerken van een probleem met matrices wordt met de beschikbaarheid van ICT heel wat gebruiksvriendelijker. Voor tijdrovende (manuele) berekeningen, bijv. bij bewerkingen met matrices en bij het oplossen van stelsels, levert het gebruik immers heel wat tijdswinst op.

KERNDOELSTELLINGEN

AL9	Met behulp van matrices een concreet probleem modelleren.		4
AL10	Binnen een probleem bewerkingen met matrices uitvoeren: - matrices optellen en aftrekken, - een matrix met een getal vermenigvuldigen, - een matrix transponeren, - matrices vermenigvuldigen, - machten van matrices berekenen.		
AL11	Eigenschappen van de bewerkingen van matrices formuleren en gebruiken bij het rekenen met matrices.		
AL12	Evoluties van blokken gegevens beschrijven met matrices.		4
AL13	De methode van het rijherleiden verklaren en gebruiken voor het oplossen van $m \times n$-stelsels van de eerste graad.		
AL14	Vraagstukken oplossen die te herleiden zijn tot het oplossen van een $m \times n$-stelsel van de eerste graad.		4

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Matrices en bewerkingen met matrices worden ingevoerd vanuit toepassingen. De matrix wordt aangezien als een handige opslagplaats voor een blok gegevens. De bewerkingen beschrijven de samenhang tussen de getalgegevens.

De werkwijze voor optellen van matrices en het product van een reëel getal met een matrix liggen voor de hand. De werkwijze voor het vermenigvuldigen van matrices is niet zo vanzelfsprekend maar kan vanuit gepaste voorbeelden geïllustreerd worden, bijv. uit een gegeven productiematrix van verschillende producten per regio en een gegeven matrix met de winst per product, de totale winst per regio berekenen.

Mogelijke eigenschappen van de bewerkingen komen vanzelfsprekend aan bod vanuit het rekenen met matrices in een context. De meeste eigenschappen kunnen ook vanzelfsprekend vanuit 'theoretisch standpunt' overgedragen worden van het rekenen met getallen op het rekenen met matrices. Bijv. eens duidelijk is hoe je twee matrices optelt, is het evident dat eigenschappen als commutativiteit en associativiteit 'element per element' overgedragen worden. Dat ligt moeilijker bij het vermenigvuldigen van matrices. De associativiteit van het matrixproduct verdient bijzondere aandacht. Omdat het matrixproduct die eigenschap bezit, kan men een eenduidige betekenis geven aan machten van matrices. Bij het onderzoek van de commutativiteit stuiten leerlingen wellicht voor het eerst op een bewerking die de eigenschap niet heeft. Ze worden er ook mee geconfronteerd dat eventuele voorbeelden niet opwegen tegen de tegenvoorbeelden en dat de eigenschap maar geldig is, als ze voor elk matrixproduct opgaat.

Men kan hier intuïtief aandacht besteden aan het begrip inverse van een matrix. Enkele voorbeelden geven aanleiding tot de begrippen eenheidsmatrix en inverse matrix. Een paar goed gekozen (tegen)voorbeelden moeten leerlingen ervan overtuigen dat niet elke matrix een inverse matrix bezit.

De evolutie van blokken gegevens is een interessante toepassing op de klassieke matrixvermenigvuldiging waarvan er veel in een vereenvoudigde vorm in de klas aan bod kunnen komen. Hierbij ligt de klemtoon op het mathematiseren: het vertalen van het concreet probleem en het zoeken naar de juiste wiskundige voorstelling en nodige bewerkingen om het probleem op te lossen. In een aantal gevallen kan een matrix gemakkelijker worden opgesteld nadat het probleem geschematiseerd en gevisualiseerd is met behulp van een pijlenschema of een graaf.

Mogelijke toepassingen op deze evoluties van blokken zijn: de evolutie van het koopgedrag bij een groep consumenten (Markovketens), de evolutie van een populatie dieren (Lesliematrices), het migratiepatroon van de bevolking in een bepaalde regio (migratiematrices) of het aantal wegen tussen bepaalde grootsteden (verbindingsmatrices).

Een andere toepassing van matrices is het oplossen van stelsels. Vooraleer een oplossingsmethode te behandelen, is het nuttig zich de vraag te stellen welke bewerkingen op de vergelijkingen van een gegeven stelsel mogen worden uitgevoerd. De begrippen oplossingenverzameling, gelijkwaardige stelsels en elementaire rijoperatoren worden verklaard.

Nadien kan de methode van rijherleiden worden aangeleerd voor het oplossen van een mxn-stelsel. Het is logisch dat onnodig zwaar rekenwerk met de huidige ICT-mogelijkheden wordt gemeden.

Bij het oplossen van vraagstukken ligt de nadruk op het opstellen van het stelsel en het interpreteren van het gevonden resultaat. Het oplossen van het stelsel gebeurt met behulp van ICT.

VERDIEPING

AL15	Een $m \times n$-stelsel met één parameter bespreken.
AL16	De voorwaarde opstellen waaronder een matrix een inverse matrix heeft.
AL17	De inverse matrix van een reguliere matrix berekenen en de werkwijze gebruiken bij het oplossen van stelsels.

Het bespreken van stelsels kan beperkt worden tot stelsels met één parameter. Het verwerven van het inzicht staat hier centraal o.a. de vraag: wanneer zijn er geen oplossingen, wanneer één, wanneer meerdere. Mogelijke concrete toepassingen vindt men terug in de ruimtemeetkunde of bij eliminatieproblemen.

De deling van matrices is niet gedefinieerd. Wel is het mogelijk in bepaalde gevallen de inverse matrix te berekenen. De methode van het rijherleiden laat ons toe om deze inverse matrix, als hij bestaat, te berekenen. Hieruit zijn ook de voorwaarden voor het bestaan af te leiden. Met behulp van de inverse matrix kan de oplossing van het stelsel AX=B geschreven worden als $X=A^{-1}\cdot B$. Zo kan abstract met oplossingen gerekend worden.

U	**UITBREIDING**
EW1	Een determinant behorend bij een vierkante matrix definiëren en gebruiken in meetkundige toepassingen.
EW3	De eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van een reguliere matrix berekenen.

Het al of niet regulier zijn van een vierkante matrix kan gekarakteriseerd worden aan de hand van één getal: zijn determinant.

Voor de toepassingen van determinanten zal men zich beperken tot deze uit de meetkunde. Ze kunnen wellicht best daar geïntegreerd worden. De onderlinge ligging van rechten en vlakken wordt analytisch bestudeerd door een stelsel van vergelijkingen te onderzoeken. Dikwijls is het niet nodig dit stelsel op te lossen, maar wel de voorwaarden te bepalen voor de coëfficiënten, opdat dit stelsel oplosbaar zou zijn. In sommige gevallen kunnen deze voorwaarden uitgedrukt worden met determinanten.

Voorbeelden van meetkundige situaties die aan bod kunnen komen:
- voorwaarde voor het concurrent zijn van drie rechten,
- voorwaarde voor het collineair zijn van drie punten,
- de oppervlakte van een driehoek,
- de vergelijking van een vlak,
- het coplanair zijn van vier punten.

Het is duidelijk dat men zich zal beperken tot het ontdekken en formuleren van de eigenschappen van determinanten (met beperking van de graad) die nodig zijn voor de meetkundige toepassingen.

De formules van Cramer voor het oplossen van een regulier stelsel kunnen een toepassing zijn op determinanten. Tevens kunnen deze formules gebruikt worden bij het bespreken van $n \times n$-stelsels met één parameter.

Wanneer een evolutie kan beschreven worden aan de hand van matrices, kunnen we ons de vraag stellen: treedt er stabilisatie op? In plaats van de limiet van het evolutieproces te berekenen kunnen we op zoek gaan naar de oplossing van de matrixvergelijking: A.X = X. Deze stabiele situatie X is niets anders dan de eigenvector die hoort bij de eigenwaarde 1.

5.2.3.4 KEUZEONDERWERPEN

K	LINEAIRE PROGRAMMERING
	In de realiteit worden we vaak geconfronteerd met verschillende wegen om een bepaald probleem of situatie te bekijken. Soms zijn we geïnteresseerd in een minimale oplossing (bijv. een minimale kost) of een maximale oplossing (bijv. maximaal rendement of voordeel). De veranderlijken die een rol spelen zijn vaak aan beperkende voorwaarden onderhevig (bijv. een positief aantal, cf. productieaantallen, of een fabriek kan niet meer dan 24 uur per dag open zijn, de capaciteit van een productieketen is beperkt). Dit leidt tot ongelijkheden en/of vergelijkingen. De vraag naar minimale of maximale doelmatigheid leidt tot een 'doelfunctie'. De oplossing is de optimalisering van die functie. De voorwaarden samen maken een stelsel van ongelijkheden en/of vergelijkingen. De oplossing van het stelsel geeft de verzameling van de mogelijkheden aan. Daarvan kan de 'optimale' waarde gezocht worden (met iso-lijnen). Dit onderwerp biedt een aantal mogelijkheden voor onderzoeksopdrachten, bijvoorbeeld bij leerlingen van de studierichting Economie-wiskunde Aanbeveling aantal lestijden: ca. 10.
LP1	Vraagstukken oplossen die leiden tot een ongelijkheid van de eerste graad met één onbekende en de oplossing grafisch voorstellen en/of symbolisch noteren.
LP2	Een ongelijkheid van de eerste graad met twee onbekenden oplossen en de oplossing grafisch voorstellen.
LP3	Een stelsel van twee ongelijkheden van de eerste graad met twee onbekenden oplossen en de oplossing grafisch voorstellen.
LP4	Een eenvoudig probleem op lineair programmeren met twee veranderlijken oplossen.
	Een voorwaarde om problemen van lineaire programmatie te kunnen oplossen is dat de leerlingen ongelijkheden en stelsels van ongelijkheden hebben leren oplossen. De ongelijkheden van de eerste graad met één onbekende werden al behandeld zowel in leerweg vier als in leerweg vijf. Wellicht is een herhaling van de werkwijzen zinvol. Zowel het algebraïsch als het grafisch oplossen kan hierbij aan bod komen. Nieuw is wel het oplossen van ongelijkheden van de eerste graad in twee onbekenden. Daarbij wordt de oplossing ook grafisch voorgesteld in het vlak. Het begrip halfvlak werd voordien nog niet analytisch behandeld. Ook de oplossing van stelsels moet grafisch voorgesteld worden, waarbij de doorsnede van twee halfvlakken aan bod moet komen. Omdat dit onderdeel gericht is op eenvoudige oefeningen op lineaire programmatie kan hier eventueel al een begrenzing aangebracht worden van positieve veranderlijken (cf. realistische situaties zijn allicht met positieve veranderlijken). Het oplossen van een probleem op lineaire programmatie verloopt in een aantal stappen. Achtereenvolgens: - een formule voor de doelfunctie opstellen, - de beperkende voorwaarden omzetten in ongelijkheden (of vergelijkingen), - het toegestane gebied in een assenstelsel aangeven (door middel van het oplossen van het stelsel van ongelijkheden), - het optimum van de doelfunctie berekenen, - de gevonden waarde(n) interpreteren in de context. Zowel voor het oplossen van het stelsel als voor het grafisch voorstellen van de oplossingen kan ICT ingeschakeld worden.

K	FINANCIËLE ALGEBRA
	Financiële algebra is niet alleen een vormend maar ook een belangrijk praktisch onderdeel van de wiskunde. In hun later leven zullen heel wat leerlingen geconfronteerd worden met vormen van beleggen of vormen van lenen. Daarom heeft de studie van financiële algebra zowel een wiskundig als een sociaal-maatschappelijk aspect. Beide aspecten zijn even belangrijk en moeten bijgevolg allebei voldoende aandacht krijgen. Wiskundige begrippen die kunnen toegepast worden zijn o.a. de eerstegraadsfunctie (bijvoorbeeld: enkelvoudige interest), de exponentiële functie (bijvoorbeeld: samengestelde interest, de opeenvolgende aflossingsbestanddelen bij een schuldaflossing met constante annuïteit), meetkundige rij (bijvoorbeeld: kapitaalsvorming), iteratie (bijvoorbeeld: het bepalen van het jaarlijks kostenpercentage bij een consumentenkrediet). Het probleemoplossend denken wordt bevorderd door de leerlingen te confronteren met verschillende praktische situaties. De theoretische kennis mag niet losgekoppeld worden van de realiteit. De leerlingen moeten, als toekomstige consumenten, vaardig worden in het evalueren van het ruime aanbod binnen de financiele wereld. Het is niet mogelijk dat alle bestaande vormen van beleggen en lenen besproken worden. Bovendien ontstaan er voortdurend nieuwe vormen. Het is nodig dat leerlingen zo opgeleid worden dat zij de transfer kunnen maken naar bestaande of nieuwe vormen. Financiële algebra is sterk gebonden aan economische conjunctuur en wetgeving. Bijgevolg moet de leraar zich op de hoogte houden van bijvoorbeeld wijziging van rentevoeten, van roerende voorheffing, van wettelijke regels enz. zodat deze wijzigingen onmiddellijk kunnen opgenomen worden in de lessituatie. Informatie vindt men in de economische bladzijden van dagbladen en tijdschriften, bij de financiële instellingen en op het internet. Met de leerlingen kan besproken worden wat de voor- en nadelen zijn van een zichtrekening, van een spaarrekening, van bepaalde soorten beleggingen (termijnrekening, kasbons, fondsen, ...), wat de gemiddelde kostprijs is van een bouwgrond en van een woning, hoeveel een gezinsinkomen moet bedragen om een bepaalde lening aan te kunnen gaan, of een bepaald goed beter gekocht wordt door middel van een consumentenkrediet of door gebruik te maken van spaargeld, enz. Bij het oplossen van een probleem moeten de leerlingen een goed onderscheid kunnen maken tussen enkelvoudige en samengestelde interest, tussen kapitaalsvorming en schuldaflossing, tussen de aard van de rentevoet (jaarlijks, semestrieel, ...), enz. Bij de keuze van dit onderwerp is overleg met de leraar economie aangewezen. Dit onderwerp biedt een aantal mogelijkheden voor onderzoeksopdrachten, bijvoorbeeld bij leerlingen van de studierichting Economie-wiskunde Aanbeveling aantal lestijden: ca. 20.
FA1	Het verschil uitleggen tussen enkelvoudige en samengestelde interest.
FA2	Een jaarlijkse rentevoet omzetten in een gelijkwaardige maandelijkse, trimestriële of semestriële rentevoet en omgekeerd.
FA3	Een aantal beleggingsvormen vergelijken en het nettorendement ervan berekenen.
FA4	De eindwaarde en het termijnbedrag berekenen bij een postnumerando kapitaalsvorming.
FA5	Het te lenen bedrag en het termijnbedrag berekenen bij een schuldaflossing met dadelijk ingaande annuïteit.
FA6	Het bedrag berekenen dat moet betaald worden als de schuld wordt afgelost voor de eindvervaldag.
FA7	Het termijnbedrag berekenen bij een variabele rentevoet.

FA8	Het verschil uitleggen tussen een lening met constante annuïteit en een lening met constante kapitaalsaflossing.
FA9	Een aflossingstabel interpreteren.
FA10	Uit een reclameaanbieding het soort consumentenkrediet herkennen en de gegevens ervan controleren.
FA11	In verband met de aangeleerde begrippen informatie verzamelen en interpreteren.
FA12	De aangeleerde begrippen kaderen binnen de actuele situatie.

Bij *enkelvoudige en samengestelde interest* kan men uitgaande van de hoofdformules de formules voor het berekenen van beginwaarde, rentevoet en tijd afleiden. Maar het is evengoed mogelijk in de hoofdformule de gegevens in te vullen en de gevraagde parameter te berekenen zoals bij een vergelijking. Belangrijke toepassingen zijn de zichtrekening, de spaarrekening en de termijnrekening. Oefeningen op het berekenen van de netto-interest bij een zichtrekening of een spaarrekening hebben geen zin. Alhoewel er algemene regels zijn voor het bepalen van de valutadata zijn er teveel afwijkingen naargelang de soort verrichting en de financiële instelling. Bij een spaarrekening moet er bovendien rekening worden gehouden met een getrouwheids- en een aangroeipremie. Deze premies zijn ook aan bepaalde voorwaarden verbonden. Dit alles maakt het moeilijk om een juiste interestberekening te laten maken door de leerlingen. Om deze begrippen te illustreren kan men gebruik maken van bankdocumenten zonder dat dit aanleiding moet geven tot berekeningen.

Heel wat aandacht moet besteed worden aan het sociaal-maatschappelijk aspect van *diverse beleggingsvormen* zoals kasbons, verzekeringsbons, fondsen. Hierbij zal voldoende nadruk gelegd worden op de verschillen tussen de beleggingen. Bij het berekenen van het nettorendement moet rekening gehouden worden met de inschrijfkosten en de uitbetalingkosten. Er kan op gewezen worden dat factoren zoals inflatie en mogelijke fiscale mindering invloed hebben op het nettorendement.

Bij toepassingen op *gelijkwaardige rentevoeten* moeten de leerlingen inzien dat afrondingen tot niet te verwaarlozen verschillen kunnen leiden. Men kan er de leerlingen op wijzen dat in de praktijk hierover geen eenduidigheid bestaat.

De studie van de *kapitaalsvorming* d.m.v. periodieke stortingen kan zich beperken tot het bepalen van de eindwaarde en het termijnbedrag. Belangrijker is de studie van de *schuldaflossing*. Het te lenen bedrag komt overeen met de beginwaarde van een kapitaalsvorming. Dit bedrag V kan dan afgeleid worden uit de gelijkheid $V.\,u^n = A_n$ ($u = 1 + i = 1 + \frac{p}{100}$ en A_n is de eindwaarde van een kapitaalsvorming na n perioden). Bij het berekenen van het te lenen bedrag of het termijnbedrag zal men rekening houden met de gelijkwaardige rentevoet als de periodieke stortingen maandelijks, trimestrieel of semestrieel gebeuren. Ook de vraag naar het totaal af te betalen bedrag en het reële bedrag dat men terugbetaalt bij een schuldaflossing kan hier gesteld worden. Leningen met veranderlijke rentevoet komen momenteel veel voor. Daarom is het belangrijk de gevolgen te bestuderen bij een verandering van de rentevoet. Bij het vervroegd terugbetalen van de resterende schuld wordt er een wederbeleggingsvergoeding berekend. Als voor de schuldrest een lagere interestvoet kan bekomen worden kan het interessant zijn de schuldrest om te zetten in een nieuwe lening hetzij bij dezelfde financiële instelling, hetzij bij een andere. Hierbij moet er wel rekening gehouden worden met bijkomende kosten. Bij dezelfde financiële instelling kunnen die kosten zich beperken tot dossierkosten. Wordt de nieuwe lening aangegaan bij een andere financiële instelling dan moet men buiten de wederbeleggingsvergoeding ook rekening houden met o.a. dossierkosten, notariskosten, inschrijvingskosten, e.d.

Bij het interpreteren van *een aflossingsplan* kan men wijzen op het feit dat termijnbedrag kan opgesplitst worden in een aflossingsbestanddeel en een rentebestanddeel evenals dat bij een schuldaflossing met constante annuïteit elk aflossingsbestanddeel gelijk is aan het voorgaande vermenigvuldigd met $u = 1 + i$.

De verschillende soorten *consumentenkrediet* (verkoop op afbetaling, lening op afbetaling, financieringshuur (leasing)) kunnen door voorbeelden geïllustreerd worden. Het begrip maandelijks lasten-

	percentage is niet meer van toepassing. Controle op het juist zijn van de weergegeven getallen in een advertentie kan gebeuren met behulp van de formules: $M=\frac{k.\sqrt[12]{u^n}.(\sqrt[12]{u}-1)}{\sqrt[12]{u^n}-1}$ of $k=\frac{M}{\sqrt[12]{u}-1}.(1-\frac{1}{\sqrt[12]{u^n}})$ met $u=1+\frac{JKP}{100}$, JKP = jaarlijks kostenpercentage, k = contante waarde - (eventueel voorschot), M = de maandelijkse termijn en n = aantal stortingen. (Vergelijk deze formules met deze bij een schuldaflossing). Bij eenvoudige oefeningen is het gebruik van een formularium te verkiezen boven de ingebouwde financiële functies (bijv. in Excel). Het gebruik van ICT is wel nuttig bij het opstellen van een aflossingstabel of voor het onderzoeken van verschillende simulaties zoals bijvoorbeeld: de invloed van een renteverandering bij een lening op de aflossingstabel, het onderscheid tussen verschillende vormen van lening, het virtueel aankopen van een huis, binnen de actuele situatie de meest aangewezen belegging onderzoeken, … Daardoor leren de leerlingen diverse informatiebronnen en -kanalen kritisch selecteren, raadplegen, analyseren en toepassen waardoor voldaan wordt aan een aantal vakoverschrijdende eindtermen i.v.m. leren leren.

K	**GETALTHEORIE**
	In de elementaire getaltheorie worden gehele getallen bestudeerd. Onderwerpen die hierbij aan bod komen zijn o.m. de deelbaarheid van getallen, het onderzoek naar priemgetallen, de ontbinding van getallen in priemfactoren, het modulair rekenen, algoritmes voor het berekenen van de grootste gemeenschappelijke deler, … Vanuit de eerste graad kennen de leerlingen de definitie van een priemgetal en kunnen ze de grootste gemeenschappelijk deler en het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van twee of meer natuurlijke getallen berekenen. Het doel van dit onderdeel is dat de leerlingen een beperkt aantal begrippen en fundamentele eigenschappen uit de getaltheorie onderzoeken, leren bewijzen en hanteren bij het maken van toepassingen. Priemgetallen vormen een belangrijk onderdeel in de getaltheorie en worden vaak gebruikt bij het coderen en beveiligen van digitale informatie. Zo kan dit onderwerp een uitgangspunt zijn voor onderzoeksopdrachten rond digitale codering of cryptografie. Dit onderwerp kan voor leerlingen een eerste kennismaking zijn met een meer rigoureuze wiskunde-aanpak in de getallenleer, met het onderzoeken van vermoedens, het formuleren van eigenschappen en het bewijzen ervan. Als men opteert voor deze meer verdiepende aanpak zal de leraar bij het bewijzen werken op het exactheidsniveau dat het best is aangepast aan de mogelijkheden van de leerlingen. Hoewel dit onderwerp op het eerste gezicht niet eenvoudig is, lenen bepaalde onderdelen ervan zich tot zelfstudie en groepswerk, als de leerlingen kunnen beschikken over voldoende documentatie. Aanbeveling aantal lestijden: ca. 15.
GT1	Aantonen dat er oneindig veel priemgetallen bestaan.
GT2	De stelling van de unieke ontbinding van getallen in priemfactoren formuleren en bewijzen.
GT3	Het algoritme van Euclides voor het bepalen van de grootste gemeenschappelijke deler van twee natuurlijke getallen verantwoorden en toepassen.
GT4	Problemen oplossen met betrekking tot priemgetallen, de grootste gemeenschappelijke deler, het kleinste gemeenschappelijk veelvoud en eigenschappen van de deelbaarheid van gehele getallen.
GT5	De stellingen van Fermat en Wilson formuleren, verantwoorden en toepassen.

Priemgetallen hebben mensen door de eeuwen heen geboeid. De oudste methode om priemgetallen te genereren is de zeef van Erastosthenes. De vraag naar mogelijkheden om te onderzoeken of een getal een priemgetal is of niet kan leiden tot de vraag: hoeveel priemgetallen bestaan er? De stelling van Euclides, die leert dat er oneindig veel priemgetallen zijn, kan bewezen worden. Indien er interesse voor bestaat kan men andere aspecten over de verdeling van de priemgetallen aanbieden: voor elk natuurlijk getal n bestaan er n opeenvolgende getallen die geen priemgetallen zijn, het probleem van de tweelingpriemgetallen dat soms bij codering gebruikt wordt,…. Populaire priemgetallen zijn de Mersennegetallen.

Het algoritme van Euclides steunt op de eigenschap dat $\text{ggd}(a,b) = \text{ggd}(a-b,b)$. Het algoritme laat tevens toe de grootste gemeenschappelijke deler van twee getallen te schrijven als een lineaire combinatie van die twee getallen.

Problemen die aan bod kunnen komen zijn o.m.: het modulorekenen en restklassen die een rol spelen bij codering, het aantal delers van een getal, som en product van de delers van een getal, het veranderen van talstelsel, …

Dit onderwerp kan afgesloten worden met het illustreren, formuleren en eventueel aantonen van enkele traditionele stellingen zoals bijvoorbeeld de kleine stelling van Fermat, de laatste stelling van Fermat, de stelling van Wilson.

Men kan er ook voor kiezen enkele andere toepassingen van de rekenkunde aan bod te brengen, bijv. diofantische vergelijkingen oplossen.

5.2.4 MEETKUNDE

ALGEMENE INLEIDING

Het verplichte onderdeel van de meetkunde van de derde graad bouwt verder op de ruimtemeetkunde. Daarvoor is in de eerste en de tweede graad al een solide basis gelegd, door het voorstellen en onderzoeken van ruimtelijke situaties en het formuleren van eigenschappen die daaruit werden afgeleid. Zoals in de tweede graad zal de vlakke meetkunde evenwel geregeld aan bod komen in ruimtelijke toepassingen, maar ook bij het onderzoeken van mogelijke veralgemeningen van vlakke naar ruimtelijke situaties. In de derde graad worden een aantal nieuwe middelen aangebracht, zodat de leerlingen wezenlijk over drie fundamentele werkwijzen beschikken: een synthetische aanpak, een analytische aanpak en een werkwijze met vectoriële middelen. Door ervaring moeten de leerlingen leren welke aanpak geëigend is in welke situatie.

Bij de didactische opbouw van de ruimtemeetkunde kan weer uitgegaan worden van de vier kernideeën: de *concepten*, de *berekeningen*, de *fundamenten* en de *toepassingen*.

- Als *begrippen* wordt vooral aandacht besteed aan
  - vectoren en coördinaatgetallen voor het bepalen van punten in de ruimte en het beschrijven van ruimtelijke situaties;
  - de onderlinge ligging van rechten, van rechten en vlakken en van vlakken (in hoofdzaak als herhaling uit de tweede graad), aangevuld met de loodrechte stand;
  - de vergelijkingen van rechten en vlakken als beschrijvingsmiddel;
  - de begrippen afstand en hoek in ruimtelijke situaties.
- Met de nieuwe concepten vector en coördinaatgetallen worden uiteraard maar *berekeningen* uitgevoerd in functie van het beschrijven van situaties en oplossen van problemen. Berekeningen op zich hebben hier niet veel zin. Dat rekenen komt op evidente wijze aan bod bij het berekenen van afstanden en hoeken, bij het opstellen van de vergelijking van een vlak, de vergelijkingen van een rechte en bij het oplossen van vergelijkingen, stelsels, …

  Binnen dit deeltje techniciteit hoort wellicht ook het *voorstellen van ruimtelijke situaties*. Hieraan is in de vooropleiding al heel wat aandacht besteed. Dit kan hier uiteraard van dienst zijn, maar deze vaardigheid moet ook degelijk onderhouden worden. Vaak is een goede voorstelling van een ruimtelijk probleem een stap naar de oplossing. Voor de ruimtelijke voorstelling kunnen ICT-hulpmiddelen gebruikt worden. Overigens zullen leerlingen de werkwijze misschien beter kunnen begrijpen, nu vectoren beschikbaar zijn.
- Wat de *fundamenten* betreft is vanuit de tweede graad al de zogenaamde gereedschapskist beschikbaar, waarin belangrijke eigenschappen werden opgenomen in functie van hun gebruik bij het oplossen van meetkundige problemen. Deze reeks eigenschappen kan goedgeordend verder aan bod komen en aangevuld worden met nieuwe eigenschappen. Bij het werken met vectoren en coördinaatgetallen, het vastleggen van zinvolle bewerkingen hiervoor en het onderzoeken en gebruiken van de eigenschappen van deze bewerkingen, stuiten de leerlingen als vanzelfsprekend op het begrip vectorruimte.
- De concepten worden *toegepast* om ruimtelijke situaties te onderzoeken en te modelleren. Ook in de derde graad ligt de klemtoon op het oplossen van meetkundige problemen, o.m. in verband met afstanden, hoeken en loodrechte stand. De leerlingen beschikken hiervoor over een meer synthetische manier van redeneren, die gebruik maakt van de gereedschapskist, of over de nieuwe werkmiddelen, die gebruik maken van vectoren en coördinaten in de ruimte, o.m. vergelijkingen van rechten en vlakken, uitdrukkingen voor afstanden en voor hoeken en voorwaarden voor loodrechte stand.

  De leerlingen beschikken over drie verschillende werkwijzen om bepaalde problemen aan te pakken. Zelf een keuze maken voor de methode vraagt heel wat ervaring. Daarom zal men vele opdrachten uitvoeren, waarbij bij aanvang misschien een wat strakkere leiding zinvol is.

5.2.4.1 RUIMTEMEETKUNDE

BEGINSITUATIE.

In de eerste en tweede graad hebben de leerlingen de onderlinge ligging van rechten en vlakken in concrete ruimtelijke situaties onderzocht en voorgesteld. De eigenschappen werden opgenomen in een ‘gereedschapskist’ en gebruikt om meetkundige problemen op te lossen (zie leerplan wiskunde tweede graad ASO).

KERNDOELSTELLINGEN

ME1	Vectoren en coördinaatgetallen gebruiken om punten te bepalen in de ruimte.		
ME2	De basiseigenschappen van een reële vectorruimte (beperkt tot dimensie twee en drie) formuleren en gebruiken.		5
ME3	Vectoren en coördinaatgetallen en de bewerkingen ervan gebruiken om problemen in ruimtelijke situaties op te lossen.		15
ME4	Eigenschappen over de ligging van rechten en vlakken in de ruimte onderzoeken en formuleren, in het bijzonder - de loodrechte stand van rechten, van een rechte en een vlak en van vlakken - hoeken tussen rechten en tussen vlakken.		13
ME5	Rechten en vlakken door vergelijkingen voorstellen en hun onderlinge ligging bespreken.		13
ME6	Afstanden tussen punten, rechten en vlakken berekenen.		14
ME7	Hoeken tussen rechten, tussen rechten en vlakken en tussen vlakken berekenen.		15
ME8	Meetkundige problemen met diverse hulpmiddelen voorstellen en oplossen.		15

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Het vectorbegrip werd in de eerste graad (georiënteerd lijnstuk bij verschuivingen) ingeleid. In de tweede graad werd in leerweg vijf het begrip vector gedefinieerd, de eigenschappen van de som van twee vectoren en van het product van een vector met een reëel getal onderzocht. Ook werd het vectorbegrip geassocieerd met een koppel coördinaatgetallen. Het is zinvol dit samenvattend te herhalen.

De nodige aandacht moet gaan naar leerlingen die in de tweede graad leerweg vier gevolgd hebben en niet gewerkt hebben met het vectorbegrip in de vlakke meetkunde. Het vectorbegrip moet hier nog opgebouwd worden. Voortbouwend op wat deze leerlingen over ‘verschuiving’ in de eerste graad gezien hebben kan het begrip vector eenvoudig worden aangebracht. Het vectorbegrip en het rekenen hiermee kan ook verbonden worden met technische of fysische toepassingen, die de leerlingen misschien kennen uit andere vakken. Vermits het hoofddoel ruimtemeetkunde is, zullen hier de eigenschappen van de bewerkingen in een sneller tempo aangebracht en geïllustreerd worden. In de ruimte kan men er dan wat meer tijd voor uittrekken.

De herhaling voor de enen, de aanbreng voor de anderen zal leiden tot het samenvatten van de eigenschappen onder de benaming ‘reële vectorruimte met dimensie twee’.

Het vectorbegrip kan nu in de ruimte gedefinieerd worden en opnieuw verbonden worden aan een stel coördinaatgetallen. Het rekenen met deze vectoren en met coördinaatgetallen is analoog als met vectoren en coördinaatgetallen uit de vlakke meetkunde. Ook hier zullen de eigenschappen van de bewerkingen geïllustreerd worden. Het samenvatten van de eigenschappen van de optelling en vermenigvuldiging met een reëel getal leidt tot het begrip ‘reële vectorruimte met dimensie drie’.

Een alternatieve strategie voert het vectorbegrip in vanuit de ruimte om hieruit het vectorbegrip en het rekenen hiermee te (her)ontdekken in de vlakke meetkunde.

Vectoren en coördinaatgetallen zijn nu handige bijkomende middelen om problemen in de ruimte aan te pakken, waarbij begrippen als afstand (nieuwe analoge afstandsformule in de ruimte), loodrechte stand (scalair product) en hoek voorkomen. Door het onderzoeken van deze problemen stuiten de leerlingen op een aantal bijkomende eigenschappen, die kunnen opgenomen worden in de gereedschapskist meetkunde.

Naar analogie met de behandeling van de eigenschappen over evenwijdigheid van rechten en vlakken in de tweede graad, wordt hier aandacht besteed aan een duidelijke verwoording, aan een adequate voorstelling zowel in een ruimtelijke situatie als op een tekening en aan het gebruik ervan in toepassingen. In het kader van het ontwikkelen van redeneervaardigheden kunnen een aantal eigenschappen i.v.m. loodrechte stand bewezen worden.

Rechten en vlakken kunnen met hun vectoriële-, hun parameter- en hun cartesiaanse vergelijkingen beschreven worden. Hierin wordt, zoals in de vlakke meetkunde, een analytische methode aangereikt om een meetkundig probleem op te lossen. Omdat rechten en vlakken ondubbelzinnig bepaald worden door vergelijkingen van de eerste graad, zullen een aantal thema's uit de matrixrekening, zoals het oplossen van stelsels, het al of niet bestaan van oplossingen en eliminatie, een meetkundige toepassing krijgen. Werd - als uitbreiding - in de matrixrekening de determinant aan een vierkante matrix verbonden, dan kan de determinantenvergelijking van een vlak opgesteld worden. Mogelijke toepassingen van de analytische methode zijn o.a.:

- de loodrechte stand van rechten, van vlakken en van rechten en vlakken;
- de gemeenschappelijke loodlijn van twee kruisende rechten;
- de hoek van rechten, van vlakken en van rechten en vlakken;
- het scalair product in de ruimte als alternatief voor het onderzoek van de loodrechte stand.

Het berekenen van allerlei afstanden gebeurt analytisch door gebruik te maken van vergelijkingen van rechten en vlakken en van coördinaten van punten. Ook de loodrechte stand en hoeken krijgen een analytische behandeling.

De leerlingen ervaren snel de kracht van de analytische methode. Ze moeten echter inzien dat ook deze methode haar beperkingen heeft, en dat de 'oude' synthetische aanpak soms een meer aangewezen werkwijze is. Goed gekozen voorbeelden zullen de leerlingen laten inzien dat deze synthetische aanpak een sterk hulpmiddel blijft bij het argumenteren van een bewering. Bij het oplossen van een meetkundig probleem maken de leerlingen dus gebruik van analytische hulpmiddelen, van meetkundige redeneringen en van een schets (al of niet met ICT-hulp) die deze redeneringen en berekeningen ondersteunt.

Didactisch zijn hier zeker mogelijkheden tot groepswerk en kansen voor het verwerven van probleemoplossende vaardigheden. Ook kunnen de leerlingen geconfronteerd worden met diverse oplossingen van eenzelfde probleem en geraken ze zo betrokken bij het leren evalueren van verschillende strategieën. Het occasioneel aanbieden van een probleem uit de vlakke meetkunde vergroot de synthese van het geheel.

Veelvlakken zoals o.a. prisma en piramide, omwentelingslichamen en omwentelingsoppervlakken en het gebruik van formules voor het berekenen van de (zijdelingse) oppervlakte en de inhoud van deze ruimtelijke figuren kunnen in toepassingen aan bod komen. Het opstellen van een aantal van deze formules kan eventueel in de analyse gebeuren als toepassing van de bepaalde integraal.

U	**UITBREIDING**
RU1	De onderlinge ligging van een bol en een rechte en van een bol en een vlak onderzoeken.
RU2	Enkele krommen en oppervlakken (analytisch) beschrijven.
RU3	Transformaties in de ruimte beschrijven.
	Vertrekkend van de afstand tussen twee punten, wordt de vraag gesteld naar de meetkundige plaats van de punten die even ver liggen van een gegeven punt. Dat resulteert in de vergelijking van de bol. Naar analogie aan wat de leerlingen kennen in verband met een raaklijn aan een cirkel, leidt de bespreking van de onderlinge ligging van een vlak en een bol tot het begrip raakvlak aan een bol. Ook kunnen delen van een bol beschreven worden. De formules voor hun oppervlakte en inhoud kunnen ook in de analyse worden opgesteld. Men kan kennis maken met nog andere omwentelingoppervlakken en omwentelingslichamen en hun

toepassingen zoals schotelantennes (paraboloïde), niersteenverbrijzelaars (ellipsoïde) en koeltorens (hyperboloïde). Hier kan eventueel verwezen worden naar het hoofdstuk 'kegelsneden' van de analytische meetkunde.

Als uitbreiding van veelvlakken kunnen Platonische veelvlakken aan bod komen door te focussen op hun historische definitie, hun historische context, hun aantal, hun symmetrie en hun regelmaat. Maar ook het loslaten van deze strikte definitievoorwaarden biedt interessante perspectieven zoals de Catalanveelvlakken en de Archimedische lichamen met als bekendste het patroon van een voetbal. Tevens kan de formule van Euler in verband met het aantal hoekpunten, zijden en ribben van een veelvlak aangehaald worden.

Voortbouwend op wat de leerlingen bestudeerd hebben over de bol kan nu de geodetische koepel of geode bestudeerd worden en de constructie ervan. Voorbeelden uit de kunst, de architectuur en de chemie (fullerenen) illustreren de toepassingen hiervan. Een computertekenprogramma biedt hier vele mogelijkheden om de opbouw van deze constructies actief te begeleiden en te visualiseren, wat ook toelaat deze lichamen vanuit verschillende invalshoeken te bekijken.

De leerlingen kennen reeds parametervergelijkingen van een rechte en een vlak. Ook kegelvlak, bol en cilindervlak kunnen nu beschreven worden met behulp van hun parametervergelijkingen. Eliminatie levert de cartesiaanse vergelijkingen. Cilindercoördinaten en bolcoördinaten vinden hier hun plaats. Deze laatste kunnen in verband gebracht worden met de positie van een punt op de aardbol aan de hand van aardrijkskundige coördinaten.

Ook krommen zoals de schroeflijn (helix) worden met hun parametervergelijkingen beschreven. Hierbij sluit eventueel de voorstelling van oppervlakken en de voorstellingen van functies van twee veranderlijken (met behulp van onderzoek van niveaukrommen) aan.

In de eerste en de tweede graad hebben de leerlingen de begrippen congruentie en gelijkvormigheid en een aantal transformaties (deels als uitbreiding) onderzocht. Deze begrippen kunnen ook in de ruimte aan bod komen. Homothetie, puntspiegeling, vlakspiegeling en rotatie kunnen ingeleid worden met hun voornaamste eigenschappen. Het is evident dat tijdrovende constructies best opgevangen worden door ICT.

5.2.4.2 KEUZEONDERWERPEN

K	ANALYTISCHE MEETKUNDE A
	In de vlakke analytische meetkunde bestuderen de leerlingen krommen door gebruik te maken van hulpmiddelen uit de algebra en de analyse. Dit thema kan beperkt benaderd worden door een studie van meetkundige plaatsen (o.a. basiskegelsneden) te maken (Analytische meetkunde A). In een ruimere benadering van dit thema wordt gebruik gemaakt van eerder abstracte vlakken die aangewend worden om meer ingewikkelde verzamelingen van punten en rechten te bestuderen, zoals een algemene studie van kegelsneden (Analytische meetkunde B). In de tweede graad hebben de leerlingen rechten en parabolen bestudeerd door ze voor te stellen door een vergelijking t.o.v. een gepaste ijk. Ook in de ruimtemeetkunde van de derde graad wordt de onderlinge ligging van rechten en vlakken onderzocht met behulp van hun vergelijkingen. In dit keuzeonderwerp worden vergelijkingen gebruikt om meetkundige plaatsen en krommen te bestuderen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van bekende en nieuwe analytische instrumenten: euclidische ijken, parametervergelijkingen en poolcoördinaten. Aanbeveling aantal lestijden: ca. 30.

AM1	De parabool, ellips en hyperbool als meetkundige plaatsen definiëren en hun eigenschappen gebruiken om meetkundige problemen op te lossen
AM2	Poolcoördinaten gebruiken om krommen voor te stellen.
AM3	Parametervergelijkingen gebruiken om krommen te bestuderen.
AM4	Meetkundige plaatsen en krommen bestuderen door ze voor te stellen door een gepaste vergelijking.
	De drie standaardkegelsneden, alsmede het opstellen van hun vergelijking, kunnen op verschillende wijzen worden opgebouwd: als meetkundige plaatsen door onmiddellijk gebruik te maken van het begrip excentriciteit, of als meetkundige plaatsen waarvan de som/verschil van afstanden tot (de) twee (brand)punten constant is. Definitie en fundamentele eigenschap worden aldus omgewisseld. Het is hier interessant in te gaan op de benaming 'kegelsnede': ellips, hyperbool en parabool zijn snijlijnen van een vlak met een kegel. Ook hun etymologische betekenis en het gebruik van deze begrippen in de omgangstaal kunnen aangehaald worden. Allerhande eigenschappen van de parabool, ellips en hyperbool i.v.m. raaklijnen, normaal, symmetrie, middelpunt, middellijnen, assen en toppen, brandpunten en richtlijnen, worden onderzocht. Het verwerven van deze eigenschappen is ondergeschikt aan het gebruik ervan in toepassingen. Ook zal gewezen worden op concrete toepassingen van deze krommen buiten de wiskunde. Voorstellingen van krommen door uitsluitend een cartesiaanse vergelijking te gebruiken is niet altijd mogelijk. Daarom wordt een nieuw analytisch instrumentarium voorgesteld om krommen voor te stellen: parametervergelijkingen en poolcoördinaten. Het is de bedoeling dat de leerlingen ervaren dat, naast de cartesiaanse vergelijking, de parametervoorstelling van een kromme een alternatieve, en soms meer eenvoudige, methode is om krommen vast te leggen. In eerste instantie kan men op zoek gaan naar de parametervergelijking van gekende krommen: een rechte, een cirkel, een kegelsnede. Naast kegelsneden kunnen ook andere krommen verkregen worden als meetkundige plaatsen. Door een gepaste ijk te kiezen worden de meetkundige voorwaarden die een meetkundige plaats kenmerken, omgezet in een voorwaarde van coördinaten: de vergelijking van de meetkundige plaats. Naast de rechtstreekse methode kan ook aandacht besteed worden aan de methode van de geassocieerde krommen. De techniek van 'eliminatie' uit de algebra krijgt hier een meetkundige toepassing. Bij het zoeken naar een meetkundige plaats is het nuttig, vooraleer de berekeningen uit te voeren (meestal met een symbolisch pakket), de meetkundige plaats te construeren met behulp van een meetkundig computerprogramma. Ook zal een meetkundige plaats geregeld een kegelsnede zijn, die via haar vergelijking niet als dusdanig zal herkend worden door de leerlingen, omdat ze niet geleerd hebben de overgang te maken naar de canonieke vergelijking. ICT biedt hiervoor een oplossing. Men kan illustreren dat sommige krommen heel eenvoudig met hun poolvergelijking worden beschreven: spiraal van Archimedes, conchoïde, lemniscaat, strofoïde, … en dat andere krommen zich beter laten beschrijven via hun parametervergelijkingen, zoals de cycloïde, trochoïde, hypocycloïde, epicycloïde, de cirkelevolvente, Lissajous-figuren.

K	**ANALYTISCHE MEETKUNDE B**
	In de vlakke analytische meetkunde bestuderen de leerlingen krommen door gebruik te maken van hulpmiddelen uit de algebra en de analyse. Dit thema kan beperkt benaderd worden door een studie van meetkundige plaatsen (o.a. basiskegelsneden) te maken (Analytische meetkunde A). In een ruimere benadering van dit thema wordt gebruik gemaakt van eerder abstracte vlakken die aangewend worden om meer ingewikkelde verzamelingen van punten en rechten te bestuderen zoals een algemene studie van kegelsneden (Analytische meetkunde B).

	In deze ruime benadering van analytische meetkunde is de inleiding nagenoeg analoog met deze van het onderwerp *Analytische meetkunde A.* In de tweede graad hebben de leerlingen rechten en parabolen bestudeerd door ze voor te stellen door een vergelijking t.o.v. een gepaste ijk. Ook in de ruimtemeetkunde van de derde graad wordt de onderlinge ligging van rechten en vlakken onderzocht met behulp van hun vergelijkingen. In dit keuzeonderwerp worden ook vergelijkingen gebruikt om meetkundige plaatsen en krommen te bestuderen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van bekende en nieuwe analytische instrumenten: euclidische, affiene en homogene ijken, parametervergelijkingen en poolcoördinaten. Het grote onderscheid met het onderwerp *Analytische meetkunde A* is het gebruik van 'nieuwe vlakken', die weliswaar abstracter van structuur zijn, maar toch belangrijke voordelen bieden. Zo zal het algebraïsch rekenwerk dikwijls vlotter verlopen omdat rekenen met complexe getallen gebruikt wordt en omdat de ijk beter aan de gegeven figuren kan aangepast worden. Deze vlakken worden aldus als hulpmiddel gebruikt om meetkundige problemen handig en doeltreffend op te lossen. Ze zullen aangewend worden om een diepgaande studie te maken van kegelsneden als nulpunten van tweedegraadsveeltermen. Door een gedetailleerde studie van dit afgebakend geheel ervaren de leerlingen de wisselwerking tussen algebra en meetkunde en leren ze nieuwe instrumenten aanwenden om problemen op te lossen. Aanbeveling aantal lestijden: ca 60. *Opmerking.* Gezien het aantal voorziene lestijden kan dit onderwerp enkel behandeld worden als thema binnen bijkomende lestijden van de vrije ruimte. Onderdelen kunnen eventueel als studieopdracht aan de leerlingen gegeven worden.
AM5	Punten en rechten beschrijven t.o.v. een affiene en euclidische ijk.
AM6	Meetkundige plaatsen en krommen bestuderen door ze voor te stellen door een gepaste vergelijking.
AM7	Punten en rechten beschrijven in het gecompleteerde vlak.
AM8	Affiene eigenschappen van kegelsneden in het gecompleteerde vlak onderzoeken en toepassen.
AM9	Euclidische eigenschappen van kegelsneden onderzoeken en toepassen.
	Uitgaande van de bekende euclidische ijk wordt deze nu veralgemeend (in een eerste fase) tot een affiene ijk. In een aantal gevallen past deze ijk beter bij de gegeven meetkundige configuratie zodat ingewikkeld algebraïsch rekenwerk beperkt wordt en de vergelijking van de kromme doorgaans eenvoudig(er) is. Toch valt op te merken dat deze ijk haar specifieke beperkingen meebrengt. Zo kunnen afstand, hoek en loodrechte stand niet, evenwijdigheid, midden en deelverhouding wel. De drie standaardkegelsneden worden als meetkundige plaatsen gedefinieerd en hun vergelijking wordt opgesteld t.o.v. een euclidische ijk. Er wordt ingegaan op de benaming 'kegelsnede': ellips, hyperbool en parabool zijn snijlijnen van een vlak met een kegel. Affiene ijktransformaties bieden 'instrumenten' aan voor de 'transformatiemeetkunde'. Door een gepaste ijk te kiezen worden de meetkundige voorwaarden die een meetkundige plaats kenmerken, omgezet in een voorwaarde van coördinaten: de vergelijking van de meetkundige plaats. Naast de rechtstreekse methode kan ook aandacht besteed worden aan de methode van de geassocieerde krommen om de vergelijking op te stellen. Dit illustreert het eliminatieproces uit de algebra. Bij het zoeken naar een meetkundige plaats is het nuttig, vooraleer de berekeningen uit te voeren (meestal met een symbolisch pakket), de meetkundige plaats te construeren met behulp van een meetkundig computerprogramma. Ook zal een meetkundige plaats geregeld een kegelsnede zijn die via haar vergelijking niet als dusdanig zal herkend worden door de leerlingen omdat ze niet geleerd hebben de overgang te maken naar de canonieke vergelijking. ICT biedt hiervoor een oplossing. Voorstellingen van krommen door uitsluitend een cartesiaanse vergelijking te gebruiken is niet altijd

mogelijk. Daarom wordt een nieuw analytisch instrumentarium voorgesteld om krommen voor te stellen, m.n. poolcoördinaten. Hiermee wordt geïllustreerd dat sommige krommen heel eenvoudig met hun poolvergelijking worden beschreven (spiraal van Archimedes, conchoïde, lemniscaat, strofoïde, maar ook rechte, kegelsnede, e.a.). Analogie met de meetkundige voorstelling van complexe getallen kan onderstreept worden. Andere krommen laten zich beter beschrijven via hun parametervergelijkingen, zoals de cycloïde, trochoïde, hypocycloïde, epicycloïde, de cirkelevolvente, Lissajous-figuren e.a..

De ‘onvolmaaktheid’ van het affiene vlak noopt tot uitbreiding tot het gecompleteerde affiene vlak. Oneigenlijke punten worden ingevoerd als richtingen van het vlak. Punten in dit nieuwe vlak zijn bijgevolg eigenlijke punten of punten op oneindig. Deze nieuwe punten worden nu vastgelegd met homogene coördinaten. Punten en rechten kunnen aldus beschreven worden in een homogene ijk. Ook kan de uitbreiding naar het gecomplexifieerd gecompleteerd affiene vlak gemaakt worden, wat de meetkundige mogelijkheden van complex rekenen illustreert.

Rechten kunnen bepaald worden door vergelijkingen van de eerste graad. De basiskegelsneden, gedefinieerd als meetkundige plaatsen, worden bepaald door vergelijkingen van de tweede graad. Veralgemeend worden kegelsneden bestudeerd als puntenverzamelingen die beschreven worden door tweedegraadsvergelijkingen tegenover een homogene ijk. De affiene classificatie wordt nu uitgediept. Aan de reductie van de vergelijking van een kegelsnede wordt de nodige zorg besteed. De gemeenschappelijke punten van een rechte en een kegelsnede leiden tot het begrip raaklijn aan een kegelsnede. Tesamen met de ‘pooltheorie’ vormen ze de basis voor begrippen als middelpunt, middellijnen, toegevoegde middellijnen en asymptoten. De gemeenschappelijke punten van twee kegelsneden vormen de basis van het begrip kegelsnedenbundel.

Het begrip orthogonaliteit biedt toepassingen als orthogonale hyperbool, de cirkel en de normaal. Combinatie van toegevoegde middellijnen en orthogonaliteit leidt tot speciale middellijnen van een kegelsnede: de assen en hiermee verbonden, de toppen. Zodoende kan de vergelijking van een centrale kegelsnede gereduceerd worden naar haar assenvergelijking en die van de parabool naar de topvergelijking. De vaststelling dat de meetkundige plaats van punten waarvan de verhouding van de afstanden tot een vast punt en tot een vaste rechte constant is, een kegelsnede is en omgekeerd dat elke kegelsnede zo een meetkundige plaats is, leidt tot de begrippen excentriciteit, brandpunt en richtlijn en hun eigenschappen. Belangrijk is te wijzen op de praktische toepassingen van een aantal eigenschappen van kegelsneden.

Het verwerven van de eigenschappen doorheen het geheel blijft ondergeschikt aan het toepassen ervan zodat voldoende tijd zal worden voorzien voor oefeningen. Dit is een permanent proces in de opbouw van het geheel en zal zeker niet als een afsluitende activiteit aangeboden worden.

5.2.5 STATISTIEK EN KANSREKENEN

5.2.5.1 STATISTIEK

INLEIDING

Statistiek is de wetenschap van het verzamelen, ordenen en interpreteren van gegevens. Ze biedt middelen om met behulp van gegevens inzicht te krijgen in reële en maatschappelijke problemen en er conclusies uit te trekken met een zekere betrouwbaarheid. Ook de wijze van verzamelen van gegevens, o.m het trekken van een steekproef, is onderwerp van kritische reflectie.

In het secundair onderwijs is de hoofdbedoeling van het onderdeel statistiek de leerlingen te leren nadenken en redeneren over statistische gegevens, statistische voorstellingen en statistische uitspraken. Het statistisch redeneren is niet eenvoudig en valt niet zomaar samen met wiskundig redeneren. Het is anders dan het rekenen met kansen. Statistiek biedt een eigen taal binnen de modellen die ze aanreikt. Het vraagt dus enige tijd om de leerlingen vertrouwd te maken met deze aanpak. Vandaar dat de lestijden voorzien voor statistiek best volledig besteed worden aan de eigenheid van dit onderwerp: het verwerven van dit statistisch redeneren.

Bij de didactische verwerking van statistiek kunnen we uitgaan van de vier kerngedachten: betekenis, berekeningen, fundamenten, toepassingen (zie *3 Algemene pedagogisch-didactische wenken)*.

Het aanbrengen van de *concepten* en het doorgronden van hun *betekenis* neemt hier het grootste aandeel van de lestijden in. Begrippen die bijzondere aandacht krijgen: steekproef versus populatie, daaraan gekoppeld de betrouwbaarheid van steekproeven; centrum- en spreidingsmaten, i.h.b. gemiddelde en standaardafwijking, dichtheidsfunctie als model, met i.h.b. de normale verdeling, de betrouwbaarheid van berekende resultaten en conclusies. Vermits het statistisch redeneren niet eenvoudig is, wordt best gewerkt vanuit realistische voorbeelden en toepassingssituaties.

De term *berekeningen* kan hier beter vertaald worden als ‘technische behandeling’, omdat hier vaak ook heel wat grafische output wordt gemaakt, die het redeneren ondersteunt. Wiskundige berekeningen en voorstellingen zijn hier niet echt nieuwe leerinhoud, maar meestal de drager van de statistische informatie, waar het in essentie om gaat. Berekeningen zijn dus ondergeschikt aan het redeneren en interpreteren zelf. Vandaar dat waar mogelijk en zinvol het reken- en tekenwerk uitgevoerd wordt met ICT.

Statistiek is geen eenvoudige wetenschap en de benadering in het secundair onderwijs kan dan ook niet ingaan op de reële *fundamenten* ervan. Toch kan men leerlingen een aantal fundamentele opvattingen meegeven die aan de basis moeten liggen van statistisch onderzoek. Statistiek biedt net zoals wiskunde modellen voor het beschrijven van een werkelijkheid. Doel daarvan is die zo ideaal mogelijk te beschrijven. Maar de werkelijkheid is zelden te vatten in een exacte wiskundige relatie. Zo is de normale verdeling maar een ‘ideaal model’. Een beschrijving is dus nooit perfect. Verder is in statistiek de context belangrijk. Het is dus niet zinvol leerlingen met statistiek te confronteren buiten zinvolle en realistische situaties.

Uit het voorgaande is al duidelijk dat het deel *toepassingen* bij statistiek een belangrijk onderdeel is. Precies doorheen het gebruiken van de statistische inzichten zal geleerd worden hoe ermee om te gaan. Vandaar dat vele open problemen zullen aangeboden worden met gebruik van reële gegevens. Telkens zal commentaar gaan naar de context van de situatie, naar de wijze van verzamelen van de gegevens en naar de verwerking en interpretatie ervan. Nog meer dan elders moet de context betrokken worden bij de ontwikkelingen en de uiteindelijke bespreking van de resultaten.

De contextsituaties voor statistiek liggen altijd in andere disciplines dan de statistiek zelf. Daarom liggen hierin heel wat kansen om vakoverschrijdend te werken Het is zinvol om hier samen te werken met andere vakken.

Zo leren leerlingen overigens meteen dat in verschillende wetenschappen vaak zowel wetenschappelijke als statistische argumenten gebruikt kunnen worden. Wat het inzicht in de toepasbaarheid versterkt, maar ook het belang van het statistisch redeneren onderstreept.

BEGINSITUATIE

De leerlingen hebben al geleerd in beperkte omstandigheden statistische gegevens te verwerken (frequenties, centrum- en spreidingsmaten), voor te stellen en te interpreteren.
Ze leerden in eenvoudige situaties kansen te berekenen en het verband te leggen tussen kansen en relatieve frequenties.

KERNDOELSTELLINGEN

SK1	Statistische gegevens en grafische voorstellingen van statistische gegevens interpreteren.	
SK2	Aan de hand van concrete voorbeelden aangeven dat men enkel op basis van aselecte steekproeven uitspraken kan doen over de ganse populatie en dat bij elk statistisch experiment toeval een rol speelt.	
SK3	In betekenisvolle situaties, gebruik maken van een normale verdeling als continu model bij data met een klokvormige frequentieverdeling en het gemiddelde en de standaardafwijking van de gegeven data gebruiken als schatting voor het gemiddelde en de standaardafwijking van deze normale verdeling.	33
SK4	Het gemiddelde en de standaardafwijking van een normale verdeling grafisch interpreteren en grafisch het verband leggen tussen een normale verdeling en de standaardnormale verdeling.	34 35
SK5	Bij een normale verdeling de relatieve frequentie van een verzameling gegevens met waarden - tussen twee gegeven grenzen, - met waarden groter dan een gegeven grens, - of met waarden kleiner dan een gegeven grens, interpreteren als de oppervlakte van bijbehorende gebied onder de normale verdeling.	36
SK6	Bij een concreet steekproefresultaat i.v.m. proporties een correcte statistische uitspraak formuleren, gebruik makend van een foutenmarge en het bijbehorende betrouwbaarheidsniveau.	

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Aan de hand van goed gekozen voorbeelden wordt in de derde graad het interpreteren van statistische gegevens, de centrum- en spreidingsmaten van deze gegevens en voorstellingen verder uitgediept. Het kunnen interpreteren van (en kritisch kijken naar) statistische gegevens, maten en voorstellingen is een belangrijke doelstelling. Zo zal gewezen worden op het belang van de vorm van een grafische voorstelling (symmetrisch, niet-symmetrisch, …) en naar eventuele extreme meetwaarden, die een grote invloed kunnen hebben op het gemiddelde en de standaardafwijking. Bij de interpretatie zal men conclusies terug in de context plaatsen. Het is nuttig om in de klas bij bepaalde gegevens met leerlingen te discussiëren over zinvolle grafische voorstellingen, informatie die verloren gaat, welke centrummaat aangewezen is, hoe de gegevens verzameld zijn, …

Alhoewel dit op zich een moeilijk probleem is, zal men aandacht besteden aan de wijze waarop steekproeven tot stand zijn gekomen en de wijze waarop conclusies getrokken worden (statistische term: inferentie). Daartoe worden de volgende twee aspecten onderzocht: de betrouwbaarheid van de steekproef (vertekende of onvertekende steekproeven) en de variabiliteit van steekproefresultaten bij het onderzoek naar proporties.

- Steekproeven waarbij mensen vrijwillig beslissen om mee te doen (televoting, …) en opportunistische steekproeven (de eenheden zijn gemakkelijk of goedkoop te bereiken, bijv. een enquête in een winkelstraat) leveren meestal onbetrouwbare informatie op met betrekking tot de hele populatie. Men noemt ze vertekend. De leerlingen moeten bij concrete voorbeelden kunnen aangeven of een steekproef mogelijk vertekend is en wat het effect daarvan is op een statistische uitspraak op basis van die steekproef.

- Maar ook goede steekproeven uit eenzelfde populatie leveren verschillende resultaten op. Dit fenomeen noemt men steekproefvariabiliteit. Variabiliteit heeft voor gevolg dat je uit een steekproefresultaat nooit met 100 % zekerheid besluiten kunt trekken over de hele populatie. Dit is niet hetzelfde als zeggen 'met statistiek kan je alles bewijzen'. De bedoeling is juist deze variabiliteit te kunnen inschatten. Bij het realiseren van doelstelling SK6 kan hierop uitvoeriger ingegaan worden. De leerlingen hebben dan al een aantal voorbeelden uitvoeriger behandeld.

Centrum- en spreidingsmaten zijn parameters om gegevens cijfermatig samen te vatten. Een andere manier om statistische gegevens samen te vatten, te modelleren bestaat erin de verdeling te beschrijven door een functie. Een veel voorkomende verdeling is de normale verdeling. De hoofdbedoeling van dit onderdeel is dat de leerlingen inzien dat in bepaalde gevallen statische gegevens kunnen voorgesteld worden met behulp van het model van de normale verdeling en dat ze bij normaalverdeelde gegevens de grafiek van de normale verdeling kunnen gebruiken om statistische problemen op te lossen.

De overgang naar een dichtheidsfunctie kan gebeuren door over te gaan op relatieve frequenties per eenheid (de relatieve frequentie gedeeld door de breedte van elk interval) en een vloeiende kromme te tekenen door het histogram. Alle gegevens worden zo samengevat in de grafiek van een functie. Heel wat histogrammen zijn symmetrisch en klokvormig (de lichaamslengte, het exacte gewicht van pakken suiker van 1 kilo, …). Op die manier kan de normale verdeling ingevoerd worden als model voor klokvormige frequentieverdeling. Om de benaderingsgraad te visualiseren kan men een klokvormig histogram overdekken met de bijbehorende normaalverdeling. De leerlingen berekenen met rekenmachine of software het gemiddelde $\bar{x}$ en de standaardafwijking s van de meetwaarden. Daarna laten we ze de dichtheidsfunctie van de normaalverdeling tekenen, waarbij de verwachtingswaarde μ de waarde krijgt van $\bar{x}$ en de standaarddeviatie σ de waarde van s. Als het getal e nog niet aan bod gekomen is de precieze kennis van het functievoorschrift van een algemene normaalverdeling hier nog niet nodig. Bij de studie van exponentiële functies kan deze functie terug aan bod komen. Belangrijk is wel op te merken dat de oppervlakte onder de dichtheidsfunctie 1 is.

Deze benadering van het histogram van de frequentieverdeling door de normale verdeling kan ook gebruikt worden om het verband tussen de vorm van de grafiek en gemiddelde en standaardafwijking te leggen. De grafische betekenis van het gemiddelde van een normale verdeling is de x-coördinaat van de top van de verdelingsfunctie. Voor de standaardafwijking geldt de vuistregel: 68 % van de waarden die de variabele kan aannemen, liggen tussen de grenzen $\mu-\sigma$ en $\mu+\sigma$ en ook 68 % van de oppervlakte tussen de grafiek van de normale verdeling en de x-as ligt tussen $\mu-\sigma$ en $\mu+\sigma$. Deze regel kan aan de hand van de discrete verdeling intuïtief geïllustreerd worden of met ICT nagerekend worden.

Het omzetten van een willekeurige normale verdeling naar de standaardnormale verdeling is bij gebruik van statistische software niet echt nodig om concrete problemen op te lossen. De standaardnormale verdeling kan dan ook enkel gezien worden als een speciaal voorbeeld van een normale verdeling ($\mu = 0$ en $\sigma = 1$).

Met ICT kunnen de relatieve frequenties bij een normale verdeling bepaald worden en tegelijkertijd geïllustreerd worden als oppervlakte. Bij een gegeven gemiddelde en standaardafwijking kunnen bijv. de volgende concrete vragen aan bod komen: 'Hoeveel procent van de volwassen mannen is kleiner dan 170 cm, heeft een lengte tussen 180 en 190 cm, is groter dan 195 cm?' en 'Bepaal de lengte zodat 75 % van de mannen kleiner is dan deze lengte.' De leerlingen moeten uiteraard wel inzien dat het hierbij om een model gaat, dat slechts benaderende oplossingen biedt.

Met behulp van de normale verdeling kunnen nu bijv. ook statistische gegevens met verschillend gemiddelde en standaardafwijking vergeleken worden. Stel bijv. dat je weet dat twee grote groepen schooluitslagen normaal verdeeld zijn en je wilt een uitslag van de ene groep vergelijken met een uitslag van een andere groep: bijv. is 8 bij een verdeling met gemiddeld 7 en standaardafwijking 1,3 'beter' dan 15 bij een verdeling met gemiddelde 13,5 en standaardafwijking 1,8? Dit probleem kan aangepakt worden door na te gaan hoeveel procent van de uitslagen in beide gevallen hoger of lager liggen dan de te vergelijken waarden of door afwijkingen van het gemiddelde in beide gevallen uit te drukken in aantal standaardafwijkingen en deze getallen te vergelijken (z-scores).

De leerlingen moeten aan de hand van voorbeelden ook begrijpen dat niet alle data normaal verdeeld zijn of benaderd kunnen worden door een normale verdeling: bijv. de snelheid van geflitste wagens in de bebouwde kom, het begintijdstip van een telefoongesprek vanuit een bepaald kantoor, het inkomen van alle werknemers van een groot bedrijf, … Nagaan of statistische gegevens eventueel normaal verdeeld zijn, gebeurt in eerste instantie door te redeneren over de data en te onderzoeken of een histogram van deze gegevens klokvormig is. Daarnaast kan men dan nagaan of aan de 68-95-99,7-regel voldaan is. In de klas kan men zich hiertoe beperken. Een correctere analyse gebeurt door de relatieve cumulatieve frequenties uit te zetten in een assenstelsel van 'normaal waarschijnlijkheidspapier'. Deze schaalverdeling is ook voorhanden op de grafische rekenmachine en statistische software, zonder dat de cumulatieve frequenties moeten uitgerekend worden.

Onvertekende steekproeven van gelijke grootte, getrokken uit eenzelfde populatie, zullen meestal lichtjes verschillende resultaten opleveren. Men spreekt van steekproefvariabiliteit. Stel bijv. dat we weten dat in een bepaalde populatie een proportie van 0,3 of 30 % aan een zekere ziekte lijdt. Twee onvertekende steekproeven van 1000 personen zouden dan bijv. een proportie 0,293 en 0,331 van mensen met die ziekte kunnen aantreffen.

Via computersimulaties kan onderzocht worden hoe groot die steekproefvariabiliteit kan zijn, in functie van de steekproefgrootte. Daarbij maken leerlingen kennis met een belangrijke redenering in de statistiek: om de kwaliteit van een procedure te achterhalen, dien je die procedure een groot aantal keer uit te voeren, bijv. via een simulatie. Zo krijg je een zicht op de eventuele vertekening van de procedure (zijn de proporties steevast hoger of lager dan in de populatie?) en op de variabiliteit (hoe sterk kunnen de steekproefproporties afwijken van de populatieproportie?).

Gezien het toevallige karakter van een steekproefproportie is het onmogelijk te voorspellen wat de maximale en minimale waarden kunnen zijn. In principe zijn alle waarden tussen 0 en 1 immers mogelijk. Wel kan men uit een simulatie vaststellen dat het gros van de steekproefproporties (bijv. 95 %) niet meer dan een bepaalde waarde (bijv. 0,026 of 2,6 %) afwijken van de populatieproportie. Men noemt die 0,026 de foutenmarge en die 95 % het bijbehorend betrouwbaarheidsniveau.

Stel dat een steekproef een proportie van 0,317 opleverde, dan noemt men $[0,317 - 0,026; 0,317 + 0,026]$ een betrouwbaarheidsinterval bij een betrouwbaarheidsniveau van 95 %. De betekenis ervan is: dit interval heeft een kans van 95 % om de gezochte proportie te bevatten. De leerlingen moeten bij concrete statistische uitspraken waarin gebruik wordt gemaakt van foutenmarges en het bijbehorend betrouwbaarheidsniveau, de betekenis van beide begrippen duidelijk kunnen uitleggen.

Op basis van simulaties bij verschillende steekproefgroottes n en verschillende populatieproporties p, kan een tabel opgesteld worden met foutenmarges, bij een betrouwbaarheidsniveau van bijv. 95 %. Op die manier kan bij elke steekproefproportie snel een foutenmarge opgezocht worden.

In plaats van met een tabel, gebaseerd op simulaties, kunnen betrouwbaarheidsintervallen ook op andere manieren bepaald worden. Zo kunnen grafische rekenmachines deze ook opstellen voor elk gewenst betrouwbaarheidsniveau. De klemtoon moet liggen op het inzicht in de begrippen, niet op de berekeningen.

Men kan ook aantonen dat, bij het vaak herhalen van een steekproefneming, de gevonden steekproefproporties normaal verdeeld zijn. Bovendien zijn er eenvoudige formules voor μ en σ, op basis van de steekproefproportie. De kennis van en het inzicht in de normale verdeling kan op die manier gebruikt worden om betrouwbaarheidsintervallen op te stellen in te interpreteren. Belangrijk hierbij is rekening te houden met de beperkingen die gelden om de normale verdeling en de formules voor μ en σ te mogen toepassen. Te weinig aandacht hieraan in de aanvangsfase kan er toe leiden dat leerlingen deze formules ten onrechte toepassen in alle situaties.

5.2.5.2 KEUZEONDERWERPEN

K	LINEAIRE REGRESSIE EN CORRELATIE
	In heel wat statistisch en wetenschappelijk onderzoek gaat men op zoek naar een mogelijk verband tussen twee variabelen. Meestal vermoedt men een zeker verband en probeert men dit via een onderzoek aan te tonen. Als vastgesteld is dat er met voldoende grote waarschijnlijkheid kan worden aangenomen dat er een verband bestaat, probeert men dit verband te beschrijven met een formule. Zo kan men globale tendensen aangeven of dit verband gebruiken om voorspellingen te doen.

	Het is zinvol de behandeling van dit onderwerp te koppelen aan een concrete statistische onderzoeksopdracht. Aanbeveling aantal lestijden: ca. 12.
LR1	Bij een reeks statistische gegevens van twee variabelen op basis van een grafiek eventuele lineaire verbanden aangeven.
LR2	Bij concrete voorbeelden de betekenis van de correlatiecoëfficiënt uitleggen.
LR3	Met behulp van ICT bij statistische gegevens van twee variabelen met een grote correlatie de regressielijn bepalen en hiermee interpoleren en extrapoleren.
	Bij het onderzoeken van het verband tussen twee kwantitatieve variabelen kan een spreidingsdiagram (het uitzetten van de koppels gegevens met op de ene as de eerste variabele en op de tweede as de andere variabele) duidelijkheid verschaffen omtrent het verband (de correlatie) tussen de twee variabelen. De mate van correlatie hangt af van de wijze waarop de punten in het diagram verspreid liggen. Bij een sterke correlatie concentreren de punten zich rond een rechte. Men noemt deze rechte de regressielijn. Aan de hand van concrete voorbeelden wordt dit aangebracht. Het is belangrijk dat de leerlingen inzien dat ook niet-lineaire verbanden mogelijk zijn. Voor het bepalen van de verbanden beperken we ons tot lineaire verbanden. Een lineaire correlatie is sterk als de punten dicht bij een rechte lijn liggen en zwak als ze wijd verspreid om een lijn liggen. Een numerieke maat voor de correlatie is de correlatiecoëfficiënt. De correlatiecoëfficiënt meet de zin en de sterkte van de lineaire relatie tussen twee kwantitatieve variabelen. Met behulp van een grafische rekenmachine of computerprogramma kan bij verschillende gegevens de puntenwolk getekend worden en de bijbehorende correlatiecoëfficiënt berekend worden. Zo wordt duidelijk dat dit getal tussen –1 en 1 ligt, dat het dicht bij 0 ligt als het verband tussen de variabelen klein is, dat het dicht bij 1 ligt als de punten dicht bij een stijgende rechte liggen en dat het dicht bij −1 ligt als de punten dicht bij een dalende rechte liggen. De formule voor de correlatiecoëfficiënt kan dan bijvoorbeeld als volgt verantwoord worden. Als we het vlak in vier kwadranten verdelen volgens rechten evenwijdig met de assen en door het punt $(\bar{x}, \bar{y})$ dan liggen bij een sterke positieve correlatie de meeste punten in het eerste en derde kwadrant en bij een sterke negatieve correlatie in het tweede en vierde kwadrant zodat in het eerste geval de meeste afwijkingen $x_i - \bar{x}$ en $y_i - \bar{y}$ hetzelfde teken hebben en in het tweede geval een verschillend teken. Producten van de vorm $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ hebben dus bij een sterk verband voor het grootste deel hetzelfde teken. De som van al deze termen is dus groot (positief of negatief) bij een grote correlatie. De noemer in de formule voor de correlatiecoëfficiënt zorgt ervoor dat de correlatiecoëfficiënt tussen –1 en 1 ligt. Wanneer de punten gelijkmatig over de vier kwadranten rond het zwaartepunt verspreid liggen, heffen de positieve en negatieve termen in de som van alle $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ elkaar op zodat de correlatiecoëfficiënt nagenoeg nul wordt. Software bevat instructies om spreidingsdiagrammen te tekenen en de bijhorende regressielijn en correlatiecoëfficiënt te berekenen. Het zou te ver voeren om de in rekenmachines geprogrammeerde methode te verklaren. Indien het verband inderdaad lineair is en er een grote correlatie is, kan de regressielijn gebruikt worden om voor een specifieke waarde van de x-variabele de y-variabele te voorspellen. Het is belangrijk de leerlingen, bij voorkeur via concrete voorbeelden, ook te wijzen op de volgende drie aspecten. - Een hoge correlatie wijst op een samenhang, maar niet noodzakelijk op een oorzakelijk verband. De onderzochte variabelen kunnen beide beïnvloed worden door andere variabelen. - Een geringe correlatie bewijst evenmin dat er geen samenhangend verband is. Het is mogelijk dat het niet met een eerstegraadsfunctie te beschrijven is (maar bijv. door een exponentiële). - Daarnaast geven statistische verbanden vaak slechts globale tendensen en geen strenge regels. Hoewel rokers gemiddeld eerder dood gaan dan niet-rokers, zijn er mensen die 90 jaar worden terwijl ze veel roken.

K	TOETSEN VAN HYPOTHESEN
	De resultaten van wetenschappelijk en/of statistisch onderzoek kunnen soms afwijken van wat men theoretisch denkt waar te zijn. Zo kan een winkelketen in een steekproef vaststellen dat slechts 70 % van de klanten tevreden is over de dienst-na-verkoop, terwijl de directie ervan overtuigd is dat 80 % tevreden is. Die 70 % kan het gevolg zijn van de steekproefvariabiliteit (en is wel degelijk 80 % van de klantenpopulatie tevreden). Ze kan evenwel toch wijzen op een werkelijk lager aantal tevreden klanten. Bij toetsen van hypothesen probeert men op basis van een steekproef te onderzoeken of een hypothese over de ganse populatie aanvaard kan blijven of verworpen moet worden in het licht van de resultaten van de nieuwe steekproef. De rekentechnische moeilijkheden waren een grote hinderpaal voor een kennismaking met dit belangrijk statistisch aspect in het secundair onderwijs. Nochtans is het mogelijk de belangrijkste aspecten van toetsen van hypothesen aan te brengen zonder rekenwerk en met de huidige software vormt dit rekenwerk geen hinderpaal meer. Aanbeveling aantal lestijden: ca. 8.
TH1	Binnen een probleemsituatie van een eenvoudige hypothesetoets de begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese en P-waarde uitleggen.
TH2	Bij een onderzoek waar proporties voorkomen de nulhypothese en alternatieve hypothese formuleren en met behulp van ICT de P-waarde berekenen.
	Bij toetsen van hypothesen is de essentiële vraag: ‘Zijn deze waarnemingen, die (lichtjes) afwijken van wat de nulhypothese beweert, toevallig of niet?’ Wanneer we een eerlijke dobbelsteen 600 maal opgooien, valt die niet noodzakelijk 100 maal op 6. Daarbij zijn er *twee* mogelijke oorzaken voor deze afwijking: de teerling is eerlijk maar ten gevolge van de steekproefvariabiliteit is de steekproefproportie niet precies $\frac{1}{6}$ of de teerling is oneerlijk. Bij een significantietest onderzoekt men hoe groot de kans is dat de steekproefvariabiliteit de oorzaak is van het afwijkend steekproefresultaat. Is het zeer onwaarschijnlijk dat de vastgestelde afwijking louter het gevolg is van het toeval (de steekproefvariabiliteit) dan moet de nulhypothese in vraag gesteld worden. In het secundair onderwijs kunnen we ons beperken tot de basisideeën van het toetsen van een proportie (of een kans). De begrippen P-waarde en significantieniveau worden daarbij gebruikt. Veel aandacht moet gaan naar een goede verwoording van deze begrippen in concrete situaties en het aspect dat toeval steeds een rol speelt. De berekeningen kunnen we overlaten aan statistische software. UITBREIDING Het schatten welke proportie van een populatie een bepaald kenmerk heeft, biedt voldoende context om enkele belangrijke basisredeneringen uit de statistiek grondig te behandelen: de variabiliteit van steekproefresultaten, de steekproefverdeling als antwoord op de vraag 'Wat zou er gebeuren mochten we deze procedure heel vaak herhalen?', betrouwbaarheidsintervallen en eventueel significantietesten. Maar ook het schatten van een gemiddelde bij een populatie, is een vaak terugkerend statistisch probleem. Bijv: ‘hoeveel uur kijken Vlaamse jongeren van 15 tot 18 gemiddeld naar TV?’, ‘Wat is de gemiddelde remtijd na het drinken van twee pintjes?’, ... In de wetenschappen worden constanten, zoals bijv. de lichtsnelheid, geschat door een experiment enkele keren te herhalen en dan het gemiddelde van alle experimentele waarden te nemen. Dezelfde redeneringen als bij proporties kunnen nu herhaald worden voor gemiddelden. De steek-

	proefverdeling voor gemiddelden is immers in vele gevallen bij benadering ook een normale verdeling, zoals bij proporties, zodat dezelfde formules en rekentechnieken gebruikt kunnen worden voor het opstellen van betrouwbaarheidsintervallen of het uitvoeren van significantietesten. Alhoewel deze beide inferentieprocedures rekentechnisch niet zo sterk verschillen van deze bij proporties, zijn de redeneringen hier wel iets moeilijker. In de eerste plaats omdat de onderzochte (continue) variabele binnen de populatie al een verdeling heeft (de populatieverdeling) en deze een invloed heeft op de verdeling van de steekproefgemiddelden (de steekproefverdeling van gemiddelden). Het correct redeneren met beide verdelingen vergt enige oefening. Bovendien is strikt genomen de normale verdeling niet meer altijd bruikbaar. Het lijkt ons daarom aangewezen om de gekozen voorbeelden en oefeningen te beperken tot die situaties waar de normale verdeling als steekproefverdeling goede benaderingen oplevert voor betrouwbaarheidsintervallen en significantietests: de populatieverdeling is vrij symmetrisch, de steekproef is niet te klein (n > 10) en de populatie-standaardafwijking sigma is bekend.

5.2.5.3 KANSREKENEN

KERNDOELSTELLINGEN

SK7	Systematisch tellen bij het berekenen van kansen, gebruik maken van een kansboom, de som-, en product- en complementregel voor kansen toepassen en herkennen wanneer gebeurtenissen onafhankelijk van elkaar zijn.		16
SK8	De voorwaardelijke kans en de regel van Bayes gebruiken om kansproblemen op te lossen.		16
SK9	Van een toevalsvariabele de kansverdeling opstellen, de verwachtingswaarde en standaardafwijking berekenen en interpreteren en het verband leggen met de begrippen ‘gemiddelde’ en ‘standaardafwijking’ uit de statistiek.		
SK10	Kansen uitrekenen bij normaalverdeelde gegevens en de normale verdeling als model gebruiken om kansen te bepalen.		17
SK11	Vaststellen of een kansexperiment vertaald kan worden naar het model van de binomiale verdeling en de bijbehorende kansen berekenen met behulp van ICT.		17

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Bij de studie van kansverdelingen moet er voldoende aandacht gaan naar de analogie met aspecten van beschrijvende statistiek (relatieve frequentie - kans, histogram - kanshistogram, gemiddelde – verwachtingswaarde, …).

In de tweede graad gebruikten de leerlingen reeds boomdiagrammen om kansen te berekenen. Impliciet maakten ze ook gebruik van de som-, product- en complementregel. Aan de hand van enkele concrete oefeningen kan dit opgefrist worden. Ook de regel van Laplace zal daarbij vermeld worden.

Ook voor voorwaardelijke kans en de regel van Bayes kan er verder gewerkt worden met kansbomen. Voorwaardelijke kansen zitten al impliciet in kansbomen verwerkt en de regel van Bayes kan op een natuurlijke wijze uit een kansboom worden afgeleid. Om deze regel aan te brengen en om later in te zien dat een probleem neerkomt op het omkeren van een voorwaardelijke kans is het zinvol eerst met absolute aantallen te werken en via relatieve frequenties over te stappen op kansen. Talloze praktische voorbeelden kunnen het gebruik van deze regel illustreren.

Een toevalsvariabele (stochastische variabele) is de numerieke uitkomst van een statistisch experiment, bijv. het aantal koppen bij het herhaald (bijv. 10 maal) opgooien van een muntstuk. De tabel van de kansen van alle mogelijke uitkomsten is de kansverdeling van deze toevalsvariabele. Men kan hier ook een histogram van maken.

Naar analogie met een tabel van relatieve frequenties kunnen we ook bij een kansverdeling het gemiddelde (en de standaardafwijking) berekenen.

Om kansen te bepalen bij standaardnormaal verdeelde gegevens wordt gesteund op het verband tussen kansen en relatieve frequenties. De kans dat een doos suiker minder weegt dan 1kg (als het gewicht van alle door dezelfde machine verpakte dozen suiker normaal verdeeld is met gegeven gemiddelde en standaardafwijking of als de normale verdeling een goed model is voor deze verdeling) is de relatieve frequentie van het aantal pakken suiker dat minder weegt dan 1kg.

Een veel voorkomende kansverdeling is de binomiale verdeling. Aan de hand van concrete voorbeelden kan bij deze verdeling (zoals bij de normale verdeling) de P-waarde (overschrijdings- en onderschrijdingskansen) onderzocht worden. De berekening van deze kansen gebeurt met ICT. Dit laat ons ook toe om ook hier aandacht te besteden aan het aspect ‘toeval’ bij een statistisch experiment.

5.2.6 KEUZEONDERWERP

K	MATHEMATISEREN EN OPLOSSEN VAN PROBLEMEN

De leerlingen worden binnen en buiten de context van de wiskundevorming geconfronteerd met allerlei problemen, die soms relatief ingewikkeld kunnen zijn. Door hun wiskundekennis adequaat aan te wenden kan deze complexiteit vereenvoudigd worden. Daartoe moeten ze het probleem vlot kunnen onderzoeken of analyseren en er de wiskundige elementen van herkennen en onderscheiden. Door het probleem met een wiskundig model te beschrijven kan het verhelderd worden. Vaak komt het er op neer op zoek te gaan naar de juiste gegevens, de vraag correct en helder te formuleren, de relaties die de context aanreikt in wiskundige termen uit te drukken. Het resultaat is een vergelijking, een stelsel, een meetkundige situatie, …. Met behulp van de beschikbare wiskundekennis kan dan het (verwiskundigd) probleem aangepakt worden met vertrouwde oplossingsmethoden. Het resultaat moet uiteraard geïnterpreteerd worden in de context om te onderzoeken of het daar betekenisvol is.

Bij de probleemstelling gebruiken de leerlingen heuristiek die vaak transfereerbaar is naar andere probleemsituaties. De wiskundige inhouden zijn hier slechts ondersteunend voor het ontwikkelen van deze probleemoplossende vaardigheden.

Zo kunnen leerlingen onder meer leren
- een goede voorstelling van een probleem te maken, o.m. herkenbaarheid van een probleem, herkenbaarheid van wiskundekennis;
- de relaties binnen het probleem te analyseren, bijv. noodzakelijke en overbodige informatie onderscheiden, bijkomende informatie zoeken;
- een oplossingsplan op te stellen als nodig, bijv. het probleem opsplitsen in deelproblemen, een restrictie maken op de probleemstelling (i.c. het beperken van onderdelen om een wiskundige beschrijving mogelijk te maken), een vermoeden formuleren en toetsen;
- adequaat hulpmiddelen in te schakelen, bijv. vakspecifieke informatie, vademecum, aanwending van ICT;
- oog te hebben voor de interpretatie van resultaten;
- een gecontroleerde houding te ontwikkelen van terugkijken zowel op de fase van het stellen en/of het analyseren van het probleem, als die van het effectief oplossen;
- na te denken over de gevolgde oplossingsweg en hieruit conclusies te trekken voor de aanpak van een volgend probleem, bijv. hun wiskundekennis verhogen of beter structureren, bepaalde vaardigheden oefenen, betere kennisschema's uitwerken, onderdelen herhalen.

Het verwerken van problemen met behulp van wiskunde kan bij de leerlingen opvattingen en houdingen ontwikkelen over wiskunde. Zo zullen ze zich realiseren dat wiskunde meer is dan een stel regels, maar effectief kan ingezet worden om problemen uit het reële leven op te lossen of ten minste om er inzicht in te verwerven.

Ze kunnen inzien dat de vaardigheden verworven bij de aanpak van problemen binnen de wiskundevorming ook ingezet kunnen worden bij het oplossen van andere problemen. Zo kan een onderzoekende houding aangewend worden in elk probleemproces (bijv. verzamelen, aanvullen van informatie, opzoeken of herhalen van kennis, kritische houding ten aanzien van informatie). Zo ontwikkelt een wiskundige probleemaanpak vaak het doorzettingsvermogen en de zin voor nauwkeurigheid. Een houding van systematisch reflecterend terugkijken op een oplossingsproces kan hen leren fouten te vermijden en bij te sturen. Daardoor zal de tevredenheid over de uitvoering van een opdracht toenemen en van daaruit kan het geloof in de eigen capaciteiten en hun zelfvertrouwen groeien.

Deze houdingen zijn ook van fundamenteel belang bij het leren zelf, i.c. een onderzoekende houding, doorzettingsvermogen, geloof in eigen kunnen, gecontroleerd uitvoeren van een plan, reflecterende feedback, ….

Aanbeveling aantal lestijden: ca. 15.

MA1	Problemen herkennen, analyseren en de probleemstelling verhelderen met behulp van hun wiskundekennis.
MA2	Heuristische methodes gebruiken om een probleem aan te pakken.
MA3	Resultaten interpreteren binnen de context van het gestelde probleem.
MA4	Een reflecterende houding verwerven door gecontroleerd terugkijken op de oplossingsweg en de uitgevoerde berekeningen.
MA5	Vertrouwen verwerven door hun wiskundekennis zinvol in te schakelen.

In de praktijk kunnen allerlei situaties aanleiding geven tot interessante probleemstellingen.

- Problemen en toepassingen aangereikt binnen andere vakken.
- Het ondersteunen van een wiskundig gedeelte van een project in de vrije ruimte.
- Maatschappelijke problemen en situaties:
    - statistische informatie, enquêtes;
    - problemen en enquêtes binnen de schoolcontext;
    - maatschappelijke gedragingen (rijgedrag, rookgedrag, drugs, besteding inkomen, …);
    - milieuproblematiek;
    - samenlevingsproblemen;
    - verkiezingen;
    - verwerking en kritische bevraging van informatie op televisie, in kranten en tijdschriften.

Ook de leerinhouden die de leerlingen verwerken vanuit het leerplan bevatten allerlei situaties om deze methodiek van probleemaanpak in de praktijk te brengen.

Hoewel al heel wat aandacht besteed werd aan het verwerven van probleemoplossende vaardigheden, zal men de leerlingen toch voldoende moeten begeleiden op de weg van probleemaanpak, die zeker niet eenvoudig is, als men opteert voor een grote inbreng vanuit zelfstandig werken met wiskunde. Sommige leerlingen hebben wellicht het meeste leerkansen als de leraar zijn aanpak voldoende transparant kan maken.

Bij dergelijk zelfstandig verwerken van een opdracht zal men de opdracht en de leerlingen gericht opvolgen om ze voldoende succeservaring te bieden. Zo is het zinvol verschillende wegen om tot een oplossing te komen zichtbaar te maken en te waarderen. Alleszins moeten de leerlingen terugkoppeling verwerven op het eigen proces van aanpakken.

Een aantal opdrachten kunnen individueel gegeven worden. Maar het lijkt ook zinvol ruimere probleemstellingen te behandelen in de vorm van groepstaken. Hierbij zullen leerlingen, weliswaar op hun niveau, over wiskunde en probleemaanpak moeten communiceren. Hiermee zal hun (wiskundige) taalvaardigheid aangescherpt worden (bijv. nauwkeurigheid, correct gebruik wiskundige begrippen). Zoals bij elke vorm van groepswerk bestaat hier de kans op (verdere) ontwikkeling van de sociale vaardigheden (van onderlinge communicatie, spreken en luisteren, openheid, respecteren van afspraken, respecteren van elkaars persoon, aanbrengen van en/of aanvaarden van een andere mening).

Dit onderdeel moet uiteraard opgenomen worden binnen de evaluatie. Het zou van een te beperkte visie reflecteren als dit onderdeel alleen zou beoordeeld worden op de uiteindelijke oplossing van een probleem. Permanente evaluatie, begrepen als een permanente feedback op het oplossingsproces, is hier het meest aangewezen.

5.2.7 ONDERZOEKSCOMPETENTIES

KERNDOELSTELLINGEN

OC1	Zich oriënteren op een onderzoeksprobleem door gericht informatie te verzamelen, te ordenen en te bewerken.		20
OC2	Een onderzoeksopdracht met een wiskundige component voorbereiden, uitvoeren en evalueren.		21
OC3	De onderzoeksresultaten en conclusies rapporteren en ze confronteren met andere standpunten.		22

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Het verwerven van onderzoeksvaardigheden biedt de leerlingen voor de toekomst heel wat mogelijkheden in hun vervolgopleiding. Het is echter geen gemakkelijke klus. Bij een onderzoek moeten meestal vele verschillende en afzonderlijk verworven kenniselementen en inzichten gecombineerd worden tot een complexer geheel. Vaak wordt beroep gedaan op uiteenlopende vaardigheden, i.h.b. probleemoplossende vaardigheden en regulerende vaardigheden. In de onderwijssituatie is ook de reflectie achteraf op het hele proces belangrijk, i.h.b. op het leren tijdens het uitvoeren van de opdracht.

Om het voor leerlingen haalbaar te maken zal men zeker gebruik maken van de probleemoplossende vaardigheden en reflectieve vaardigheden, die al in het gebruikelijke curriculum aan bod moeten komen. Men zal het best de leerlingen zo concreet mogelijk aan het werk zetten aan een opdracht, afhankelijk van de mogelijkheden van de leerling, al of niet goed afgelijnd. Precies de reflectie over dit concrete proces zal voor de leerling deel uitmaken van het leerproces.

Het is evident dat de leerlingen maar onderzoekscompetenties zullen verwerven doorheen een proces waarin ze zelfstandig aan het werk moeten. De leerling moet dus zelf de opdracht concreet formuleren, plannen, uitvoeren eventueel bijsturen. Dat betekent niet dat de leerling zomaar aan zijn lot moet overgelaten worden. De leraar zal instaan voor een zachte opvolging van het proces. Het bespreken van het stappenplan, de uitvoering van het werkplan, het logboek, het gebruik van een portfolio van verzameld materiaal of deelopdrachten, geregelde mail-rapportering van de stand van zaken zijn hiertoe communicatiemogelijkheden en momenten van begeleide zelfsturing. En vermits de leerling hier nog in een leerproces zit, zal men al voordien de leerling vertrouwd maken met verschillende stappen in het proces door hem al eerder te confronteren met deelstappen en deelverantwoordelijkheden via kleine deelopdrachten, bijvoorbeeld in de tweede graad of in het eerste jaar van de derde graad

Algemeen worden volgende fasen in het aanpakken van een opdracht onderscheiden.
- De leerling stelt zichzelf een onderzoeksvraag, al of niet vanuit een aangestuurde reeks van mogelijkheden binnen een begeleide aanpak.
- De leerling werkt aan een probleemverkenning. Dat betekent: maakt een analyse, probeert het probleem te begrijpen, te omvatten en om het als dusdanig beter te omschrijven (antwoord op de vraag: weten wat aan te pakken). In deze fase kan al gewerkt worden aan het documenteren van de opdracht, bijv. feitenmateriaal en kennis verzamelen.
- De leerling stelt een plan van uitvoering op (antwoord op de vraag: weten hoe het aan te pakken). Dat kan inhouden: het formuleren van deelaspecten, deelopdrachten, maar ook het opstellen van een tijdskader.
- De leerling voert het plan uit. Dat kan betekenen: verder documenteren, effectief gegevens verzamelen, effectief verbanden onderzoeken, de bevindingen verder uitwerken, … (antwoord op de vraag: weten waarom het zo aan te pakken).
- De leerling formuleert conclusies en legt ze neer in een meestal schriftelijke neerslag. Daarop volgt nog het terugkijkend reflecteren (weten over weten).

In het deel onderzoeksvaardigheden (5.1) is hierop al uitvoeriger ingegaan.

Van de leerlingen wordt meestal verwacht dat zij over hun opdracht rapporteren, dat zij hun conclusie presenteren. Dit kan aan de hand van een geschreven vorm, een presentatie van het proces, waarbij ICT kan ingeschakeld worden. Dat kan door het bespreken van de in hun portfolio verzamelde opdrachten en resultaten.

Voor wiskunde zijn onderzoeksopdrachten misschien niet voor de handliggend. Omdat in het verleden nogal aandacht werd besteed aan kennisvergaring en techniciteit zijn wellicht ook leraren hiermee niet vertrouwd. Toch biedt wiskunde heel wat mogelijkheden om leerlingen aan het werk te zetten aan de uitdaging om een praktische of theoretische probleemstelling aan te pakken.

Suggesties voor soorten thema's in wiskunde.

- Het uitklaren van de betekenis van een onvertrouwd begrip of een beperkt onderdeel van de wiskunde.
- Het verzamelen van informatie bij een concrete opdracht (bijv. statistisch een verband leggen in een bepaalde situatie, ontwikkelingen uit de geschiedenis van de wiskunde, het belichten van het werk en de invloed van een wiskundige, …).
- Het gebruik van wiskunde bij bepaalde wetenschappelijke, technische economische of maatschappelijke toepassingen, het gebruik van wiskunde in schilderkunst, bouwkunst, muziek,…
- Het vergelijken van verschillende oplossingsprocedures voor eenzelfde probleem, bijv. bij het werken met benaderingen.
- Het onderzoeken, formuleren, verifiëren van bepaalde wiskundige vermoedens en het besluit argumenteren.
- Het uitbouwen van argumentatie en/of bewijsvoeringen binnen bepaalde wiskundeonderdelen.
- Het uitklaren van de samenhang binnen bepaalde onderdelen, daarbinnen logisch ordenen, een deductieve opbouw uitwerken.
- Een gegeven proces algoritmiseren, met eventueel inbegrip van het programmeren ervan.
- Het verwerven van een niet voor de hand liggend wiskundesoftwarepakket en de werking ervan toelichten in concrete situaties.
- Het gebruik van wiskunde toelichten in de samenwerking in een project met andere vakken.

Onderzoeksopdrachten kunnen inhoudelijk aansluiten bij
- de verdieping van bepaalde onderdelen, bijvoorbeeld als die niet in de les worden behandeld;
- de uitbreiding van bepaalde onderdelen, bijvoorbeeld logaritmische schaal, toepassingen van analyse, meetkundige interpretatie van de bewerkingen met complexe getallen, eigenwaarden, krommen en oppervlakken beschrijven, transformaties in de ruimte;
- de keuzeonderwerpen, bijvoorbeeld differentiaalvergelijkingen, convergentie van een reeks, numerieke methoden, iteratie, fractalen, lineaire programmering, financiële algebra, getaltheorie, analytische meetkunde (kegelsneden, krommen), regressie en correlatie, toetsen van hypothesen;
- andere wiskundeonderdelen, bijvoorbeeld niet-euclidische meetkunde, boldriehoeksmeting, geschiedenis van de wiskunde;
- een thematische uitwerking, zoals benadering, simulatie, algoritmisering, invariantie, symmetrie;
- onderwerpen die aansluiten bij een wiskundige ondersteuning van een project binnen de vrije ruimte.

6 SUGGESTIES VOOR DE VRIJE RUIMTE

ALGEMENE INLEIDING

De lessentabellen voor de derde graad ASO laten de scholen, afhankelijk van de studierichting, één tot vier lestijden ruimte (d.i. vrije ruimte). Een school/scholengemeenschap bepaalt autonoom hoe zij de basisvorming en het fundamenteel gedeelte van de lessentabel aanvult tot 32 lestijden. De vrije ruimte biedt een extra stimulans om als schoolteam verder werk te maken van onderwijsvernieuwing en om de lopende experimenten en projecten in het reguliere lestijdenpakket een plaats te geven. Het VVKSO suggereert, behalve invulling met vakken, zelfstandig leren, overgang naar hoger onderwijs, vakoverschrijdende thema's, projecten en vakken, ook clustering van vakken.
Hieronder zijn hiervan een aantal voorbeelden opgenomen. Het zijn suggesties met telkens vermelding van de betrokken vakken. Een bundeling van alle thema's is opgenomen in het inspiratiehandboek *Werken in de vrije ruimte*. Hierin wordt ook aandacht besteed aan methodieken, inhouden, evaluatievormen en aan de praktische consequenties voor de schoolorganisatie (infrastructuur, lesrooster).
Deze vakkencombinerende thema's willen een inspiratiebron zijn om over vakgrenzen heen een initiatief op maat van de studierichting en van de school uit te werken. Een multidisciplinaire benadering kan, in combinatie met het uitdiepen van nieuwe didactische werkvormen, die ook al aan bod komen binnen het vak, een meerwaarde betekenen voor leraar en leerling.

VRIJE RUIMTE EN WISKUNDE

In de studierichtingen met pool wiskunde is het vanzelfsprekend dat vanuit wiskunde verantwoordelijkheid wordt opgenomen in de uitwerking van vrije ruimte-projecten. Hierna volgen een aantal suggesties voor het aanpakken van projecten vanuit en met wiskundeopdrachten en vanuit vakoverschrijdende projecten waarin wiskunde een leidinggevende rol vervult. De keuzeonderwerpen uit het leerplan en eventueel daaraan gekoppelde onderzoeksopdrachten bieden ruim de mogelijkheid om andere vakken te betrekken bij een project opgezet vanuit een initiële wiskundeopdracht.

Anderzijds zal vanaf wiskunde zoals in andere studierichtingen betrokken kunnen worden van bij het optreden, het verzamelen en het verwerken van numerieke gegevens, waarvoor een aantal modellen beschikbaar zijn (grafieken en tabellen, lineaire en exponentiële groei, statistiek). Ook de historische ontwikkeling van wiskunde biedt een schat aan filosofische overwegingen en ontwikkelingen, die zowel in verband kunnen worden gebracht met geschiedenis of klassieke cultuur, als met algemene achtergrondvorming. Ten slotte biedt wiskunde ook duidelijke aangrijpingspunten om opgenomen te worden in de concrete uitwerking van een kunstzinnig project.

6.1 Wiskunde (en wetenschappen) in de geschiedenis; geschiedenis van wiskunde … ; wetenschapsfilosofie.

BETROKKEN DISCIPLINES

Wiskunde, geschiedenis, fysica, chemie, biologie, aardrijkskunde, moderne vreemde talen, klassieke talen (telkens afhankelijk van de gebruikte bronnen)

BESCHRIJVING

Op keerpunten in de geschiedenis hebben wiskunde en wetenschappen, wiskundigen en wetenschappers (en ze waren dan vaak ook 'filosofen' of is het omgekeerd) een belangrijke rol gespeeld. Voorbeelden zijn onder meer te vinden in de Griekse beschaving (ontwikkeling van de wetenschappelijke methoden met o.m. Plato, Aristoteles, Pythagoras, Euclides, Archimedes …), de zestiende en/of zeventiende eeuw (o.m. Descartes, Fermat, Pascal, Newton, …) en de overgang negentiende en twintigste eeuw (o.m. Whitehead, Russell, … en o.m. een aantal computerdeskundigen). Omdat wiskunde en wetenschappen vaak een gelijkopgaande groei hebben gekend, wordt hier vaak vanzelfsprekend vakoverschrijdend gewerkt.

Leerlingen kunnen gemakkelijk aan het werk vanuit
- de ontwikkeling van wiskunde of wetenschappen in een bepaalde periode,
- het onderzoek naar de inbreng en filosofische opvattingen van een wiskundige,
- de geschiedenis van een onderdeel van de wiskundekennis afhankelijk van het tijdsgebeuren, bijvoorbeeld de geschiedenis
  - van het functiebegrip,
  - van het getalbegrip en -eigenschappen (bijv. de stelling van Fermat en haar ontwikkelingen tot in de twintigste eeuw),
  - van de meetkunde (bijv. de axiomatiek van Euclides en haar invloed op het denken, de ontwikkeling van de niet-euclidische meetkunde),
  - van de ontwikkeling van de wiskundetaal zelf, bijv. de ontwikkeling van symboliek, het werken met formules, het gebruik van de logica, de etymologische studie van de ontwikkelingen van terminologie (bijv. vanuit Grieks en Latijn of precies vanuit de vernederlandsing die Simon Stevin bewerkstelligde).

Als de teksten in een bibliotheek kunnen gevonden worden, kan gewerkt worden aan de hand van oorspronkelijke (of als dusdanig overgeleverde) bronnen. Zowel de toenmalige invloed kan besproken worden als de consequenties op hedendaagse opvattingen (inclusief vakopvattingen).

Hierbij wordt het tijdskader en beoordelingskader van de tijdsgebonden elementen aangereikt vanuit geschiedenis (zie ook Vrije ruimte thema 1 bij geschiedenis omtrent zingeving). Hierbij kunnen talen een belangrijke rol krijgen voor de vertaling en de tekstinterpretatie van bronnen: klassieke talen voor de oudheid (met voor Grieks en Latijn de studie van oorspronkelijke teksten), de zestiende en zeventiende eeuw (wetenschapstaal was nog vaak Latijn); Frans, Duits en Engels voor teksten vanaf de zeventiende eeuw. Hierbij spelen wiskunde en wetenschappen een belangrijke rol, omdat uiteraard ook de inhouden moeten begrepen worden.

WERKVORMEN

Literatuurstudie. Uitdieping van een gekozen thema.
Werkstuk via begeleid zelfstandig werken.
Rapportering d.m.v. afgewerkte tekst en presentatie in de klasgroep, al of niet gecombineerd met het gebruik van een logboek of met een presentatie van een portfolio.

BRONNEN/MATERIAAL

Beckers, D., Smid, H. J., Praktische opdrachten en de geschiedenis van de wiskunde, TU Delft, KU Nijmegen, 1998.
Beukers, F., Pi, de geschiedenis van pi, Utrecht, Epsilon uitgaven, 2000.
Bouwman, N., Kalle, C., Het gebruik van wiskunde in de Islam, Utrecht, Epsilon uitgaven, 2002.
De Smit, B., Top, J., e.a., De speeltuin van de wiskunde, Beek, Natuurwetenschappen & Techniek, 2003.
Devlin, K., Wiskunde, Wetenschap van patronen en structuren, Wetenschappelijke bibliotheek, Beek, Segment, 1998.
Glas, E., De mathematisering van natuur, techniek en samenleving, Leuven, Garant, 1991.
Goossens, W., Over wetenschap, Leuven, Garant 1991.
Guedj, D., De stelling van de papegaai, Ambo, 1999.
Mankiewicz, R., Het verhaal van de wiskunde, Abcoude, Uniepers, 2000.
Stewart, I., Over sneeuwkristallen en zebrastrepen, Abcoude, Uniepers, 2002.
Struik, D. J., Geschiedenis van de wiskunde, Utrecht, Het Spectrum, 1990.

Garfunkel S., For all practical purposes, New York, Freeman & cy., 1991.
Johnson, A., Classic Math, history topics for the classroom, Palo Alto, Dale Seymour Publications, 1994.
Kline, M., Mathematics in western culture, London, Pinguin Books, 1990.
Smith, C. J., History of mathematics, Volume I en II, New York, Dover Publications, 1958.

The Mac Tutor History of mathematics archive op www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/
History of mathematics by subject op aleph0.clarku.edu/%7Edjoyce/mathhist/subjects.html
Lectures on history of mathematics op www.math.tamu.edu/~don.allen/history/m629_97a.html
Mathematicians of the seventeenth and eighteenth centuries op www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/RBallHist. html

6.2 Digitale codering van informatie

BETROKKEN DISCIPLINES

Wiskunde, fysica, chemie, economie, moderne vreemde talen

BESCHRIJVING

Heel wat informatie wordt doorgegeven via telecommunicatie en informatiedragers. Zo kan je al betalingen uitvoeren via het internet. ‘Maar is dat wel veilig’ hoor je dan. De informatie moet op een of andere wijze gecodeerd en beveiligd worden (allereenvoudigst uitgedrukt, omgezet in eentjes en nulletjes, die dan op een of andere wijze ook 'fysisch' moeten vertaald worden). Hoe werkt dit wiskundig en fysisch?

De beschikbaarheid van informatie op het wereldwijde web schept problemen van betrouwbaarheid (verlies van informatie), beschikbaarheid (wie heeft toegang tot welke informatie), beveiliging (bank-, kredietkaarten) … Hoe gaat dit in zijn werk? En hoe vermijdt men dat krakers beveiligde informatie verwerven?

We maken veelvuldig gebruik van informatiedragers zoals CD en DVD, digitaal fotomateriaal en het gebruik van de informatie van het internet. Met deze informatie gaat wel eens iets fout. Maar waarom klinkt bijv. een muziekstuk dan toch zo 'perfect zuiver'? In de wiskunde wordt onderzocht hoe je op ‘een slimme manier’ extra data kunt meesturen (coderen) en hoe je uit het ontvangen signaal het correcte oorspronkelijke signaal weer vindt (decoderen) en dus welke correctiemechanismen worden gehanteerd.

Het onderzoek kan gaan naar de specifiek wiskundige aspecten, maar wordt best gekoppeld aan de beschrijving van de effectieve uitvoering van de (wiskundige) denkstappen met behulp van fysica en chemie. Reglementering en andere aspecten van beveiliging kunnen vanuit bijv. economie aangebracht worden. Moderne talen kunnen hier bij betrokken worden voor vertaling van opgezochte informatie, die vooral op het internet beschikbaar is.

WERKVORMEN

Opzoeken en selecteren van studiemateriaal.
Werkstuk via begeleid zelfstandig werken.
Rapportering d.m.v. afgewerkte tekst en presentatie in de klasgroep.
Rapportering van de stappen en moeilijkheden in het onderzoeksproces d.m.v. een logboek.

BRONNEN/MATERIAAL

De Bruyn, K., Van letterspel tot rekenwerk of ... hoe de cryptografie evolueerde van bij de Lakedaemoniërs tot in de huidige computerera, in Wiskunde en Onderwijs 37, 1984, pp.235-254.
De Bruyn, K. en Laeremans, A., Hoe veilig zijn elektronische betalingen?, Wetenschapsweek 1998, EHSAL Brussel.
De Smit, B., Top, J., e.a., De speeltuin van de wiskunde, Beek, Natuurwetenschappen & Techniek, 2003.
Comap, Principles and Practice of Mathematics, Springer, 1997.
‘Foutje, dat verbeteren we toch’ op www.win.tue.nl/~jessers/aansluiting/Foutjedownloaden.htm
‘Wiskunde in je CD-speler’ op www.math.kun.nl/medewerkers/grooten/downloads/tweedaagse.pdf

6.3 Kunst en wiskunde

BETROKKEN DISCIPLINES

Wiskunde, geschiedenis, esthetica, fysica, chemie, Nederlands, moderne vreemde talen, klassieke talen (telkens afhankelijk van bronnen), muzische vorming, plastische opvoeding.

BESCHRIJVING

Sinds mensenheugenis is er een duidelijk verband tussen wiskunde en kunst. Zowel in de schilderkunst, als de bouwkunst, de muziek, … kan de invloed van mathematisch 'denken' onderzocht worden. O.m. patronen, vlakverdelingen, verhoudingen (i.h.b. bij onderzoek van de gulden snede in de natuur, de beeldende kunst en de architectuur; bij composities in de schilderkunst, bijv. da Vinci, Rubens, Ingres, David, Seurat, Verstockt). De ontwikkeling van perspectief en het weglaten daarvan. Het gebruik van symmetrie, transformaties (Moorse kunst, bijv. Alhambra in Spanje), curven (bijv. in glasramen, in Jugendstil). 'Strikt geometrische' ontwikkelingen zoals in Bauhaus, bij Le Corbusier, Rietveld, Gaudi, ….

In de muziek kan aandacht besteed worden aan de opbouw van tonen (frequenties, trillingen, lengte van snaren of blaasinstrumenten …), intervallen (bijv. octaven, pythagorische diatonische toonladder) …, het gebruik van reeksen in bepaalde partituren (transformaties). De elektronische muziek, en de weergave via elektronische middelen kunnen jongeren wellicht aanspreken. Hier zou zelfs aandacht kunnen besteed worden aan het brengen van informatie op moderne beeld- en klankdragers als CD en DVD (zie ook thema 2). Bij muziek sluit ook dans en ballet aan, waarbij figuren vaak gedanst worden op geometrische patronen (cirkels, spiralen, gulden snede, rijen van Fibonacci).

Het thema kan op velerlei wijzen worden aangepakt. Zo kan men bepaalde aspecten bestuderen, zoals symmetrie (zie voorbeeld Escher), perspectief (zie voorbeeld), toepassing van gulden snede, curvenverbindingen (cf. Jugendstil).

<u>Wiskundige transformaties bij Escher</u>

Het is algemeen bekend dat de mens een natuurlijke affiniteit heeft met symmetrie. Er zijn bijzonder veel kunstwerken bekend waarvan het overduidelijk is dat de kunstenaar zich heeft laten leiden door meetkundige principes. Een bekend voorbeeld van zo'n kunstenaar is Escher.
Enkele bestaande kunstwerken onderzoeken op meetkundige elementen.
Een eigen wiskundig kunstwerk ontwerpen.

<u>Perspectief</u>

Verschillende soorten perspectief. Verschillende ruimtelijke voorstellingen. Verhoudingen.
Lichtinval, schaduwwerking vanuit verschillende soorten lichtbundels.
Geschiedenis van de perspectief.

<u>Gulden snede</u>

Een aantal kunstwerken (schilderijen, gebouwen, beeldhouwwerken) onderzoeken op de toepassing van de gulden snede.

<u>Meetkunde van de glasramen</u>

Vlakverdelingen en curvenverbindingen.

<u>Wiskundige kunst maken</u>

Wat maakt een kunstwerk tot een 'wiskundig' kunstwerk? En hoe maak je een 'wiskundig' kunstwerk? Is het voldoende als er op de één of andere manier geometrische figuren (cirkels, vierkanten, kubussen, enz.) in verwerkt zijn? Een inventaris maken van een aantal mogelijkheden (verhoudingen, gulden snede, vlakverdeling, symmetrie, iteratie …).

Een kunstwerk maken geïnspireerd door de wiskunde en dat aspect toelichten.
Het onderzoek kan resulteren in beeldende opdrachten (zie ook thema’s plastische opvoeding):
- geometrische composities: tangram, pictogrammen, toepassingen op logo’s, e.a.;
- tapijt of decoratief paneel: (repetitieve kunst en fractalen) element in ritmische ordening herhalen;
- toepassingen op wiskundige begrippen voor handboek wiskunde;
- ritmische composities in bas-reliëf (klei of karton);

- composities opbouwen via ICT;
- ruimtelijke opdracht: ontwerpen van een maquette van een toren.

Fractalen

Het kunstzinnig zichtbaar maken van wiskundige functies en iteratieprocessen in het complexe vlak.

WERKVORMEN

Literatuurstudie, Keuze van een thema.
Werkstuk via begeleid zelfstandig werken.
Rapportering d.m.v. afgewerkte tekst of portfolio en presentatie in de klasgroep.
Portfolio van wiskundig besproken kunstwerken.
Ontwerpen en/of uitvoeren van een kunstvoorwerp.

BRONNEN/MATERIAAL

Ernst, B., Bomen van Pythagoras. Variaties van Jos De Mey, Amsterdam, Aramith uitgevers, 1985.
Devlin, K., Wiskunde, Wetenschap van patronen en structuren, Wetenschappelijke Bibliotheek, Beek, Segment, 1998.
Hoveijn, I., Scholtmeijer, J., Fractals, Utrecht, Epsilon Uitgaven, 2001.
Jansen S., Adolphe J. M., e.a., Rosas, Anne Teresa De Keersmaeker, als en als verwondering, Renaissance du Livre, Tournai, 2002; DVD:
De Mey T., Rosas fase, C-Sals, Editions à voir, 2002.
Kleijne, W., Konings, T., De gulden snede, Utrecht, Epsilon Uitgaven, 2000.
Lauwerier, H., Fractals, Bloemendaal, Aramith, 1987.
Mankiewicz, R., Het verhaal van de wiskunde, Abcoude, Uniepers, 2000.
Pedoe D., Perspectief doorzien, meetkunde als thema in de kunst, Amsterdam, Aramith uitgevers, 1988
Stewart, I., Over sneeuwkristallen en zebrastrepen, Abcoude, Uniepers, 2002.
Van de Craats, J., De juiste toon, Utrecht, Epsilon uitgaven, 2003.
Van den Broeck L., Spiegelanamorfosen in Uitwiskeling, 15/4 p. 14-40.
Verweij, A., Kindt, M., Perspectief, hoe moet je dat zien?, Utrecht, Epsilon Uitgaven, 1999.

Doeboeken, Leiden, Stichting 'Vierkant voor wiskunde':
Fibonacci-getallen en de gulden snede.
W. A. Mozart, Muzikaal Dobbelspel I-II.
Tegels leggen, en dergelijke.
Zelf Escher-achtige vlakvullingen ontwerpen
Lijnen in perspectief.

Garland, T. H., Kahn, C. V., Math en Music, Harmonious Connections, Palo Alto, Dale Seymour Publications, 1995.
Garland, T. H., Fascinating Fibonaccis, Palo Alto, Dale Seymour publications, 1987.
Martin Cundy, H., Rollett, A. P., Mathematical Models, Oxford, Tarquin publications, 1989.
Sakles, M., Source Book of problemes for geometry, Industrial design and architectal ornament, Palo Alto, Dale Seymour publications, 1994.

Algemene sites
perso.unifr.ch/michael.beer/mathandmusic.htm
www.aps.nl/wiskunde en dan 'good practice'
Wiskunde en kunst op www.arsetmathesis.nl/
Art et Maths op www.mathkang.org/cite/expo2000.html
Visual Mathematics op members.tripod.com/vismath/mart.htm
mathforum.org/mam/03/
Puzzels, spellen en objecten gerelateerd aan natuurkunde, wiskunde en logica op www.arabesk.nl/nederlands.html

De gulden snede
www.arsetmathesis.nl/arthesis/mondriaan.htm
www.phys.tue.nl/TULO/info/guldensnede/architectuur.html
www.nvvw.nl/ontpyth.htm
www2.lokv.nl/bronnenbundels/1994/1994_33.htm

Wiskunde achter de kunst van…

wwwpa.win.tue.nl/wstomv/publications/Waaier-Koos.pdf
www.rinusroelofs.nl/index.html
www.georgehart.com/sculpture/sculpture.html
web.inter.nl.net/hcc/Hans.Kuiper/nlindex.htm
www.mcescher.nl/

6.4 Mathematiseren en oplossen van problemen

BETROKKEN DISCIPLINES

Alle vakken

BESCHRIJVING

Probleemoplossende vaardigheden zijn belangrijke vaardigheiden die in vele situaties gehanteerd kunnen worden. Vaak is er in een geïsoleerde vakaanpak weinig ruimte om hier uitgebreid op in te gaan. Precies het multidisciplinaire karakter van de vrije ruimte-opdrachten kan deze ban doorbreken. Dit onderwerp heeft de initiële bedoeling ruimte te scheppen voor de ontwikkeling van deze vaardigheden. De wellicht onvermijdelijke inhoudelijk aanpak moet hierin ondergeschikt zijn aan het reflecteren over de probleemoplossende vaardigheden zelf en het verwervingsproces ervan. Wiskunde kan hierin als modelvormende discipline een centrale rol vervullen.

Leerlingen verwerven 'probleemoplossende vaardigheden' maar door effectief problemen aan te pakken. Deze problemen kunnen uit allerlei situaties ontstaan in alle vakken. Zo worden leerlingen hiermee geconfronteerd als dergelijke problemen binnen wiskunde kunnen aangepakt worden, ook als ze vakoverschrijdend zijn.

Een aantal problemen zijn inderdaad mathematiseerbaar. Dat wil zeggen dat de leerlingen door hun wiskundekennis adequaat aan te wenden een beschrijvingsmodel kunnen aanwenden of opstellen, en daardoor de complexiteit van de situatie kunnen vereenvoudigen. Daartoe moeten ze het probleem vlot kunnen onderzoeken of analyseren en er de wiskundige elementen van herkenen en onderscheiden. Door het probleem met een wiskundig model te beschrijven kan het verhelderd worden.

Bij de probleemstelling en -oplossing gebruiken de leerlingen heuristiek die vaak transfereerbaar is naar andere probleemoplossende situaties ook binnen andere vakgebieden. De inhouden zijn hier slechts ondersteunend voor het ontwikkelen van deze probleemoplossende vaardigheden.

Zo kunnen leerlingen onder meer leren

- een goede voorstelling van een probleem te maken, o.m. herkenbaarheid van een probleem, herkenbaarheid van wiskundekennis;
- de relaties binnen het probleem te analyseren, bijv. noodzakelijke en overbodige informatie onderscheiden, bijkomende informatie zoeken;
- een oplossingsplan op te stellen als nodig, bijv. het probleem opsplitsen in deelproblemen, een restrictie maken op de probleemstelling (i.c. het beperken van onderdelen om een wiskundige beschrijving mogelijk te maken), een hypothese formuleren en ze toetsen;
- adequaat hulpmiddelen in te schakelen, bijv. vakspecifieke informatie, vademecum, ICT-gebruik;
- oog te hebben voor de interpretatie van resultaten;
- een gecontroleerde houding te ontwikkelen van terugkijken zowel op de fase van het stellen en/of het analyseren van het probleem, als die van het effectief oplossen;
- na te denken over de gevolgde oplossingsweg en hieruit conclusies te trekken naar de aanpak van een volgende probleem, bijv. hun kennis verhogen of beter structureren, bepaalde vaardigheden oefenen, betere kennisschema's uitwerken, onderdelen herhalen.

Leerlingen kunnen inzien dat de vaardigheden verworven bij de aanpak van problemen binnen de wiskundevorming ingezet kunnen worden bij het oplossen van andere problemen. Zo kan een onderzoekende houding aangewend worden in elk probleemproces (bijv. verzamelen, aanvullen van informatie, opzoeken of herhalen van kennis, kritische houding ten aanzien van informatie). Zo ontwikkelt een wiskundige probleemaanpak het doorzettingsvermogen en de zin voor nauwkeurigheid. Een houding van systematisch reflecterend terugkijken op een oplossingsproces kan leren fouten te vermijden en bij te sturen. Daardoor zal de tevredenheid over de uitvoering van een opdracht toenemen, en van daaruit kan het geloof in de eigen capaciteiten en het zelfvertrouwen groeien. Deze houdingen zijn van fundamenteel belang bij het leren zelf, i.c. een onderzoekende houding, doorzettingsvermogen, geloof in eigen kunnen, gecontroleerd uitvoeren van een plan, reflecterende feedback ….

Een aantal opdrachten kunnen individueel gegeven worden. Maar het lijkt ook zinvol ruimere probleemstellingen te behandelen in de vorm van groepstaken. Hierbij zullen leerlingen over hun probleemaanpak moeten communiceren. Hiermee zal hun (bijv. wiskundige) taalvaardigheid aangescherpt worden (bijv. nauwkeurigheid, correct gebruik wiskundige begrippen). En zoals bij elke vorm van groepswerk bestaat hier de kans op (verdere) ontwikkeling van de sociale vaardigheden (van onderlinge communicatie, spreken en luisteren, openheid, respecteren van afspraken, respecteren van elkaars persoon, aanbrengen van en/of aanvaarden van een andere mening).

In de praktijk kunnen allerlei situaties aanleiding zijn tot interessante probleemstellingen.
- Problemen aangereikt binnen vakken (en met een wiskundige component).
- Maatschappelijke problemen en situaties:
  - statistische informatie, enquêtes;
  - maatschappelijke gedragingen (rijgedrag, rookgedrag, drugs, besteding inkomen …);
  - milieuproblematiek;
  - samenlevingsproblemen;
  - verkiezingen;
  - verwerking en kritische bevraging van informatie in televisie, kranten en tijdschriften.

WERKVORMEN

Effectief (aangeboden of zelf voorgestelde) problemen aanpakken, individueel of in groep.
Portfolio van onderzochte en/of opgeloste problemen.

BRONNEN/MATERIAAL

- **Roels J., De Bock D. e.a.,** Wiskunde vanuit toepassingen, Leuven Acco, 1990.

- **Peterson J.,** Technical Mathematics, Albany, Delmar Publishers, 1994.
- **Schoenfeld A.H.,** Mathematical problem solving, San Diego, Academic press, 1985.
- **Stewart J.,** Precalculus, Pacific Grove, Brooks/Cole, 1998.
- **Waner S., Costenoble S.,** Calculus applied to the real world, New York, Harper Collins, 1996.
- **Comap**, Principles and Practice of Mathematics, Springer, 1997.

6.5 Bijkomende suggesties

WISKUNDE MET WETENSCHAPPEN, (AARDRIJKSKUNDE, FYSICA, CHEMIE, BIOLOGIE)

Cartografie

Er zijn verschillende manieren om van een bolvormig oppervlak een vlakke kaart te maken, vanuit verschillende eisen, bijv. afstanden op de kaart moeten evenredig zijn met de werkelijke afstanden, hoeken op de kaart moeten gelijk zijn aan de werkelijke hoeken, de kortste afstand tussen twee punten moet een rechte lijn zijn. Studie van de mogelijkheden, met een strengere wiskundige aanpak.

Opmeten en in kaart brengen van een terrein

Voor een terrein wordt een nieuwe bestemming voorzien. Het moet opgemeten worden en precies in kaart gebracht worden (beplanting, weg, beschadiging). Hoekmeting, afstandsmeting, triangulatie voor tussenafstanden en voor controle. De bodem kan deels onderzocht worden op kwaliteit en/of verontreiniging.

Ontwikkeling van populaties

Verzamelen en in kaart brengen van bevolkingsgegevens. Wiskundige voorstellingstechnieken.

Voorbeelden

Groei bevolkingsaantallen
Demografische modellen en de wiskunde die daarbij gebruikt wordt.
Aan de ene kant maken we ons zorgen over hoe snel de wereldbevolking groeit. Aan de andere kant wordt geklaagd over een tekort aan mensen. Men maakt zich bijvoorbeeld ook zorgen over de betaalbaarheid van pensioenen, sociale voorzieningen … Op basis van allerlei wiskundige modellen worden bevolkingsvoorspellingen gedaan. Dezelfde modellen, die ook steeds maar waarschuwen over hoe snel de aarde overbevolkt zal raken.

Evolutie van een populatie
Bijv. met gebruik van Lesliematrices.

Banen van planeten en kunstmanen

Naar aanleiding van bepaalde hemelverschijnselen (bijv. kometen, bepaalde onderlinge posities) een elementaire studie van banen. Informatie verzamelen over kunstmanen ….

De tijdmeting door de eeuwen heen

Van het ontdekken van de zonnecyclus, het gebruik van tijd- en hoekmaten, het ontwikkelen van instrumenten om de tijd te meten en af te lezen (bijv. zonnewijzers), tot onze gesofisticeerde digitale klokken.

Ouderdomsbepaling - C14-methode

WISKUNDE MET ECONOMIE EN WETENSCHAPPEN (EN EVENTUEEL TAAL EN VOET)

Dataverwerking en interpretatie

In heel wat situaties van enquêtes en bevragingen kan wiskunde het middel leveren voor statistische verwerking en interpretaties.

Voorbeelden

Opstellen en verwerking van een schoolenquête onder de leerlingen

Overgewicht
Een maatstaf voor overgewicht is de BMI (Body Mass Index). De leerlingen kunnen een formule opstellen en achtergronden (bijv. consequenties) zoeken. Ze kunnen een onderzoek doen bij een bepaalde doelgroep.

Beleggen met wiskunde

Beschrijving van de situatie op een aandelenbeurs. Schommelen van koersen, de graadmeter van een beursdag (beursindex). Een eigen beleggingsportefeuille maken en opvolgen.

Huren of kopen

Wie een woning zoekt kan een huis (of appartement) huren of kopen. Wat is op verschillende termijnen het voordeligst. Welke aspecten spelen een rol? (Bijv. belastingvoordeel, onderhoud, soorten hypotheken, bijkomend lenen voor herstelling, inrichting …, huurstijging.) Een vergelijking maken voor verschillende termijnen.

Hypotheek gratis door inflatie?

Hypotheken lijken bijna gratis door de combinatie van oplopende inflatie met de hypotheekrenteaftrek. De gemiddelde hypotheekrente van dit moment; de inflatie van dit moment; het gemiddelde belastingtarief waarbij hypotheekrente wordt afgetrokken.

Kortste wegennet

Om kosten en het milieu te sparen is het relevant om bij een verplaatsing langs een aantal met elkaar te verbinden plaatsen een weg te volgen met een minimum aan totaal aantal kilometers. In schema brengen van de verbindingen met grafen.

WISKUNDE MET TAAL

Het opbouwen van wiskunde- en wetenschapstaal, die veel strikter is dan omgangstaal, (met o.m. het universele karakter van een symbolentaal; logische samenhang; gebruik van taaltechnieken in wiskunde en wetenschappen, bijv. signaalwoorden, kernwoorden, synthese -en structureringstechnieken).

WISKUNDE ALS BASIS VAN STATISTISCHE VERWERKING EN KANSBEREKENING

Correlatie

Verbanden tussen gemeten grootheden worden kwantitatief uitgedrukt met behulp van correlatie- en regressierekening. Het is een krachtige methodiek die echter bij een fatsoenlijk aantal meetgegevens een rekenkracht vergt. Daarvoor wordt nu de computer ingeschakeld die over veel meer benaderingsmethoden beschikt. De gegevens van een gekwantificeerde enquête kunnen verwerkt worden.

Kiezen en wiskunde

- Blijkbaar zijn er verschillende kiessystemen (ook wel: kiesstelsels) mogelijk, elk met z'n eigen voor- en nadelen. Is er een kiesstelsel te bedenken of bestaat er al een kiesstelsel dat een zo eerlijke mogelijke uitslag oplevert? Met eerlijk wordt dan bedoeld een uitslag waar een zo'n groot mogelijk percentage van de stemmers tevreden mee is.
- Verwerking van de kiesgegevens en vergelijking met de voorspellingen in kranten en televisie. De werking van de voorspellingsmechanismen bij de zogenaamde 'exitpolls'.

WISKUNDE EN MILIEUPROBLEMATIEK

Wegwerpmaatschappij

Als we de reclame volgen moeten we geregeld een aantal dingen in onze omgeving vernieuwen en de oude wegwerpen. Maar is dat goed voor het milieu? Aspecten als milieuvriendelijkheid en gebruiksgemak kunnen afgewogen worden tegen kostprijs met inbegrip van de afvalverwerking of stokkering.

Economische of ecologische verpakking

Vele artikelen zoals groente, frisdank, verf en tennisballen worden verpakt in blik. De fabrikant wil de kosten zo laag mogelijk houden. Daarom moet worden uitgezocht welke invloed de afmetingen van de blikken op de kosten hebben. Minimalisering van de kosten (in functie van oppervlakte, lasnaden …).

Verpakking, glas, pet, blik …

Statistische verwerking van de gegevens over afvalverwerking.

Milieu in huis

Energieverbruik wordt duurder, maar toch blijft de consument meer energie verbruiken. Ondanks een aantal maatregelen neemt het verbruik van energie niet af, want onze apparaten zijn zuiniger en gebruiksvriendelijker geworden en dat veroorzaakt precies een toename van het gebruik ervan.
Onderzoek van het energieverbruik (bijv. gemiddelde verbruik; verbruik van apparaten), eventueel maatregelen om ze terug te dringen (spaarlampen, ecotaks …).

Windenergie

Al geruime tijd probeert men energie op te wekken met windkracht. Hoe groter de wieken van de windmolen, hoe groter het vermogen dat kan worden opgewekt. Onderzoek van deze verbanden en het opstellen van een formule hiervoor.
Vergelijking van verschillende soorten energie op kost, milieueffect ….

Files

Files ontstaan als het te druk is op de wegen (vooral tijdens de ochtend- en avondspits). Je krijgt namelijk een file als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid op een bepaalde plaats wordt geremd. Zo'n file is niet nodig als iedereen namelijk de juiste doorstroomsnelheid kiest. Een algebraïsch model opstellen voor het fileprobleem.

WISKUNDE, SPORT EN LICHAMELIJKE OPVOEDING

Puntentelling atletiek

Bij atletiektoernooien worden zogenaamde meerkampen gehouden. Per onderdeel worden punten toegekend aan de prestaties en de uiteindelijke klassering wordt bepaald door die punten bij elkaar op te tellen. Er zijn verschillende manieren waarop de prestaties kunnen worden omgerekend naar punten.
Het onderzoek betreft een aantal verschillende methoden die gebruikt kunnen worden om het klassement van een meerkamp vast te stellen. Zo zijn er de genormeerde scores, waarbij de prestaties van de atleten worden beschouwd als steekproef uit een normale verdeling (Gausscurve), die wordt omgerekend naar de standaardnormale verdeling.

De ontwikkeling van wereldrecords

Onderzoek van het verloop van wereldrecords en voorspellingen over het al of niet bestaan van een uiterste limiet. Invloed van nieuwe ontwikkelingen (zoals het 'haaienpak' bij het zwemmen) op het verloop van een wereldrecord (bijv. met sprongen).
Grafiek, toenamediagram, extrapolatie, uiterste grens?

Ruimtefiguren en hun praktische gebruik

De bal is rond
Het ontwerpen van een zo rond mogelijke bal. Het probleem is meteen duidelijk als je een voetbal bekijkt. Hij bestaat namelijk uit aan elkaar genaaide vijfhoeken en zeshoeken. Daarom is het geen zuivere bol, ook niet als je hem keihard oppompt.

Omgaan met parameters bij het lichamelijk functioneren

Onderzoek van een aantal metingen die op het lichaam kunnen uitgevoerd worden om bijv de conditie of risicofactoren vast te stellen (bijv. body mass index, cardiovasculaire risicofactoren, opname en gebruik van ECG, EEG, EMG).

7 EVALUATIE

Het is niet moeilijk in te zien dat leerprocessen beter (vlotter) zullen verlopen als de leerling regelmatig informatie krijgt over zijn vorderingen en als de leerkracht een goed inzicht heeft in de aard van de eventueel optredende problemen. Evaluatie is daartoe een uitgelezen middel en vormt aldus een belangrijk onderdeel van het onderwijsleerproces.

SCHOOLCULTUUR

De gehanteerde terminologie in verband met evaluatie, de verschillende opvattingen over de functie, de organisatievorm, de rapportering, ... zijn echter *niet eensluidend*. Deze verscheidenheid wordt geïllustreerd door de verschillende betekenissen die bijvoorbeeld gegeven worden aan termen als toets, examen, permanente evaluatie, formatieve evaluatie, dagelijks werk, enz. Daarom is evaluatie van leerlingen en wat ermee gebeurt vaak verbonden met *een schooleigen cultuur*. Evaluatie van wiskunde moet hierin uiteraard passen, omdat evaluatie naar de leerlingen toe over de vakken en de jaren heen wel een zekere eenvormigheid moet vertonen.

FUNCTIES VAN EVALUEREN

Evalueren is het *waarderen* van iets of iemand. De term evalueren wordt in het onderwijs gebruikt voor waardering als deze niet 'uit de lucht komt vallen', maar opgenomen is in de rij meten, waarderen, beslissen. Evaluaties gebeuren dus intentioneel. Evaluaties zijn niet vrijblijvend, omdat ze leiden tot een bepaalde *beslissing*. De functies van evalueren zijn verbonden met de aard van de beslissingssituaties.

Evaluatie kan de functie hebben van *resultaatsbeoordeling*. Over een periode van langere duur wordt het rendement van het onderwijsleerproces vastgesteld. Meestal gebeurt dit aan de hand van examens of summatieve toetsen. Deze vorm is allicht het meest vertrouwd.

Evaluatie kan de functie hebben van *plaatsing, oriëntering en selectie*. Evaluatiegegevens worden bijvoorbeeld gebruikt om leerlingengroepen samen te stellen, om differentiatie mogelijk te maken, om leerlingen te oriënteren naar de meest geschikte onderwijsvorm en studierichting, of toe te laten tot een bepaalde studierichting.

Evaluatie kan de functie van *diagnose* krijgen. Diagnose kan elke activiteit van de leerkracht zijn die erop gericht is een beeld te krijgen van de vorderingen van de leerlingen. Op de vaststelling van de aard en de oorzaak van de leermoeilijkheden kan dan een plan volgen om dit tekort te remediëren of bij te sturen.

In dezelfde zin kan een diagnose opgemaakt worden van de vorderingen van de leerlingen in verband met *redeneer- en probleemoplossende vaardigheden*. Vanuit een goed inzicht in de mogelijkheden en feitelijke situatie kunnen de leerlingen beter begeleid worden in hun leerproces.

Evaluatie kan de functie krijgen van *sturing van het onderwijsleerproces*. Er wordt informatie verzameld over de vorderingen van de leerlingen om het leerproces beter te organiseren. Dit soort evaluatie gebeurt voortdurend tijdens het leerproces. De leerling krijgt voortdurend informatie over zijn vorderingen, de leerkracht krijgt voortdurend informatie over het verloop van het leerproces.

Een bijzondere plaats wordt gegeven aan het evalueren van de *beginsituatie*. Dit kan leiden tot een georganiseerde herhaling met een gedifferentieerde aanpak. Het is zinvol gerichte herhalings- of remediëringspakketten te voorzien, die door de leerlingen zelfstandig worden verwerkt.

Evaluatie is medebepalend voor de 'beslissing' op de scharniermomenten van het lesverloop. De verkregen informatie kan door de leerkracht gebruikt worden om zijn didactisch handelen te beoordelen en te sturen. Bijsturing kan betrekking hebben op een aantal uiteenlopende factoren, bijvoorbeeld de leerinhoud kan te moeilijk zijn, de doelstellingen te hoog gegrepen, het tempo te hoog (of te laag), het beginniveau kan verkeerd ingeschat zijn, er kunnen problemen zijn van motivationele aard, ... De leerkracht kan hierop inspelen door bijvoorbeeld een bijkomend voorbeeld te geven, de formulering van een definitie of een eigenschap te hernemen, de voorziene oefeningen te beperken of aan te vullen. Sturing kan betekenen dat de leerkracht *gedifferentieerd* ingaat op de mogelijkheden van de leerlingen met aangepast oefeningenmateriaal, met remediëring, met ondersteuning van het leerproces door het leren van wiskunde te bespreken. Dergelijke sturing kan ook positief onderscheidend werken, bijv. door aan bepaalde leerlingen optimale ontwikkelingskansen te bieden door hen te confronteren met meer open problemen, meer eigen tips over hun oplossingsproces, gerichte aanwijzingen over heuristische methoden, ….

Evaluatie in de brede betekenis heeft zowel betrekking op het beoordelen van de leerlingen en de beslissingen die hieraan verbonden worden, als op de informatie over het verloop van het onderwijsleerproces zowel voor de leerling als voor de leerkracht. Ze kan betrekking hebben op een sanctionering met ingrijpende gevolgen of op een meer vrijblijvende begeleiding.

VAN EVALUATIE NAAR ZELFEVALUATIE

In de informatieve functie maakt evaluatie integrerend deel uit van het onderwijsleerproces. Belangrijk is alleszins dat de leerling *zelf informatie krijgt over zijn leren*, zowel wat betreft het proces als het eindresultaat. Zo zal in het leerproces van probleemoplossende vaardigheden niet slechts de beoordeling van het eindresultaat belangrijk zijn. De informatie over zijn wijze van aanpakken en de vorderingen daarin geeft de leerling inzicht in de nodige bijsturing.

Procesevaluatie is een aangewezen weg om leerlingen te leren vragen stellen bij de leerinhouden. In die zin is het een goede ondersteuning bij het verwerven van leervaardigheden. Procesevaluatie is een aangewezen weg om de leerling bewust te maken van de eigen mogelijkheden. In die zin en in het kader van het levenslang leren (waarbij niet alle vorderingen ‘getoetst’ zullen worden) kan vertrouwd worden met procesevaluatie de groei naar zelfevaluatie bevorderen. Een mogelijke ondersteuning wordt hier geboden door opdrachten waarbij de leerlingen zelf zinvol leren gebruik maken van een correctie- of een antwoordsleutel.

Een onderzoeksopdracht zal leiden tot een vorm van zelfstandig werken. Hierbij moeten de leerlingen oog hebben voor zelfevaluatie, vanuit het goed benutten van hun onderzoeks- en probleemoplossende vaardigheden doorheen heel dit proces. Dit is zeker een aanleiding om met behulp van een reflectieve aanpak terug te kijken op hun werk.

Het betrekken van leerlingen bij de evaluatie of fasen ervan, (bijv. co-evalueren, m.a.w. de leerling neemt deel aan de evaluatie; peerevaluatie, m.a.w. onderlinge evaluatie in een groep gelijken), het bespreken van evaluatiegegevens en het formuleren van werkpunten vanuit een gesprek kan de evaluatiegevoeligheid merkelijk aanscherpen. Het afsluiten van een leerproces, een werkopdracht, ... met een evaluerend terugkijken laat leerlingen toe zelf elementen van evaluatie in te brengen. Een dergelijke bespreking binnen een groepje verantwoordelijk voor een taak, bijvoorbeeld op basis van een observatielijst, geeft hen meer inzicht in het proces zelf, maar uiteraard ook in geven, krijgen, nuanceren en aanvaarden van feedback.

EVALUATIE VAN KENNIS EN INZICHT

De essentie van wiskundekennis is de kennis van en het *inzicht in begrippen en eigenschappen*. Dit houdt in: het kunnen geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden, het herkennen van het begrip of eigenschap in contextsituaties, het kennen van de betekenis ervan, het kennen van een formulering van een definitie of de eigenschap, het kunnen toepassen ervan in diverse contextsituaties.

Evaluatie van het inzicht in begrippen en eigenschappen zou de verschillende aspecten moeten onderzoeken. Het kennen van een eigenschap impliceert niet vanzelfsprekend dat ze kan *toegepast* worden en omgekeerd. Dit impliceert dat ook in de evaluatie *in de loop van het onderwijsleerproces* meer aandacht moet besteed worden aan deze aspecten, zoals bijvoorbeeld het begrijpen, het kunnen geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden, de formulering, het toepassen van de eigenschap.

Evaluatie zou er toe moeten leiden, dat de leerkracht nog tijdens het onderwijsleerproces informatie verwerft over de misverstanden over begrippen, eigenschappen en methoden bij de leerlingen. Ze kunnen dan sneller bijgestuurd worden. Voor een leerling is het belangrijk te weten op welk niveau een begrip moet gekend zijn en waar hij zich in het leerproces bevindt. Zo kan hij de aangepaste leermethode kiezen.

Van een aantal begrippen en eigenschappen kan gesteld worden dat ze tot de *parate kennis* van de leerlingen moeten behoren. Deze parate kennis moet dan ook als paraat getoetst worden en dus geregeld in de loop van het jaar. Kennis waarvan aanvaard is dat ze niet meteen paraat moet beheerst worden, maar bijvoorbeeld wel is opgenomen in een vademecum, kan getoetst worden met gebruik van het vademecum. Voorwaarde is natuurlijk dat leerlingen er ook buiten de evaluatiemomenten functioneel mee leren werken.

Over het algemeen wordt aangenomen dat in het geheel van de toetsing een goede spreiding van de leerinhouden over de verschillende beheersingsniveaus (kennis, inzicht en toepassing) wenselijk is.

EVALUATIE VAN VAARDIGHEDEN

In het leerplan wordt het verwerven van vaardigheden benadrukt. Ook op de evaluatie moet dit zijn weerslag hebben. Daarbij moet een vaardigheid als vaardigheid geëvalueerd worden. Het is zinvol een zogenaamde vaardigheidsanalyse te maken, d.w.z. een overzichtelijke lijst te maken van welke stappen leerlingen kunnen (moeten) zetten om de vaardigheid te verwerven of aan te wenden. Deze lijst wordt dan gebruikt om leerlingen in het leerproces (stapsgewijze) te observeren. Vanuit dergelijke feedback kan de leerling zich dan beter bijsturen.

De leerling moet wiskundige procedures, methoden en technieken behoorlijk en efficiënt kunnen uitvoeren. Dit betekent dat ook de *procedure* (bijvoorbeeld de verschillende stappen) moet geëvalueerd worden en niet slechts het eindresultaat. Hierin is ook ruimte voor evaluatie van de zelfcontrole van de leerling en voor het gecontroleerd uitvoeren (bijv. schatten, grootteorde, elementaire fouten vermijdend). Ook hier geeft de terugkoppeling die leerlingen krijgen over de uitvoering tijdens het leerproces zelf, hen sneller inzicht in hun fouten.

Voor de toetsing van vaardigheden kan overwogen worden een in de tijd gespreide toetsing uit te voeren. Dit betekent dat het bezitten van een vaardigheid niet afhankelijk gemaakt wordt van het bezit ervan op dat ene examenmoment.

In de evaluatie van vaardigheden neemt die van *probleemoplossende vaardigheden* een bijzondere plaats in. Aandacht voor het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden leidt tot het aanbieden van meer open gestelde problemen, meer aan (soms nieuwe) situaties gebonden vraagstukken, enz. Het oplossen van dergelijke problemen is een complex proces. Meer nog dan elders is feedback zowel *over het proces* als over het eindproduct belangrijk. De leerling zou informatie moeten krijgen over zijn kennis, en de vaardigheid waarmee hij die kan hanteren, over de wijze van vraagstelling, het gebruik van gegeven informatie, het formuleren van vermoedens, over de vaardigheid waarmee heuristische methoden gehanteerd worden, over de sturing van zijn oplossingsproces en de wijze van interpreteren en verifiëren van resultaten. Evaluatie van probleemoplossende vaardigheden heeft maar zin als *tijdens het proces* de wijze van werken van de leerling *systematisch, weloverwogen en voortdurend wordt opgevolgd*. Evaluatie kan het vertrouwen van de leerling in zijn mogelijkheden sterk beïnvloeden.
Maar ook de leerkracht krijgt belangrijke feedback, bijvoorbeeld over welke problemen uitdagend zijn, welke instructief, welke interesse wekken, welke niet succesvol zijn.

Naast probleemoplossende vaardigheden wordt aandacht besteed aan het ontwikkelen van reflectieve vaardigheden bij de leerlingen, d.w.z. het leren terug kijken op een proces dat ‘afgelopen’ is. En daarvan de leerkansen concretiseren. Het bewuster omgaan met dit leren resulteert in een netto effect bij een volgende opdracht. Voorbeelden van reflectieve vragen op het uitvoeren van een opdracht:

- Wat was de opdracht, heb ik het doel bereikt?
- Hoe is het proces concreet verlopen? De voorbereiding, de planning, de uitvoering, het besluit/antwoord?
- Welke concrete problemen deden zich voor? Hoe werd hiervoor een oplossing gevonden, uitgewerkt?
- Wat leert me dit voor de aanpak van een volgende opdracht?

EVALUATIE VAN ATTITUDES

In dit leerplan wordt gepleit voor het ontwikkelen van attitudes. Nog meer dan bij vaardigheden moet de leerkracht bij de evaluatie ervan oog hebben voor de individuele inspanning die de leerling doet om die doelen te bereiken. Enige omzichtigheid is geboden, want niet bij alle leerlingen is de spontane uitingsvorm de juiste weerspiegeling van de inzet. En sommige leerlingen hebben van nature uit meer tijd en inzet nodig om eenzelfde resultaat te bereiken.

Een hulpmiddel bij het evalueren van attitudes is een *observatielijst*, waarin een *aantal concrete gedragingen* opgesomd staat. Daarbij kan men een aantal niveaus van verwachting aangeven die beantwoorden aan een verbale uitdrukking voor de ‘beoordeling’. Zo komt men tot een categoriale beoordeling van attitudes, die de basis kunnen zijn voor feedbackgesprek met de leerling.

Zeker voor attitudes geldt dat terugkoppeling tijdens het leerproces de meest effectieve weg van bijsturen is. Aanmoediging zal meer vermogen dan neerbuigend afkeuren. Een verbale waardering kan naast een 'resultaat' voor de inhoudelijke toetsing een blijk van waardering zijn voor de inzet van de leerling.

ICT-HULPMIDDELEN

In de leerplannen is het gebruik van ICT-hulpmiddelen opgenomen, zowel voor illustratie en demonstratie van begrippen en eigenschappen, als voor het effectieve gebruik ervan door de leerlingen bij het uitvoeren van berekeningen, het onderzoeken van eigenschappen en het verwerken van informatie.

De evaluatie van onderdelen waarbij in de ontwikkelingsfase en de verwerkingsfase een rekenmachine, een grafische rekenmachine of een computer gebruikt werd, zal hieraan aangepast zijn. Dat betekent dat bij de toetsing hetzelfde materiaal ter beschikking van de leerlingen moet staan.

Het spontane en accurate gebruik van ICT wordt geëvalueerd als onderdeel van de nagestreefde vaardigheid.
Voorbeelden

- Het heeft geen zin leerlingen in de verwerkingsfase ICT te laten gebruiken en op de evaluatiemomenten manuele automatismen te verwachten.
- Bij observatie in de klas zal men leerlingen wijzen op inefficiënt gebruik.
- Op dezelfde wijze moet gewezen worden op inadequaat gebruik als leerlingen bijvoorbeeld tussenresultaten noteren, eventueel zelf terug invoeren, al of niet na afronding, wat merkwaardige rekenverschillen kan veroorzaken.
- Als de doelstelling het interpreteren van statistische gegevens is, zal men geen (evaluatie)tijd besteden aan het turven ervan, maar wel statistische software gebruiken.
- Met meetkundige software kan men een vermoeden laten onderzoeken, door de techniek van het verveelvoudigen (cf. het slepen van bepaalde punten). In dit geval is de computer echter een veredeld tekenblad, waarop de redenering wordt uitgevoerd. Ook voorheen moesten de leerlingen een tekening maken en maakte die deel uit van de evaluatie. Met het gebruik van een figuur op een machine kan dat dus evenzeer.

Bij dit soort evaluatie past wellicht een permanente evaluatie tijdens het leerproces zelf, dan wel de vaardigheid te testen met een reeks gekunstelde oefeningen.

In de observatie moet een onderscheid gemaakt worden tussen enerzijds de vaardigheid in het gebruik van het toestel (bijv. de vlotheid bij het intikken bij computergebruik) en anderzijds het inzicht in het gebruik van de toestelgebonden wiskundige werkwijze.

Bedieningsvaardigheid op zich kan niet het enige doel zijn van wiskundelessen. Binnen het ‘vak wiskunde’ mag bijvoorbeeld klaviervaardigheid geen hypotheek leggen op het gebruik van de computer bij berekeningen of dataverwerking. Voor wiskunde kan een relatief vlotte omgang met de machine volstaan. En die staat in functie van het wiskundige leerproces. Uiteraard zal een veelvuldig gebruik in de wiskundelessen bijdragen tot de algemene vlotheid. Er is geen principieel bezwaar tegen de beschikbaarheid van de handleiding van het toestel.

De evaluatie van deze vaardigheid moet vooral gezien worden als aanmoedigend met het oog op een vlotter verlopen van het wiskundige proces. Zo moet een evaluatie gespreid over het jaar een beeld geven van de vorderingen van de leerlingen en van hun effectieve vooruitgang. Dit impliceert ook dat de leerlingen voldoende oefenkansen krijgen. Het vlotte gebruik van een machine of software vraagt dus meer dan een incidenteel gebruik in de les. Dit vraagt van de school en de leerkracht een inspanning voor de leerlingen die niet zelf over het aangewezen materiaal kunnen beschikken.

Als men het gebruik van bepaalde werkwijzen met computer of rekenmachine als specifieke doelstelling heeft nagestreefd (bijv. gebruik bepaalde software, bepaalde functietoetsen), zal dit uiteraard deel uit maken van de evaluatie.

Overleg in de vakgroep is nodig om vertrouwd te worden met deze voor wiskunde ‘nieuwe’ evaluatiesituaties. Afspraken moeten gemaakt worden over de aangewezen evaluatievorm, de wijze van werken, de gestelde eisen, … en de afstemming tussen de leerkrachten onderling. Zo kan men afspreken het gebruik van ICT niet op het examen zelf te toetsen, maar bijvoorbeeld via de jaartoetsing, omdat ‘permanente’ of ‘gespreide’ evaluatie dan meer mogelijk wordt. Leerlingen moeten alleszins een duidelijk beeld krijgen van wat te verwachten is bij de evaluatie.

ORGANISATIE VAN DE TOETSING

In de organisatie van de toetsen bestaat een ruime verscheidenheid tussen de scholen. Hoe die ook gebeurt, belangrijk is dat ze aansluit bij de onderwijspraktijk. Dit wil zeggen dat ze moet aansluiten bij de doelstellingen en de verwerkingsniveaus die tijdens het leerproces en de verwerkingsopdrachten werden nagestreefd.
Wat betreft de criteria die aan toetsen als meetinstrument moeten worden opgelegd, zoals validiteit (meet de toets wat beoogd wordt te meten?) en betrouwbaarheid (is het resultaat een zo adequaat mogelijke weerspiegeling van het bereiken van de doelstellingen door de leerling?), wordt verwezen naar de geëigende literatuur.
Verder wordt aangenomen dat de evaluatie zich niet mag beperken tot enkele momenten. Geregeld toetsen (zowel mondeling als schriftelijk) laat toe adequaat in te spelen op de problemen die zich stellen. Wel mag verwacht worden dat leerlingen ook al grotere leergehelen leren beheersen, bijv. voor een ruimere summatieve toets.

8 OVEREENKOMST EINDTERMEN EN DOELSTELLINGEN

8.1 Eindtermen wiskunde - ASO derde graad

1 ALGEMENE EINDTERMEN

De leerlingen kunnen

1 wiskundetaal begrijpen en gebruiken.
2 wiskundige informatie analyseren, schematiseren en structureren.
3 eenvoudig mathematiseerbare problemen ontleden (onderscheid maken tussen gegevens en gevraagde, de relevantie van de gegevens nagaan en verbanden leggen ertussen) en vertalen naar een passende wiskundige context.
4 wiskundige problemen planmatig aanpakken (door eventueel hiërarchisch op te splitsen in deelproblemen).
5 bij het oplossen van wiskundige problemen kritisch reflecteren over het oplossingsproces en het eindresultaat.
6 voorbeelden geven van reële problemen die met behulp van wiskunde kunnen worden opgelost.
7 bij het oplossen van wiskundige problemen functioneel gebruik maken van ICT.
8 voorbeelden geven van de rol van de wiskunde in de kunst.
9 kennis, inzicht en vaardigheden die ze verwerven in wiskunde bij het verkennen, vertolken en verklaren van problemen uit de realiteit gebruiken.
10 * kunnen informatie inwinnen over het aandeel van wiskunde in een vervolgopleiding van hun voorkeur en in hun voorbereiding erop.

De leerlingen

11 * leggen een zin voor nauwkeurigheid aan de dag bij het hanteren en het toepassen van wiskunde.
12 * ontwikkelen zelfregulatie met betrekking tot het verwerven en verwerken van wiskundige informatie en het oplossen van problemen.
13 * zijn gericht op samenwerking om de eigen mogelijkheden te vergroten.

2 REËLE FUNCTIES

De leerlingen

14 lezen op een grafiek af:
- eventuele symmetrieën,
- het stijgen, dalen of constant zijn,
- het teken,
- de eventuele nulwaarden,
- de eventuele extrema.

De leerlingen kunnen

15 bij veeltermfuncties
- de afgeleide gebruiken als maat voor de ogenblikkelijke verandering
- met behulp van een intuïtief begrip van limiet het verband leggen tussen:
  - het begrip afgeleide,
  - het begrip differentiequotiënt,
  - de richting van de raaklijn aan de grafiek.

16 de afgeleide berekenen van de functies $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ en de bekomen uitdrukking veralgemenen naar functies $f(x) = x^n$ waarbij n een natuurlijk getal is.
17 de som- en de veelvoudregel toepassen om de afgeleide functie te bepalen van een veeltermfunctie.
18 bij veeltermfuncties de afgeleide functie gebruiken voor het bestuderen van het veranderingsgedrag en voor het opzoeken of verifiëren van extreme waarden en het verband leggen tussen de afgeleide functie en bijzonderheden van de grafiek.
19 het begrip afgeleide herkennen in situaties buiten de wiskunde.
20 bij een eenvoudig vraagstuk dat te herleiden is tot het bepalen van extrema van een veeltermfunctie, een veranderlijke kiezen, het functievoorschrift opstellen en de extrema bepalen.
21 de uitdrukking a^b, met $a>0$ en b rationaal, uitleggen.
22 de grafiek tekenen van de functie $f(x) = a^x$ (zonodig met behulp van ICT), en domein, bereik, bijzondere waarden, stijgen/dalen en asymptotisch gedrag aflezen.
23 voor geschikte domeinen een verband leggen tussen de functies $f(x) = x^2$ en $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^3$ en $f(x)= \sqrt[3]{x}$ en naar analogie tussen de functies $f(x) = x^n$ en $f(x) = \sqrt[n]{x}$ en tussen de functies $f(x) = a^x$ en $f(x) = {}^a\log(x)$.
24 uit de betrekking $a^b = c$ de derde veranderlijke berekenen als de twee andere gegeven zijn (eventueel met behulp van ICT).
25 lineaire en exponentiële groeiprocessen onderzoeken en bij exponentiële groei concrete problemen oplossen waarbij berekeningen dienen uitgevoerd te worden met betrekking tot beginwaarde, groeifactor en groeipercentage.
26 het verband leggen tussen graden en radialen.
27 de grafiek tekenen van de functie $f(x) = \sin x$ op basis van de goniometrische cirkel.
28 voor de functie $f(x) = \sin x$, domein, bereik, periodiciteit, stijgen/dalen en extrema aflezen van de grafiek.
29 de grafieken opbouwen van de functies $f(x) = a \sin(bx+c)$ en daarop a, b en c interpreteren.
30 vergelijkingen van de vorm $\sin x = k$ grafisch oplossen.
31 bij het oplossen van een probleem, waarbij gebruik gemaakt wordt van bestudeerde functionele verbanden, een functievoorschrift, een vergelijking of een ongelijkheid opstellen.
32 tabellen en grafieken bij bestudeerde functies als hulpmiddel gebruiken om functievoorschriften, vergelijkingen en ongelijkheden te interpreteren.

3 STATISTIEK

De leerlingen kunnen
33 in betekenisvolle situaties, gebruik maken van een normale verdeling als continu model bij data met een klokvormige frequentieverdeling en het gemiddelde en de standaardafwijking van de gegeven data gebruiken als schatting voor het gemiddelde en de standaardafwijking van deze normale verdeling.
34 het gemiddelde en de standaardafwijking van een normale verdeling grafisch interpreteren.
35 grafisch het verband leggen tussen een normale verdeling en de standaardnormale verdeling.
36 bij een normale verdeling de relatieve frequentie interpreteren van een verzameling gegevens met waarden tussen twee gegeven grenzen, met waarden groter dan een gegeven grens of met waarden kleiner dan een gegeven grens als de oppervlakte van een gepast gebied.

* Met het oog op de controle door de inspectie werden de attitudes met een * aangeduid in de kantlijn.

8.2 Specifieke eindtermen wiskunde - ASO derde graad

1 ALGEBRA

De leerlingen kunnen
1 delingen van veeltermen uitvoeren en het binomium van Newton gebruiken.
2 complexe getallen meetkundig voorstellen en er bewerkingen mee uitvoeren.
3 vierkantsvergelijkingen in één complexe onbekende oplossen.

4 met behulp van matrices problemen wiskundig modelleren en oplossen.
5 de basiseigenschappen van een reële vectorruimte (beperkt tot dimensie 2 en 3) herkennen en gebruiken.

2 ANALYSE

De leerlingen kunnen
6 het verloop van een functie onderzoeken, in het bijzonder voor veeltermfuncties en voor rationale, irrationale, goniometrische, exponentiële en logaritmische functies, met beperking van de moeilijkheidsgraad.
7 een definitie formuleren voor begrippen uit de analyse en de samenhang met hun gebruik in toepassingen aangeven.
8 de eerste en de tweede afgeleide van functies berekenen en ze in concrete situaties gebruiken.
9 de bepaalde en de onbepaalde integraal van functies berekenen en ze in concrete situaties gebruiken.
10 met behulp van de beschikbare analysekennis problemen wiskundig modelleren en oplossen.
11 bij het oplossen van vergelijkingen of ongelijkheden, het omvormen van functievoorschriften, het berekenen van afgeleiden of integralen op een verantwoorde wijze gebruik maken rekenregels, formules en manuele rekentechnieken.
12 bij het onderzoeken van functies, het oplossen van vergelijkingen of ongelijkheden, bij berekeningen van afgeleiden en integralen en bij het oplossen van problemen geformuleerd met behulp van functies op een verantwoorde wijze gebruik maken van ICT-middelen.

3 MEETKUNDE

De leerlingen kunnen
13 rechten en vlakken door vergelijkingen voorstellen en hun onderlinge ligging bespreken.
14 afstanden tussen punten, rechten en vlakken berekenen.
15 meetkundige problemen met diverse hulpmiddelen voorstellen en oplossen.

4 STATISTIEK EN KANSREKENING

De leerlingen kunnen
16 wetten van de kansrekening toepassen voor onafhankelijke en voor afhankelijke gebeurtenissen.
17 de binomiale verdeling of de normale verdeling gebruiken als model bij een kansexperiment.

5 DISCRETE WISKUNDE

De leerlingen kunnen
18 telproblemen of problemen met betrekking tot discrete veranderingsprocessen wiskundig modelleren en oplossen.

6 WISKUNDE EN CULTUUR

De leerlingen kunnen
19 inzicht verwerven in de bijdrage van wiskunde tot de ontwikkeling van exacte en humane wetenschappen, techniek, kunst en het kritische denken.

7 ONDERZOEKSCOMPETENTIES

De leerlingen kunnen
20 zich oriënteren op een onderzoeksprobleem door gericht informatie te verzamelen, te ordenen en te bewerken.
21 een onderzoeksopdracht met een wiskundige component voorbereiden, uitvoeren en evalueren.
22 de onderzoeksresultaten en conclusies rapporteren en ze confronteren met andere standpunten.

8.3 Overeenkomst

ET	leerplan a
1	V3, V4, A11
2	V3, V4, V5, A12
3	V5, A11, AN6, AN19, AN28
4	V5, A11, A13
5	V5, A12
6	A15, AN6, AN19, AN24, AN28, AN35
7	V1, V2, V4, V5, A11
8	V5, A15
9	V5, A15, AN6, AN19, AN25
10	A16
11	A11
12	A13
13	A14
14	AN5
15	AN31
16	AN32, AN33
17	AN33
18	AN35
19	AN32
20	AN34
21	AN11
22	AN13
23	AN8, AN14
24	AN13, AN18
25	AN12
26	AN20
27	AN21
28	AN22
29	AN23
30	AN26
31	AN3, AN4, AN6, AN19, AN28
32	AN3, AN4, AN6, AN19, AN28
33	SK3
34	SK4
35	SK4
36	SK5

SET	leerplan a
1	AN17, DI5
2	AL2, AL3, AL5, AL7, AL8
3	AL4
4	AL9, AL12, AL14
5	ME2
6	AN19, AN28
7	AN1, AN31, AN32, AN37, AN38, AN39
8	AN33
9	AN39, AN40
10	AN2, AN19, AN34
11	AN3, AN17, AN18, AN19, AN26, AN27, AN28, AN33
12	AN4, AN6, AN19, AN26, AN27, AN28, AN33
13	ME4, ME5
14	ME3, ME7, ME8
15	SK3, SK7, SK8
16	SK7, SK8
17	SK10, SK11
18	DI3, DI4
19	A15
20	OC1
21	OC2
22	OC3

9 BIBLIOGRAFIE

BOEKEN

ASPEELE, M.-J., DELAGRANGE, N., DE ROO, F., *Wiskundedidactiek, een inleiding*. Leuven, Acco, 1987.
BUIJS, A., *Statistiek om mee te werken.* Leiden, Stenfort Kroese, 1989.
BURTON, D., *The history of mathematics. An introduction*. Boston, Allyn and Bacon Inc., 1985.
CENTRE DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'a dix-huit ans*. Nivelles, CREM, 1995.
DE BOCK, D., e.a., *Afgeleiden en integralen*, Leuven, Acco, 1994
DE SMIT, B., TOP, J., *Speeltuin van de wiskunde*, Veen Magazines, Natuurwetenschap en Techniek, 2003
DEVREESE, J.T., VANDEN BERGHE, G., W*onder en is gheen wonder De geniale wereld van Simon Stevin.* Leuven, Davidsfonds, 2003.
DOCHY, F., SCHELFHOUT, W., JANSSENS, S., *Anders evalueren*, Heverlee, Lannoo-campus, 2003.
DOUMA, S.W., *Lineaire programmering als hulpmiddel bij besluitvorming.* Academic Service, 1982
EBBENS, S., ETTEKOVEN, S, VAN ROOIJEN, J., *Effectief leren in de les*, Groningen, Wolters-Noordhoff, 1996
ENGEL A., *Problem-Solving Strategies*, New York, Springer-Verlag, 1998
FENTEM, R., *Statistics.* London, Collins Educational, 1996.
FREUDENTHAL, H., *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Reidel Publ. Comp., 1973.
GOODMAN, A., HIRSCH, L., *Precalculus.* Englewood Cliffs - New Yersey, Prentice-Hall, 1994.
GRAVEMEIJER, K.P.E., *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, CD Press, 1994.
HERR, T., JOHNSON, K., *Problem solving strategies.* Berkeley, Key Curriculum Press, 1994.
HIRSCH, C.R., NORTON, M.A., e.a., *Geometry.* Glanview, Scott Foresman and Company, 1984.
HUFF, D., *How to lie with statistics*. London, Norton & Company, 1954.
JACOBS, H., *Mathematics a human endeavor.* New York, Freeman, 1982.
JOHSONBAUGH, R., Discrete mathematics, London, Prentice Hall, 1997
KAISER, H., NÖBAUER, W., *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht*. München, Freytag, 1984.
KLINGEN, H., OOT, A., *Computereinsatz im Unterricht, der pädagogische Hintergrund.* Stuttgart, Metzler Verlag, 1986.
KRABBENDAM, H., *Informatieverwerking en statistiek voor de lerarenopleiding.* Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 1994.
LAFARGUE-SORT, J., MARQUIS, B., *Les méthodiques pour résoudre des problèmes*. Paris, Hatier, 1992.
LAGERWERF, B., *Wiskundeonderwijs in de basisvorming*. Groningen, Wolters-Noordhoff, 1994.
LEHMANN, E., *Mathematik-Unterricht mit Computer-Einsatz.* Bonn, Dümmler, 1988.
LOWYCK, J., VERLOOP, N., e.a., *Onderwijskunde*. Leuven, Wolters, 1995.
MANKIEWICZ, R., *Het verhaal van de wiskunde.* Abcoude, Uitgeverij Uniepers, 2000.
MOORE, D., McCABE, G.*, Statistiek in de praktijk*, *Theorieboek*, Academic Service, Den Haag, 2001
MOORE, D., McCABE, G.*, Statistiek in de praktijk, Opgavenboek,* Academic Service, Den Haag, 2001
NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, *Curriculum and Evaluation Standards for school mathematics* . Reston, Virginia USA, NCTM, 1989.
OLDKNOW, R., TAYLOR, A., *Teaching mathematics with ICT,* London, Continuum, 2000.
PETERSON, J., *Technical Mathematics*, Albany, Delmar Publishers, 1994.
POLYA, G., *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving.* New York, Willey, 1981.
POSAMENTIER, A.S., STEPELMAN, J., *Teaching secondary school mathematics*. New York, Merill Publishing Company, 1990.
ROELS, J., DE BOCK, D., e.a., *Wiskunde vanuit toepassingen.* Leuven, Aggregatie wiskunde - K.U.Leuven, 1990.
SCHOENFELD, A. H., *Mathematical problem solving*. London, Academic Press, 1985.
STEUR, H., *Levende wiskunde. Toepassingen geordend naar wiskundig onderwerp*. Culemborg, Educaboek, Tjeenk-Willink, 1980.
STEWART, I., *Over sneeuwkristallen en zebrastrepen.* Leuven, Davidsfonds, 2002
STEWART, J., REDLIN, L., e.a., *Precalculus, 3th edition.* Pacific Grove, Brooks/Cole Publishing Company, 1998.
STRUIK, D.J., *Geschiedenis van de wiskunde*. Utrecht, Het Spectrum, 1990.

THAELS, K., e.a., *Van ruimtelijk inzicht naar ruimtemeetkunde.* Deurne, Wolters Plantyn, 2001
VAN DER BLIJ, F., *Wiskunde met verve.* Groningen, Wolters-Noordhoff, 2000
VAN DORMOLEN, J., *Didactiek van de wiskunde*. Utrecht, Bohn, Scheltema en Holkema, 1976.
VAN LOOY, L., e.a. *Zelfstandig en coöperatief leren*, Brussel, VUBPress, 2002.
VAN PETEGEM, P., VANHOOF, J., *Evaluatie op de testbank*, Mechelen, Wolters-Plantyn, 2002.
VON HARTEN, G., STEINBRING, H., *Stochastik in der Sekundarstufe I.* Köln, Aulis Verlag, 1984.
WANER, S., COSTENOBLE, S.R., *Calculus applied to the real world,* New York, Harper Collins, 1996.
ZEBRA-reeks, Utrecht, Epsilon Uitgaven, 2000-2004.

TIJDSCHRIFTEN

UITWISKELING. Driemaandelijks tijdschrift, Groenstraat 18, 3221 Nieuwrode.
WISKUNDE EN ONDERWIJS. Driemaandelijks tijdschrift van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraren (VVWL), C. Huysmanslaan 60, bus 4, 2020 Antwerpen.

EUCLIDES. Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, De Schalm 19, 8251 LB Dronten.
NIEUWE WISKRANT. Tijdschrift voor Nederlands wiskunde onderwijs, Freudenthal Instituut, Postbus 9432, 3506 GK Utrecht.
PYTHAGORAS. Wiskundetijdschrift voor jongeren, Wiskundig Genootschap, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht.

INTERNET ADRESSEN

Portaalsite voor wiskunde	http://users.pandora.be/wiskunde/
Het wiskundelokaal van de digitale school	http://www.digischool.nl/wi/index.phtml
Mathworld	http://mathworld.wolfram.com/
Wiskundeweb	http://www.wiskundeweb.nl/
Applets	http://www.fi.uu.nl/wisweb/
Analyse	http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/
Calculus	http://homepages.seresc.net/~sray/alvirne.html
Problem Solving (1)	http://www2.hawaii.edu/suremath/home.html
Problem Solving (2)	http://www.nzmaths.co.nz/PS/
Problems	http://komal.elte.hu/verseny/feladatok.e.shtml
Geschiedenis van de wiskunde	http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history
Vlaamse wiskundeolympiade	http://www.kulak.ac.be/vwo/nl/vwowwwnl.html
Vragenbank	http://www.gricha.bewoner.antwerpen.be/
Nederlandse wiskunde olympiade	http://olympiads.win.tue.nl/nwo/
Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraren	http://www.vvwl.be
Uitwiskeling	http://www.uitwiskeling.be
Geboeid door wiskunde en wetenschappen	http://www.luc.ac.be/scholennetwerk/index.html
Nederlandse vereniging voor wiskundeleraren	http://www.nvvw.nl/
Freudenthalinstituut	http://www.fi.ruu.nl/
Nieuwe Wiskrant	http://www.fi.uu.nl/wiskrant/
Tijdschrift Pythagoras	http://www.pythagoras.nu/mmmcms/public/
Vlaamse statistieken	http://aps.vlaanderen.be/
Statistische gegevens	http://statbel.fgov.be/home_nl.htm
Centraal Bureau voor Statistiek	http://www.nrc.nl/W2/Lab/Profiel/Statistiek/
Sparen en beleggen	http://www.testaankoop.be/index_NL.html
Hypotheeklening en fiscaliteit	http://www.immotheker.be