WISKUNDE – LEERPLAN C

DERDE GRAAD ASO

STUDIERICHTINGEN ZONDER COMPONENT WETENSCHAPPEN, ZONDER COMPONENT WISKUNDE

LEERPLAN SECUNDAIR ONDERWIJS

LICAP – BRUSSEL D/2004/0279/021
September 2004
ISBN-nummer: 90-6858-382-4

Vlaams Verbond van het Katholiek Secundair Onderwijs
Guimardstraat 1, 1040 Brussel

Inhoud

INLEIDING

Dit leerplan werd opgemaakt op basis van de eindtermen wiskunde van de derde graad van het secundair onderwijs. Het is bestemd voor de leerlingen van de derde graad van het Algemeen Secundair Onderwijs.

Voor het aantal lestijden wordt gerefereerd aan de Lessentabellen - Voltijds secundair onderwijs - Derde graad van het Vlaams Verbond van het Katholiek Secundair Onderwijs.

Het ***leerplan c*** is opgemaakt voor het vak wiskunde in de studierichtingen met drie wekelijkse lestijden wiskunde.

Economie-moderne talen
Grieks-Latijn
Humane wetenschappen
Latijn-moderne talen
Moderne talen-topsport
Grieks-Moderne talen

1 BEGINSITUATIE

Bij het opstellen van dit leerplan c werd uitgegaan van de leerinhouden zoals ze behandeld werden bij de leerlingen, die in de tweede graad leerweg vier voor vier wekelijkse lestijden wiskunde hebben gevolgd.

De concrete leerinhouden en de wijze waarop ze in de lessen uitgewerkt worden in de tweede graad kunnen opgezocht worden in het leerplan van de tweede graad (Licap D/2002/0279/047). Hier wordt de beginsituatie beperkt tot een beknopte opsomming. Daar waar nodig wordt in het begin van een onderdeel de concrete beginsituatie aangegeven.

De volgende leerinhouden werden volgens het leerplan in de tweede graad behandeld.

Meetkunde
Gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Thales.
De stelling van Pythagoras en het berekenen van afstanden in het vlak en in de ruimte.
Driehoeksmeting (rechthoekige en willekeurige driehoek), met sinus- en cosinusregel.
Eigenschappen in een cirkel (o.m. omtrekshoek en middelpuntshoek), raaklijnen in een punt van de cirkel.
Onderlinge ligging van rechten en vlakken.
Meetkundige problemen in de ruimte.
Vraagstukken over oppervlakte en inhouden van ruimtefiguren.

Getallenleer en algebra
Uitbreiding getalbegrip tot reële getallen.
Rekenen met reële getallen en met machten van getallen met gehele exponenten.
Vierkantswortel en derdemachtswortel. Rekenen met vierkantswortels.
Vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste en de tweede graad in één onbekende oplossen.
Vraagstukken die leiden tot een vergelijking van de eerste of de tweede graad met één onbekende of tot een stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad in twee onbekenden.
Ontbinden van een veelterm in factoren.

Reële functies
Het interpreteren van functies gegeven door middel van een grafiek, een tabel, een formule.
Functies van de eerste graad in één veranderlijke.
Functies van de tweede graad in één veranderlijke.
Elementaire begrippen in verband met functies, o.m. domein, bereik, nulpunten, tekenverandering, stijgen en dalen, extreme waarden, symmetrie.

Analytische meetkunde
De algemene vergelijking van een rechte.
Stelsels van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.
Vergelijking van de cirkel.
Vraagstukken analytisch oplossen.

Beschrijvende statistiek
Representativiteit van een steekproef.
Gebruik en interpretatie van een frequentietabel en grafische voorstellingen.
Gemiddelde en mediaan als centrummaat en interkwartielafstand en standaardafwijking als spreidingsmaat.

Telproblemen en rekenen met kansen
Oplossen van telproblemen met behulp van schema's.
Kansen berekenen.
Kans interpreteren als relatieve frequentie.

2 ALGEMENE DOELSTELLINGEN

2.1 Wiskunde en wiskundevorming

WISKUNDE

Wiskunde biedt middelen tot *het begrijpen, het beschrijven, het verklaren en eventueel het beheren van systemen en situaties* uit onze omgeving. Het gaat in het bijzonder om natuurverschijnselen (bijv. in de natuurwetenschappen, beschrijving in de ruimte rondom), om technische realisaties (bijv. automatiseringsprocessen) en om menselijke relaties (bijv. het gebruik van statistische gegevens in de economie en in de media).

Een kenmerk van wiskunde is het creëren van *modellen* voor die beschrijving. De mathematisering van een situatie of een probleem betekent dat, na analyse en kwantificering, een wiskundig model (bijv. een evenredigheid, een vergelijking, een functioneel verband, een stelsel, een meetkundig verband, ...) wordt gevonden, waarin de situatie of het probleem kan beschreven worden. De bijbehorende oplossingstechnieken kunnen tot een effectieve oplossing leiden. *Kritische toetsing* van de oplossing in de beschreven realiteit kan leiden tot het aanvaarden, verwerpen of bijstellen van het wiskundig model.

Een ander kenmerk van wiskunde is het steeds verder *ordenen en organiseren* van de verworven inzichten in samenhangende schema's en systemen, waarbij de toepasbaarheid en de beperkingen van wiskundesystemen kan beschreven worden. Van nieuwe vaststellingen wordt geprobeerd ze te verbinden met of te verantwoorden vanuit de bestaande systemen.

WISKUNDEVORMING

De wiskundevorming in het secundair onderwijs heeft een dubbele rol: het ontwikkelen van een wiskundig *basisinstrumentarium* en het *ontwikkelen van het denken* in het algemeen.

Enerzijds moeten leerlingen een minimale kennis en vaardigheid verwerven in het wiskundige *instrumentarium*, nodig om te kunnen functioneren in een maatschappij, waar wiskunde in vele toepassingen gebruikt wordt. Daarom moeten wiskundige begrippen en verbanden een *brede betekenis* krijgen in relatie met realiteitsgebonden situaties en moeten wiskundige *technieken en methoden* voldoende beheerst worden (al of niet met gebruik van hulpmiddelen zoals een rekenmachine, een computerprogramma, een formularium).

Wil deze kennis en vaardigheid adequaat gehanteerd worden, is een efficiënte *kennisorganisatie* noodzakelijk. Daartoe moet aandacht besteed worden aan de samenhang tussen begrippen en eigenschappen en tussen de eigenschappen onderling. Efficiënte toegankelijkheid van de kennis houdt in dat ze inhoudelijk niet slechts logisch geordend is, maar dat een ordening beschikbaar is die gericht is op het gebruik ervan in toepassingen.

In het concrete verwervingsproces en in de toepassingen kan de bewondering voor de schoonheid en de verwondering voor het vaak verrassende van wiskunde groeien.

Anderzijds draagt de wiskundevorming bij tot een fundamentele *denk- en attitudevorming*. Bij het verwerven van wiskundekennis en wiskundige methoden worden meer algemene denkmethoden (bijv. het analyseren, het synthetiseren, het hanteren van symmetrie en analogie, het systematisch en methodisch werken), verwervingstechnieken van kennis (bijv. herhaling, verbanden leggen, toetsing, verdere abstractie) en attitudes (bijv. het opbouwen van vertrouwen in het eigen kunnen, doorzettingsvermogen en kritische zin) ontwikkeld.

Bij het mathematiseren en het oplossen van problemen kunnen leerlingen vaardigheden en strategieën verwerven die breder toepasbaar zijn. In het proces van het argumenteren en het bespreken van de kwaliteit van een wiskundige oplossing zal wiskunde bijdragen tot het verwerven van een *kritische houding*, ten aanzien van het eigen denken en handelen.

Omdat dit vormingsproces niet los verloopt van de sociale context van de klas, wordt onrechtstreeks bijgedragen tot de vorming van sociale vaardigheden.

2.2 Algemene doelstellingen voor wiskunde in de derde graad

Voor de wiskundevorming in de *derde graad* van het *algemeen secundair onderwijs* kunnen de volgende algemene doelstellingen vooropgesteld worden.

KENNIS EN INZICHT

De leerlingen gebruiken en onderhouden de kennis en de inzichten die ze al verworven hebben.
De leerlingen ontwikkelen

- een wiskundig instrumentarium van begrippen, eigenschappen en methoden;
- inzicht in verbanden tussen de wiskundige leerinhouden onderling en tussen de wiskundige leerinhouden en andere vakdisciplines;
- inzicht in verbanden tussen het wiskundig instrumentarium en problemen die wiskundig vertolkt kunnen worden;
- inzicht in het verwerken van numerieke informatie en beeldinformatie;
- een aantal redeneermethoden om hun bevindingen te argumenteren en te verklaren;
- een aantal wiskundige denkmethoden om o.m. verbanden te leggen, te ordenen en te structureren.

VAARDIGHEDEN

De leerlingen onderhouden de vaardigheden die ze al verworven hebben.
De leerlingen ontwikkelen

- rekenvaardigheden;
- meet- en tekenvaardigheden;
- wiskundige taalvaardigheden;
- denk- en redeneervaardigheden;
- probleemoplossende vaardigheden;
- onderzoeksvaardigheden;
- leervaardigheden;
- reflectieve vaardigheden.

ATTITUDES

De leerlingen ontwikkelen

- zin voor nauwkeurigheid en orde;
- zin voor volledigheid;
- zin voor helderheid, bondigheid, eenvoud van taalgebruik;
- kritische zin;
- zelfvertrouwen, zelfstandigheid en doorzettingsvermogen;
- zelfregulatie;
- zin voor samenwerking en overleg;
- waardering voor wiskunde als een dynamische wetenschap en als een component van de cultuur.

3 ALGEMENE PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de derde graad wordt verder gebouwd op de wiskundige vorming van het basisonderwijs en van de eerste en de tweede graad. Dat houdt in dat de leerlingen de kennis, de inzichten en de vaardigheden die eerder verworven werden, blijven gebruiken en onderhouden. Als uit een diagnostische toets blijkt dat onderdelen onvoldoende verworven werden, kunnen die functioneel en gericht herhaald en bijkomend ingeoefend worden. Een gedifferentieerde aanpak is hier aangewezen.

KENNIS EN INZICHT

In de derde graad komen een aantal nieuwe leerinhouden en nieuwe wiskundeonderdelen aan bod. Daarbij moet aandacht besteed worden aan de *begripsvorming*. Het best is aan te sluiten bij de werkwijzen die voordien gehanteerd werden en waarmee leerlingen vertrouwd geworden zijn. Een eerste abstractie van nieuwe begrippen wordt best onderbouwd met voorbeelden en tegenvoorbeelden, die onder meer kunnen aansluiten bij de ervaringswereld van de leerlingen of bij de problemen die ermee kunnen opgelost worden. In een onderzoeksfase kunnen de leerlingen zelf ervaren wat de relevante en niet-relevante kenmerken van een begrip zijn. Bij het verbinden van nieuwe ervaringen aan het begrip of het niet meer behoorlijk functioneren van het begrip kunnen leerlingen dan daarop terugvallen. Door begrippen van bij hun vorming te koppelen aan verschillende onderdelen worden ze breder en betekenisvoller opgenomen en wordt het gebruik ervan in de verschillende onderdelen vereenvoudigd. Dit kan een motivatie zijn om leerstofonderdelen geheel of gedeeltelijk geïntegreerd te behandelen. De aanbreng van nieuwe eigenschappen kan op gelijkaardige wijze aangepakt worden.

Voor de leerlingen die dit leerplan volgen moet gezocht worden naar een haalbaar verwoordingsniveau van de leerinhouden, waarbij de eisen aan het taalniveau niet te hoog liggen. Het is zinvol aandacht te besteden aan een goed doordachte, stapsgewijze opbouw van het inzichtelijk proces en aan de verbetering van de eigen onvolmaakte verwoording, in plaats van hen een aantal elementen betekenisloos te laten memoriseren.

Inzicht in de aangeleerde begrippen en eigenschappen impliceert dat de verworven kennis kan *toegepast* worden. De leerlingen moeten daartoe geconfronteerd worden met zinvolle en haalbare toepassingen binnen en buiten de wiskunde. Precies de toepassingen kunnen het inzicht verscherpen in verbanden tussen het gekende wiskundig instrumentarium en het oplossen van problemen en daardoor ook in de wiskundige begrippen en eigenschappen zelf. Ook hier ligt een gradatie in het aangeboden materiaal voor de hand.

VAARDIGHEDEN

Technieken en routineprocedures worden ingeoefend en aangevuld. Daarbij wordt ook geleerd rekentechnische hulpmiddelen, zoals grafische rekenmachine en computer, efficiënt te gebruiken. Door het zinvol inschakelen van ICT-middelen voor reken- en tekenwerk, voor onderzoek of als informatiebron draagt wiskunde bij tot het verwerven en onderhouden van ICT-vaardigheden.

Daarnaast moet aandacht besteed worden aan vaardigheid in verwoorden, probleemstellen en probleemoplossen, redeneren en verantwoorden. In de derde graad moet de leerlingen hierbij een grotere zelfstandigheid krijgen. Dat geldt ook voor het verwerven en onderhouden van leervaardigheden. Dit moet leiden tot een grotere verantwoordelijkheid ten aanzien van het eigen leren. In het bijzonder moet aandacht besteed worden aan reflectieve vaardigheden bijv. bij het terugkijken op de aanpak van het eigen werk en het eigen leerproces.

ATTITUDEN EN OPVATTINGEN

Doorheen de wiskundevorming kunnen leerlingen een aantal attitudes en in het bijzonder *leerattitudes* verwerven, zoals orde, nauwkeurigheid, doorzettingsvermogen, zelfvertrouwen, ... Het aanpakken van problemen kan leiden tot een *onderzoeksgerichte houding*, tot methodisch en planmatig werken. Een leerproces waarin oplossingen worden vergeleken en getoetst, kan bijdragen tot samenwerking, overleg, structurering, zin voor helderheid, bondigheid, volledigheid, eenvoud in taalgebruik, waardering voor andere oplossingen.

Bij het bespreken van oplossingsmethoden en door het kritisch onderzoeken van mekaars oplossing kan *waardering* voor een andere mening aangeleerd worden en daardoor voor de persoon van de andere. Zo kan binnen het wiskundeonderwijs aandacht besteed worden aan *waarden* en *sociale vaardigheden*.

Ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit *realiteitsbetrokken situaties* kan bij de leerlingen het besef doen groeien van de bruikbaarheid en de werkelijkheidswaarde van wiskunde. Het gebruik van cijfermateriaal uit kranten en tijdschriften leert leerlingen hiermee om te gaan en er kritisch naar te kijken. Ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit een historische context kan belangstelling en waardering opwekken voor de historische en culturele aspecten van wiskunde in het algemeen.

ACTIEVE WERKVORMEN

De leerlingen moeten voldoende betrokken worden bij het ontwikkelen van de leerinhouden. Een radicale keuze voor *actieve wiskundelessen* ligt voor de hand. Begrippen en eigenschappen kunnen in goed gekozen didactische situaties door de leerlingen zelf onderzocht worden. Die leermomenten kunnen in leer- of klassengesprekken verwoord worden en aan de ervaring van anderen getoetst. Reflecties over dit proces zelf zijn aangewezen momenten om technieken in verband met het leren en het verwerven van reflectieve vaardigheden (bijv. zich vragen stellen, terugkijken op een uitgevoerde taak) aan te reiken.

In een *actief leerproces* leren leerlingen communiceren over wiskundige onderwerpen. Ook al beheersen ze de wiskundetaal wellicht minder goed, de manier waarop leerlingen onder elkaar en naar de leerkracht informatie over hun denkproces overdragen, zou begrijpbaar moeten zijn. Ook in de wiskundelessen is het hanteren van een verzorgde en behoorlijke taal belangrijk.

Van leerlingen van de derde graad mag verwacht worden, dat ze een vorm van *zelfstandig leren en werken* opbouwen. De opbouw van het leerproces moet er op gericht zijn dat leerlingen actief deelnemen aan de wiskundelessen. Die moeten zo ingericht worden dat leerlingen zelf een deel van het werk aanpakken, weliswaar binnen hun wiskundig kunnen. Door goed gekozen, progressief opgebouwde opdrachten moeten leerlingen vertrouwd gemaakt worden met het opnemen van verantwoordelijkheid voor het eigen leren en werken.

WISKUNDE EN ICT

In onze maatschappij groeit de informatie- en communicatietechnologie (ICT) uit tot een veralgemeend hulpmiddel. De leerlingen moeten er in het onderwijs al mee vertrouwd worden. Door de vele mogelijkheden biedt de wiskundevorming een weg tot het verwerven van inzicht in een aantal computertoepassingen (rekenwerk, grafische mogelijkheden, dataverwerking, onderzoeksopdrachten, informatieverzameling). Wiskunde moet deze algemene vormingsopdracht opnemen. Daartoe kan men leerlijnen ontwikkelen voor verwerving en integratie, op niveau van de individuele aanpak door de leraar, maar ook in overleg met de vakgroep wiskunde, met de vakgroepen van vakken die de wiskundetoepassingen gebruiken, bijv. wetenschappen en economie, en op schoolniveau, bijv. wat betreft beschikbaarheid, organisatie computerinfrastructuur (werkblok in wiskundeklassen).

Heel wat *routinerekenwerk* wordt in de praktijk niet meer manueel uitgevoerd. Ook in de wiskundeles kan het gebruik van moderne rekenapparatuur zoals rekenmachine en computer tijdbesparend werken, zeker bij situaties waar het handmatig rekenwerk veel tijd in beslag zou nemen. Routinerekenvaardigheden blijven weliswaar belangrijk voor een snelle schatting, bijv. na afronding van de getallen. Maar men kan niet voorbij aan de consequentie dat aan de inoefening van rekenvaardigheden minder tijd besteed wordt. Uiteraard moet misbruik van de rekenmachine voorkomen worden.

Wat het *algebraïsch rekenwerk* (formules, letterrekenen, vergelijkingen oplossen) betreft, beschikt de computer en een aantal rekenmachines al over heel wat mogelijkheden. De leerlingen kunnen voor het rekenwerk ruim gebruik maken van een grafische rekenmachine of van software op de computer (freeware, software met goedkope leerlingenlicenties, applets). Toch is het zinvol ook een aantal manuele technieken te onderhouden. Daarbij is de aard van de oefeningen niet gericht op complexiteit, maar op de versterking van het inzicht in de methode, en zonder daarbij in extreme oefeningen te vervallen. Een basisniveau voor de routinerekenvaardigheden blijft zinvol. Zo zullen leerlingen bijvoorbeeld het voorschrift van de afgeleide functie van een veelterm moeten kunnen berekenen. Bij toepassingen zoals extremaproblemen zal men sneller grijpen naar ICT. Hierbij heeft het inzicht in het oplossingsproces prioriteit op het rekentechnische aspect. Het manuele rekenwerk moet dus niet uitgebannen worden, maar in de praktijk zal men vlotter naar een hulpmiddel grijpen. Anderzijds behoren toepassingen met realistische gegevens meer tot de mogelijkheden, omdat de moeilijkheid van de berekeningen kan opgevangen worden.

Het leren gebruiken van ICT is binnen wiskunde geen einddoelstelling op zich. Maar ook de kale rekenvaardigheid is geen doel op zich. De leerlingen moet wel geleerd worden beide als hulpmiddel doeltreffend te gebruiken. Zo zal bij het oplossen van een probleem het uittekenen van de grafiek een hulpmiddel zijn om de situatie beter te vatten. Bij de doelstelling over het verloop van een functie vanuit het interpreteren van de afgeleide(n), is het uiteraard niet de bedoeling dat de leerlingen meteen de grafiek uittekenen met ICT. Zo heeft het ook geen zin de leerlingen buiten elke context een groot aantal afgeleiden te laten berekenen met ICT. Wel kan ICT gebruikt worden als controlemiddel om de juistheid van besluiten te verifiëren.

De computer en grafische rekenmachines zijn handige *didactische hulpmiddelen*, o.m. bij exploratieopdrachten. Door de snelheid waarmee leerlingen een antwoord kunnen bekomen, krijgen ze ook snel terugkoppeling over hun denk-, reken- of oplossingsproces. De bijsturing die er op volgt, kan het inzicht verhogen. Zo kunnen bijvoorbeeld de grafische mogelijkheden aangewend worden bij het onderzoek van functies en hun grafieken. Zo geeft in de statistiek het voorstellen van de gegevens een beter inzicht in de statistische verwerking ervan. De *visuele ondersteuning* die uitgaat van deze ‘wiskunde in beelden’ mag voor leerzwakke leerlingen niet onderschat worden. En al zal de computer in de wiskundeles niet noodzakelijk voor flitsende beelden zorgen en vraagt het gebruik van de leerling heel wat inzet, toch kan het moderne medium de *motivatie* van een aantal leerlingen verhogen.

Het gebruik van een rekenmachine of software brengt *nieuwe mogelijkheden en moeilijkheden* mee:

- dynamisch materiaal om nieuwe concepten in te leiden, waardoor beter kan gefocust worden op de betekenisgeving en de opbouw, en waardoor minder ruis ontstaat door problemen met handmatig rekenen;
- demonstratiemogelijkheden in de hand van de leraar bij nieuwe begrippen, maar ook aangepast leerlingenmateriaal voor onderzoeksopdrachten voor de leerlingen zelf, bijv. voor het ontwikkelen en formuleren van vermoedens;
- het gebruik van concepten wordt al mogelijk vanuit een intuïtieve visuele voorstelling en haalbare rekentechnische mogelijkheden, zonder dat het begrip eerst op een hoger verbaalalgebraïsch niveau moet geëxpliciteerd worden;
- het adequater voorstellen van grafieken en diagrammen, en een vlotte aanpassing van situaties in functie van het leerproces;
- het vlot wisselen tussen wiskundige representatie, bijv. tabel, grafiek, functievoorschrift;
- berekeningen met moeilijkere, meer realistische gegevens, die voordien niet manueel uitvoerbaar waren;
- het interpreteren van de randvoorwaarden van een probleem (bijv. de keuze van de dimensies van het grafisch scherm);
- het extrapoleren of interpoleren (bijv. vanuit een verband vastgesteld op een grafiek);
- het simuleren van bepaalde situaties, zoals bijv. kansexperimenten;
- het gebruik als controlemiddel op manueel uitgevoerde berekeningen;
- een controlemiddel bij het verifiëren van vermoedens, veronderstellingen en schattingen;
- de ontwikkeling van nieuwe controlevaardigheden (bijv. het maken van schattingen) om meteen een kritische houding tegenover de resultaten en de mogelijkheden van deze nieuwe technologie te verwerven;
- het opzoeken van (bijkomende) informatie voor gebruik bij het oplossen van problemen;
- het opzoeken van informatie op het internet, bijv. in verband met de historische ontwikkeling van wiskunde, en de rol in de ontwikkeling van de cultuur.

ICT biedt ook nieuwe impulsen aan *het zelfstandig werken en leren* van de leerling in de wiskundevorming. Als de gebruikte software krachtig en nauwkeurig genoeg is kan dit voor de leerlingen een hulpmiddel zijn om meer zelfontdekkend aan het werk te gaan. Wel is het hierbij belangrijk dat leerlingen niet zo maar wat bezig zijn, maar dat zij gericht geleid worden in een exact denkproces. De klasgroepen mogen dan ook niet te groot zijn, en er moeten voldoende toestellen beschikbaar zijn.

Met sommige ICT - toepassingen hebben de leerlingen de mogelijkheid om oefeningen te maken, die meteen geëvalueerd worden (bijvoorbeeld bij het bepalen van voorschriften van functies). Hierdoor kunnen zij individueel aan het werk en krijgen zij ogenblikkelijk feedback op hun antwoorden. Op deze wijze leren de leerlingen omgaan met zelfevaluatie.

Voorbeelden van het gebruik van ICT in de derde graad.

- Verkenning, berekening, grafische controle van het begrip functie, symmetrieën, nulpunten, verband tussen de grafiek van een functie en zijn omgekeerde.
- Ondersteuning en oefening bij de grafieken van goniometrische, exponentiële en logaritmische functies.
- Onderzoek van de invloed van parameters op de grafiek van een functie.
- Ondersteuning van de begripsvorming, berekening en grafische controle bij limieten, afgeleiden, integralen en hun toepassingen.
- Ondersteuning en berekening bij extremumproblemen.
- Ondersteuning en rekenwerk bij het numeriek bepalen van nulpunten, van integralen.
- Matrixberekeningen en oplossen van stelsels.
- Gebruik van statistische functies in statistiek en kansberekening. Uitvoeren van kanssimulaties.
- Berekeningen bij het onderdeel financiële algebra.

ANDERE HULPMIDDELEN, VADEMECUM

In deze tijd is het leren organiseren, gebruiken en interpreteren van informatie belangrijker dan het onthouden van de zoveelste formule. Naast het gebruik van het eigen geheugen worden nu o.m. elektronische geheugens, formularia en tabellen ingeschakeld. Het wiskundeonderwijs kan hieraan niet voorbij. Het kan nodig zijn de tijd te nemen om inzicht in berekeningen, regels en formules te verwerven, maar het indrillen en het berekenen met ingewikkelder getallen moet gerelativeerd worden. De gewonnen tijd kan besteed worden aan het oplossen van een probleem, een vraagstuk meer.

WISKUNDE VOOR ELKE LEERLING

In de derde graad wordt wiskunde aangeboden met een verschillend aantal wekelijkse lestijden. Er mag verwacht worden dat de leerlingengroepen meer homogeen zijn samengesteld dan voordien. Toch moet er aandacht besteed worden aan een gedifferentieerde aanpak van de leerlingen. Dit kan betekenen dat bepaalde onderdelen en doelstellingen gedifferentieerd aangeboden worden, zowel naar inhoud, werkvorm als de graad van zelfstandigheid.

RELATIE MET HET OPVOEDINGSPROJECT VAN DE SCHOOL

Een school wil haar leerlingen méér meegeven dan louter vakkennis. Haar intentieverklaring in dit verband is te vinden in het opvoedingsproject, waarin waardenopvoeding en christelijke duiding zijn opgenomen.

Een vakleerkracht in een school van het katholieke net zal geen andere wiskunde geven dan de collega's in een ander net. Wel heeft hij de taak om, waar de kans zich voordoet, naar het opvoedingsproject of een aspect daarvan te refereren. Als mededrager van het christelijk opvoedingsproject is elke leerkracht alert voor elke kans die het school- en klasgebeuren biedt om de diepere dimensie aan te reiken. Ook wiskundelessen bieden hiertoe de kans, niet in het minst in de persoonlijke contacten tussen leerlingen en leerkracht. Hoe beter de leerkracht de leerlingen persoonlijk kent, hoe beter hij zal aanvoelen wanneer er openheid is om met de leerlingen door te stoten naar zins- en zijnsvragen.

4 MINIMALE MATERIËLE VEREISTEN

Leerkrachten wiskunde hebben de beschikking over behoorlijk en gemakkelijk toegankelijk materiaal voor het uitvoeren van tekeningen op het bord, m.n. *geodriehoek en passer*. Ze kunnen vlot beschikken over een *overheadprojector en ICT-hulpmiddelen voor demonstratie.*

Leerkrachten wiskunde kunnen vlot beschikken over een *geavanceerde grafische rekenmachine en wiskundige software* voor de didactische ondersteuning van hun lessen.

Voor de derde graad betekent dit o.m.:
- software voor exploratie van reële functies;
- software voor de verwerking van statistische gegevens (exploratie van grafische voorstellingen, berekeningen, voorstellen van gegevens in grafieken en diagrammen);
- software voor demonstratie en exploratie van meetkundige situaties;
- beschikbaarheid van het internet voor het gebruik van applets, informatieve sites, bijv. van banken.

De *leerlingen* beschikken over behoorlijk tekenmateriaal (*geodriehoek en passer*).

De leerlingen moeten doorheen het onderwijs, en in het bijzonder tijdens de wiskundelessen, ICT-hulpmiddelen leren gebruiken. De toepassingsmogelijkheden in wiskunde zijn uitgebreid (rekenapparaat, informatieverzameling, internet met applets). Daarom is het vanzelfsprekend dat de leerlingen zelf beschikken over een grafische rekenmachine of zo goed als permanent kunnen gebruik maken van een computer. Zo zou men een werkblok met computers kunnen voorzien in een wiskundeklas.

Alleszins moet het duidelijk gesteld worden dat gezien de verplichting van het ICT-gebruik vanuit de eindtermen, dit leerplan niet in voldoende mate kan gerealiseerd worden, als deze ICT-middelen onvoldoende beschikbaar zijn.

Opmerking in verband met de implementatie

Gezien het belang van het gebruik van ICT-middelen en een eventuele beperkte beschikbaarheid zal de leraar rekening houden met deze beperkingen bij het plannen van de didactische aanpak. Eventueel kan de jaarplanning aangepast worden.

De vakgroep wiskunde zal geregeld een evaluatie maken van het gebruik van en de vordering van de implementatie van ICT-hulpmiddelen, bijv. over de grenzen van de graden en de studierichtingen heen. Dit is een gelegenheid om ideeën en werkmateriaal uit te wisselen. Zo kan in de vakgroep afgesproken worden welke software de leerlingen effectief zelf leren gebruiken. Zo is het, gezien de tijdsinvestering voor het aanleren van een programma, aangewezen dat in tweede en derde graad dezelfde of analoge wiskundesoftware gebruikt wordt. In dit verband kan gezamenlijk materiaal ontwikkeld worden met toelichting voor het gebruik van de software, cf. werkkaarten of gebruiksvademecum.

Aanvullend overleg is wenselijk met de vakwerkgroepen wetenschappen, economie en informatica, o.m. om het wiskundig gebruik van de ICT-hulpmiddelen in die vakken aan te moedigen of toe te lichten.

Het komt de didactische verwerking in de klas ten goede als de leerlingen over eenzelfde rekenmachine beschikken. Als gevolg van de doorstroming van leerlingen naar de derde graad kan echter een situatie ontstaan waarin verschillende toestellen gehanteerd worden in de klas. Het is niet zinvol om leerlingen nog andere (dure) toestellen te laten aanschaffen. Om een continuïteit in het gebruik van rekenmachines te waarborgen doorheen de studieloopbaan van de leerlingen is het wenselijk dat afspraken gemaakt worden op het niveau van de scholengemeenschap.

Tenslotte moet voorzien worden dat leerlingen uit een sociaal minder begoed midden geen probleem ervaren met de beschikbaarheid van deze hulpmiddelen. Zo kan er niet van worden uitgegaan dat elke leerling thuis al over een computer kan beschikken. Dat impliceert wellicht dat in de school oefenmogelijkheden moeten worden voorzien.

5 LEERPLANDOELSTELLINGEN - LEERINHOUDEN PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerplandoelstellingen zijn opgemaakt op basis van *de eindtermen wiskunde van de derde graad* van het secundair onderwijs. Bij een aantal doelstellingen is in de laatste kolom een *verwijzing naar de eindtermen* opgenomen. Bij een aantal doelstellingen staan meer verwijzingen, als gelijktijdig aan het realiseren van meer dan een eindterm gewerkt wordt. Dit betekent niet dat deze eindtermen uitsluitend hier aan bod komen, want anderzijds kunnen verschillende doelstellingen verwijzen naar dezelfde eindterm. In hoofdstuk 8 is een concordantietabel opgenomen.

De doelstellingen voor *vaardigheden en attituden* zijn doelstellingen die doorheen de gehele wiskundevorming aan bod moeten komen. Het zijn doelstellingen die eerder permanente aandacht vragen in het onderwijsleerproces, dan wel specifieke lessen om ze aan te leren. De doelstellingen bouwen voort op gelijkaardige doelstellingen uit de eerste en de tweede graad. Omwille van hun brede formulering en hun ruim toepassingsgebied kunnen ze op verschillende beheersingsniveaus (bijv. in functie van het beschikbaar aantal lestijden) en verschillende wijzen gerealiseerd worden. Het gaat daarbij meer om het verwerven van een wiskundige dispositie en methode, dan wel om concreet specifieke doelen.

In verband met de controle geldt de opmerking dat attituden altijd na te streven zijn en dat de effecten ervan op de leerlingen geen deel uitmaken van een inspectieonderzoek.

De *leerinhoudelijke* doelstellingen worden samengebracht in een aantal onderdelen op basis van samenhangende leerinhouden. Met de inhoudelijke groepering wil het leerplan niet opleggen op welke wijze de leerinhouden moeten aangebracht worden. Ook de volgorde, waarin de verschillende leerstofonderdelen in het leerplan zijn weergegeven, is niet noodzakelijk de volgorde waarin ze in de klas moeten worden behandeld. Zo is bijvoorbeeld een integratie tussen verschillende onderdelen mogelijk. De aanbeveling over het aantal te besteden lestijden is slechts *richtinggevend*.

Om tegemoet te komen aan de onderlinge leerlingenverschillen is differentiatie noodzakelijk. Een eerste differentiatie is gebeurd op basis van het aantal lestijden wiskunde per week dat in deze studierichtingen voorzien is, en het daarbijbehorende leerplan. Binnen het leerplan worden evenwel nog meer mogelijkheden aangereikt door het opsplitsen van de doelstellingen in twee rubrieken: *basisdoelstellingen* en *uitbreidingsdoelstellingen*. De *basisdoelstellingen* vormen een minimum. Bij het opstellen van het jaarplan moet er over gewaakt worden dat ze volledig kunnen verwerkt worden.

Het leerplan voorziet voor *een honderdtal lestijden* een aantal ***verplichte onderdelen***, m.n. functieleer en statistiek. Deze onderdelen bevatten ook de opgelegde eindtermen.

Voor het resterend aantal lestijden zijn een aantal ***keuzeonderwerpen*** voorzien: m.n. matrices en stelsels, financiële algebra, ruimtemeetkunde, lineaire regressie en correlatie, betrouwbaarheidsgrenzen, toetsen van hypothesen, telproblemen, kansrekening en mathematiseren van problemen. Het is zinvol de keuze van de onderwerpen te spreiden over verschillende soorten van wiskundeaanpak, bijv. een meetkundig onderwerp en een onderwerp zoals kansrekening of financiële algebra, of een statistisch onderwerp en een algebraïsch, …. De keuze van een onderwerp kan gekoppeld worden aan de studierichting (bijv. financiële algebra in Economie-moderne talen of een statistisch onderwerp in Humane wetenschappen).

De keuzeonderwerpen bieden een ruim palet van mogelijkheden aan, toch kan een leraar of een vakgroep het initiatief nemen voor maximaal 15 lestijden een volledig eigen keuzeonderwerp uit te werken. Hiervoor bestaan overigens al heel wat mogelijkheden binnen het keuzeonderwerp *Mathematiseren*. Doel van deze ruimte in het leerplan is een dynamisch leerplan te creëren, waarbij leraren kunnen ingaan op nieuwe tendensen, nieuwe didactische mogelijkheden, nieuwe onderwerpen, maar ook op vragen vanuit de andere vakgebieden, of vanuit het verwerven van onderzoeksvaardigheden (cf. het onderwerp mathematiseren), of vanuit invulling of de medewerking aan de vrije ruimte in die studierichting. Deze vrijheid voor de leraar schept meteen een belangrijke *medeverantwoordelijkheid*, opdat deze lestijden ingevuld worden met zinvolle, uitdagende, creatieve ideeën. Men zal hier rekening houden met het niveau waarop de leerlingen in de andere lestijden aan wiskunde doen. De leerkrachten zullen hun keuze *bespreken in de vakgroep* en *bindend vastleggen in het jaarplan*. Daarin wordt een verantwoording van de keuze binnen en buiten het leerplan opgenomen.

OVERZICHT LEERPLAN C

Het leerplan bestaat uit de volgende onderdelen.
Het aantal voorziene lestijden is een aanbeveling.

1 Vaardigheden en attitudes (5.1)

wordt geïntegreerd in de verwerking van de leerinhoudelijke doelstellingen.

2 Verplichte leerinhoudelijke doelstellingen			**ca. 105**
Functieleer (5.2.1)		83	
Grafisch onderzoek	8		
Veeltermfuncties			
Inleiding	5		
Afgeleiden	25		
Integralen	15		
Exponentiële en logaritmische functies	15		
Goniometrische functies	15		
Statistiek (5.2.2)		20	

3 Keuzeonderwerpen		**ca. 45**
Matrices en stelsels (5.3.1)	15	
Financiële algebra (5.3.2)	25	
Ruimtemeetkunde (5.3.3)	15	
Lineaire regressie en correlatie (5.3.4)	15	
Betrouwbaarheidsintervallen (5.3.5)	10	
Toetsen van hypothesen (5.3.6)	7	
Telproblemen (5.3.7)	10	
Kansrekenen (5.3.8)	15	
Mathematiseren en oplossen van problemen (5.3.9)	15	
De leraar werkt een eigen keuzeonderwerp uit	max. 15	

5.1 VAARDIGHEDEN EN ATTITUDES

5.1.1 Vaardigheden

LEERPLANDOELSTELLINGEN

De leerlingen ontwikkelen (binnen het gekende wiskundig instrumentarium)

1	rekenvaardigheid, o.m. - het rekenen met getallen, formules en algebraïsche vormen; - het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden, stelsels, …; - het voorspellen en inschatten van de grootteorde van een resultaat; - het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het uitvoeren van bewerkingen.	7
2	meet- en tekenvaardigheid, o.m. - het analyseren en opbouwen van een figuur bij een redenering, bij een probleemsituatie; - ruimtelijk voorstellingsvermogen; - het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het opbouwen van figuren en grafieken.	7
3	wiskundige taalvaardigheid, o.m. - het begrijpen van wiskundige uitdrukkingen (zowel mondeling als schriftelijk); - het lezen van figuren, tekeningen, grafieken en diagrammen; - het analyseren, schematiseren en structureren van wiskundige informatie; - het verwoorden van hun gedachten en hun inzichten (zowel mondeling als schriftelijk).	1 2

4	denk- en redeneervaardigheden, o.m.
	- het onderscheid maken tussen hoofd- en bijzaken, gegeven en gevraagde, gegeven en te bewijzen;
	- het begrijpen van een redenering of argumentering bij een eigenschap;
	- het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het opbouwen van een redenering;
	- het opbouwen van een redenering ter verklaring van een eigenschap of de oplossing van een probleem, dit houdt onder meer in:
	  - een hypothese (vermoeden) formuleren en argumenteren;
	  - een eigenschap formuleren op basis van een onderzoek op een aantal voorbeelden, een inductieve redenering;
	- een gegeven redenering op geldigheid onderzoeken.
		2
		3
		7

5	probleemoplossende vaardigheden, zoals
	- een probleem leren ontdekken en het wiskundig behoorlijk leren stellen;
	  dit houdt o.m. in: kennis, inzicht en vaardigheden, verworven in wiskunde, gebruiken bij het verkennen, vertolken en verklaren van problemen uit de realiteit en bij het begrijpen van de bijdrage van wiskunde in sommige kunstuitingen;
	- een probleem analyseren (bijv. onderscheid maken tussen gegevens en gevraagde, de relevantie van de gegevens nagaan en verbanden leggen ertussen) en vertalen naar een passende wiskundig model;
	- probleemoplossende vaardigheden (i.h.b. heuristische methoden) toepassen bij het werken aan problemen, zowel over alledaagse als over wiskundige situaties;
	  bijv. een opgave herformuleren, een probleem opsplitsen in deelproblemen, een goede schets of een aangepast schema maken, notaties invoeren, onbekenden kiezen, voorbeelden analyseren;
	- reflecteren op de keuzen voor representatie, oplossingstechnieken en resultaten;
	- resultaten controleren op hun betrouwbaarheid en volledigheid;
	- ICT-hulpmiddelen gebruiken om wiskundige informatie te verwerken en wiskundige problemen te onderzoeken.
		2
		3
		4
		5
		7
		8
		9

6	onderzoeksvaardigheden, o.m.
	- de onderzoeksopdracht formuleren en afbakenen;
	- een aanpak plannen en zo nodig opsplitsen in deeltaken;
	- informatie verwerven en op relevantie selecteren, o.m.
	    - de waarde van informatie beoordelen in functie van de opdracht;
	    - relatie tussen gegevens en beweringen opzoeken en interpreteren;
	- een doelmatig wiskundig model selecteren, o.m.
	    - een onderdeel van een opdracht herkennen als een wiskundig of een statistisch probleem;
	    - vaststellen of een model voldoet en het eventueel bijsturen;
	    - zo nodig bijkomende informatie verzamelen om het aangewezen model te kunnen hanteren;
	- een bij het model passende oplossingsmethode correct uitvoeren;
	- de resultaten binnen de context betekenis geven en ze daarin kritisch evalueren;
	- reflecteren op het gehele proces, i.h.b. op de gemaakte keuzen voor representatie en werkwijze;
	- het resultaat van het onderzoek zinvol presenteren, het standpunt argumenteren en verslag uitbrengen van het proces.

7	leervaardigheden, o.m. - het verwerken van losse gegevens; - het verwerken van samenhangende informatie; - het raadplegen van informatiebronnen; - het plannen van de studietijd; - het sturen van het eigen leerproces.

8	reflectievaardigheden, o.m. over
	- de aanpak van hun werk, hun leren;
	- hun leerproces en hun inzet;
	    o bijv. leiden ze tot het bereiken van de doelstelling?
	- de effectiviteit bij het werken, het leren;
	- de sterke en zwakke elementen in de uitvoering van hun opdracht;
	- het concretiseren in een plan tot verbetering;
	    o bijv. welke elementen worden gebruikt om het leren en werken te verbeteren?

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerlingen moeten bij hun wiskundevorming een aantal vaardigheden ontwikkelen. Voor de duidelijkheid werden ze gescheiden geformuleerd. Dit betekent echter niet dat ze altijd zo gescheiden voorkomen. In een wiskundig leerproces wisselen ze voortdurend af.

Het is belangrijk te beseffen dat vaardigheden maar bereikt worden doorheen een proces van langere duur. Een aantal vaardigheden werden aangezet in het basisonderwijs en in de eerste en de tweede graad. Ze moeten verder uitgewerkt worden in de derde graad. Vaardigheden worden hier opgenomen met een brede formulering en een ruim toepassingsgebied. Ze kunnen op verschillende beheersingsniveaus worden bereikt, bijvoorbeeld in functie van het beschikbaar aantal lestijden in verschillende studierichtingen of van de beginsituatie en de mogelijkheden van de leerlingen. In die zin wordt een evenwicht nagestreefd tussen een ideale visie en een haalbare realiteit.

Vaardigheden worden niet automatisch gegenereerd door de studie van ermee verwante leerinhouden. Er moet bewust aandacht aan besteed worden. Dit betekent niet noodzakelijk dat ze in afzonderlijke lessen gepresenteerd moeten worden. Ze moeten precies meermaals bij het spontaan gebruik geëxpliciteerd worden.

Een aantal vaardigheden winnen aan belangrijkheid in functie van de vervolgopleiding van de leerlingen of van hun latere beroepsloopbaan.

1 REKENVAARDIGHEID

In de derde graad moeten een aantal rekenvaardigheden paraat beschikbaar blijven, bijv. het rekenen met formules, het rekenen met functievoorschriften en bij gebruik in de statistiek. Daarnaast zijn mogelijk rekenprocedures vereist voor het rekenen met matrices, het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels, het berekenen van afgeleiden en integralen. Het rekenapparaat is slechts een *middel* bij het oplossen van problemen. En precies daarbinnen krijgt het zijn juiste betekenis. Aan het langdurig oefenen van rekenprocedures in geïsoleerde situaties werd voordien weinig aandacht besteed en dat blijft ook zo in de derde graad.

Met de opgang van geavanceerde rekenmachines en gemakkelijk toegankelijke en adequate software kan de aandacht voor het automatiseren van deze technieken en procedures beperkt worden. Het is nu al duidelijk dat wie later nog rekenprocedures nodig heeft, in de praktijk veelal zal gebruik maken van moderne informatie- en communicatietechnologie. Weliswaar is inzicht nodig in de precieze werking van de gebruikte procedures. Het gebruik van een rekenmachine of een computer mag het inzicht in die noodzakelijke basisvaardigheden dus niet verminderen. Maar er zal minder aandacht besteed worden aan de manuele beheersing ervan. Ook de kritische houding ten aanzien van wat op het scherm van een toestel verschijnt moet verworven worden.

Anderzijds bieden rekenmachines nieuwe mogelijkheden. Praktische problemen die tot nu toe niet binnen het bereik van het secundair onderwijs lagen, omdat de berekeningen (bijv. bij het oplossen van vergelijkingen) te ingewikkeld of te moeilijk waren, kunnen nu wel behandeld worden.

2 MEET- EN TEKENVAARDIGHEID

In de derde graad is voor deze leerlingen de impact van meetkunde beperkt. Toch worden vaak meet – en tekenvaardigheden gemobiliseerd bij het tekenen van grafieken (functieleer en statistiek). Ook bij het analyseren van een probleem wordt vaak een voorstelling gemaakt. Er is dus ruim de gelegenheid om de al verworven vaardigheid te onderhouden.

Grafische rekenmachines en wiskundige software kunnen als een veredelde pen een meerwaarde brengen aan de behandelde leerinhoud, zonder dat ze een aantal basisvaardigheden overbodig maken. Zo dienen leerlingen toch kritisch om te springen met de getoonde resultaten, bijvoorbeeld de begrensdheid inzien van het uitleesvenster of een snelle controle uitvoeren (cf. het schatten bij het rekenen) aan de hand van een nulpunt of van enkele specifieke punten, het stijgen en dalen van de grafiek, eventueel het asymptotisch gedrag.

3 WISKUNDIGE TAALVAARDIGHEID

Wiskunde is uitgegroeid tot een wetenschap waarin begrippen en eigenschappen welomschreven moeten worden. Daartoe wordt de omgangstaal vaak verengd tot een meer *specifieke vaktaal* met eigen regels.

Begrippen, eigenschappen, procedures en wiskundige verbanden worden erin omschreven met behulp van typische *vaktermen* (bijv. vierkantswortel, richtingscoëfficiënt, stelsel, loodrecht op, afgeleide, integraal, histogram). Soms moet een onderscheid gemaakt worden tussen de wiskundige en de dagelijkse betekenis van een term, waarbij de wiskundige betekenis meestal minder vaag omschreven wordt. In de omschrijving van de begrippen en de formulering van eigenschappen worden naast vaktermen specifieke *kernwoorden* gebruikt, die wijzen op het veralgemeningsproces, verbanden, samenhang, ... (bijv. gelijk aan, als ... dan, daaruit volgt, alle, sommige, ...). De wiskundetaal kent vanuit haar voorgeschiedenis een sterke *formalisering* en *symbolisering* die snelle communicatie en universalisering mogelijk maakt, maar die wiskunde voor sommige leerlingen precies zo moeilijk toegankelijk maakt. De eisen die gesteld worden aan deze formalisering zullen uiteraard toenemen naarmate de leerling voor een hoger aantal wekelijkse lestijden wiskunde kiest. Naast de verbale taal is in wiskunde de specifieke *visuele taal* van tekeningen en wiskundige voorstellingen van belang. Een bijzondere vorm van visueel geordend aanbieden van informatie is die in tabelvorm.

Buiten de vaktaal waarmee wiskunde opgebouwd wordt, moeten leerlingen de *beschrijvende taal* blijven hanteren waarin over het wiskundig handelen gesproken wordt (met termen zoals definitie, eigenschap, kenmerk, verklaar ..., bereken..., los op ..., construeer ..., vraagstuk).

Reële problemen worden meestal niet rechtstreeks in de wiskundetaal gesteld. Een belangrijke vaardigheid is het mathematiseren, het omzetten of het *vertalen* van de situatie, vaak uitgedrukt met behulp van de omgangstaal, naar de wiskundige situaties en modellen, in het bijzonder naar en met wiskundige vaktaal. Daarbij moet de informatie die de probleemsituatie beschrijft geanalyseerd worden op elementen die verwijzen naar wiskundige begrippen, relaties, …. Het schematiseren, en het structureren van wiskundige informatie gebruikt zowel die taalvaardigheid als redeneervaardigheden en probleemoplossende vaardigheden.

In een actief leerproces krijgen de leerlingen heel wat kansen om de verschillende communicatieve vaardigheden (zowel lezen, luisteren, spreken als schrijven) te hanteren en ze toe te passen op wiskundige situaties. In communicatie met andere leerlingen kunnen voorbeelden en tegenvoorbeelden van begrippen en eigenschappen besproken worden, wat de begripsvorming ondersteunt. Speciale aandacht kan gaan naar de betekenis van de wiskundige vaktermen en kernwoorden. De leerlingen moeten leren de geëigende vaktermen voldoende correct te gebruiken. Ze moeten vertrouwd geraken met strengere eisen die aan wiskundige wendingen worden gesteld, zonder dat dit hier een minder zware didactische aanpak in de weg staat. Leerlingen moeten leren hun ervaringen, bevindingen, vermoedens, besluiten en oplossingen te verwoorden. Precies in het verwoorden van hun gedachten en hun inzicht kunnen ze beter de tekortkomingen ervan ervaren en daardoor hun inzicht verdiepen.

Omdat wiskundige informatie visueel kan overgebracht worden, moet aandacht besteed worden aan het lezen en interpreteren van visuele informatie (bijv. op tekeningen in de meetkunde of informatie op een grafiek of een diagram in de statistiek). Het hanteren van een schets of een nauwkeurige tekening als middel tot communicatie moet aangemoedigd worden. Het maken van een meer abstracte of formele redenering zal ondersteund worden door het redeneren op figuren.

Bijzondere aandacht moet besteed worden aan het verwerven van de leesvaardigheid bij het lezen van de tekst van opgaven, problemen en vraagstukken. Vaak is deze moeilijkheid voor de leerlingen groter dan het uitvoeren van gekende rekentechnieken. Aan deze belangrijke stap, noodzakelijk bij het analyseren van problemen en het formuleren van vermoedens, moet bijzondere aandacht besteed worden.

4 DENK- EN REDENEERVAARDIGHEDEN

Met denk- en redeneervaardigheden worden onder meer bedoeld: abstraheren (bij de begripsvorming), een vermoeden formuleren, veralgemenen (ontdekken van een eigenschap), analyseren, synthetiseren, structureren, ordenen, analoog werken, argumenteren, bewijzen. Het gaat om meer dan het kunnen bewijzen van eigenschappen.

Vanuit het actief onderzoeken van relaties tussen begrippen worden leerlingen geconfronteerd met vele vormen van beweringen en vermoedens. Niet elk intuïtief vermoeden leidt tot een 'eigenschap', niet elke bewering zal blijken juist te zijn, veralgemeenbaar, ... Daarom is het zinvol bij de besluitvorming aandacht te besteden aan de argumenten die ervoor kunnen gegeven worden. Ook bij het actief oplossen van problemen zullen de leerlingen hun oplossing of hun redenering op een of andere wijze moeten argumenteren.

Het verwerven van deze redeneervaardigheid vraagt een geleidelijke en geduldige aanpak. Het is zinvol aandacht te besteden aan de verschillende fasen van het opbouwen van een redenering of een bewijs, o.m. het redeneren op een tekening, het argumenteren van delen van een redenering (bijv. het expliciteren van gegeven en vraag), het inzien van en/of zelf ontdekken van de kernidee uit een redenering, het maken van redeneringen in analoge situaties, het zelf uitschrijven van een behoorlijk geordende verklaring.

5 PROBLEEMOPLOSSENDE VAARDIGHEDEN

Leerlingen moeten vaardigheid verwerven in het zelfstandig oplossen van problemen. Het bevorderen van dit probleemoplossend denken is een van de voornaamste opdrachten van leerkrachten wiskunde. De transferwaarde van deze vaardigheden naar andere vakken kan zeer groot zijn. De leerlingen ervaren hierdoor dat de inzichten en de vaardigheden, die ze opdoen bij de wiskundevorming, ruim kunnen ingeschakeld worden bij het vertolken en het verklaren van problemen uit de andere vakken en uit de maatschappelijke leefwereld. Probleemoplossende vaardigheden zijn een essentiële troef in de studie- en beroepsloopbaan van leerlingen.

De meest zinvolle aanpak lijkt die van een volgehouden *integratie* ervan *in het normale lesgebeuren*. Leerlingen zullen deze vaardigheden maar verwerven doorheen een actief proces van zich vragen stellen, patronen ontdekken, antwoorden zoeken en onderzoeken, voorbeelden en tegenvoorbeelden opzoeken, vraagstelling vereenvoudigen, voorstellen analyseren, testen en bijsturen, vermoedens argumenteren, ...

Belangrijk is dat de leerlingen aantrekkelijke, haalbare problemen aangeboden krijgen. Vooral succeservaring zal leerlingen aanzetten om nieuwe en moeilijkere problemen aan te pakken. Leerlingen moeten evenwel problemen leren ‘zien’. Daarom zullen geregeld open problemen, weliswaar haalbaar op het niveau van de leerlingen, aangeboden worden. Problemen moeten niet noodzakelijk altijd buiten de wiskunde gezocht worden. Ook wiskundige situaties kunnen als aantrekkelijke problemen gepresenteerd worden.

Het verwerven van probleemoplossende vaardigheden is een lang en arbeidsintensief proces. Daarom moet de aanpak in de derde graad aansluiten op de inspanningen die al in de eerste en de tweede graad werden gedaan. Zo kan men terugvallen op verschillende stappen die voor leerlingen misschien al vertrouwd zijn.

In de eerste plaats zal aandacht besteed worden aan een heldere *probleemstelling*. Het probleem moet voor de leerlingen duidelijk zijn (dit kan bijvoorbeeld door de leerlingen het probleem in eigen woorden te laten stellen). Als het gaat om het onderzoeken van verbanden of eigenschappen moet dit leiden tot een duidelijke formulering van een vermoeden of hypothese.

Daarop volgt het *analyseren* en/of het *mathematiseren*. Dit betekent dat de leerlingen de wiskundige probleemstelling kunnen herkennen in het gestelde probleem of in de opgave (bijv. het probleem is te herleiden tot het bepalen van een maximum van een functie, tot het berekenen van een oppervlakte, …). Dit betekent onder meer dat ze bij een situatie gegeven en gevraagde kunnen bepalen, kwantificeerbare elementen kunnen opzoeken en wiskundig vertolken, relaties tussen elementen (gegevens onderling, gegevens en gevraagde) kunnen leggen en wiskundig vertolken, uit te voeren bewerking(en) kunnen bepalen. In deze fase worden vaak *zoekstrategieën* of *heuristische methoden* gebruikt. In een leerproces van probleemoplossende vaardigheden is het belangrijk deze te expliciteren. Bij een complexer probleem is het zinvol in deze fase een planmatige aanpak te voorzien en de uitvoering van het plan verderop te bewaken.

Daarop volgt het *uitschrijven van een oplossing, het berekenen van het resultaat of het uitschrijven van een verklaring*, het maken van een *controle* op het resultaat, het maken van een *realiteitsproef* (kan dit resultaat in deze context) en het formuleren van een *antwoord* op het gestelde probleem.

Heuristische methoden
Voorbeelden van veel gebruikte heuristische methoden zijn:
- gegeven en gevraagde wiskundig expliciteren;
- bij een gegeven situatie een schets of een tekening maken;
- bij een gegeven situatie een voorbeeld of een tegenvoorbeeld geven;
- bij een situatie bijzondere gevallen onderzoeken;
- gebruik maken van analogie, symmetrie, …;
- een eenvoudigere probleemstelling onderzoeken;
- een of meer veranderlijken in het probleem constant houden;
- een gestelde voorwaarde laten vallen.

Heuristische methoden worden veelvuldig gebruikt. Belangrijk is ze bewust te laten ervaren en te expliciteren op het ogenblik dat ze spontaan gebruikt worden. Een actieve aanpak van het leerproces laat toe dat leerlingen hierover onderling en met de leerkracht informatie uitwisselen. Met het oog op het verwerven van een hogere graad van zelfwerkzaamheid bij de leerlingen kan een aantal complexere oefeningen aangeboden worden waarbij doelbewust het inzicht in het gebruik van heuristische methoden wordt nagestreefd.

Bij het oplossen van problemen worden de leerlingen geconfronteerd met het toepassen van hun kennis in diverse situaties. Het is belangrijk te beseffen dat probleemoplossende vaardigheden en heuristische methoden maar effectief zullen werken, als de leerlingen over een efficiënte kennisorganisatie beschikken. Het oplossen van problemen kan leerlingen precies motiveren deze kennisorganisatie te onderhouden.

De *rol van de leerkracht* kan erin bestaan leerlingen individueel tot nadenken aan te zetten, discussie over oplossingen uit te lokken en hierbij een kritische houding aan te bevelen. Zeker in de derde graad zal de leerkracht proberen in een eerste fase minder inhoudelijke hulp aan te reiken en meer te verwijzen naar het gebruik van heuristische methoden en de beschikbare kennisorganisatie (niet naar specifieke kennis). Zo worden de leerlingen geconfronteerd met het opnemen van verantwoordelijkheid voor het uitvoeren van de opdracht of voor hun leren. Pas als dit niet lukt is het zinvol om terug meer leiding te geven.

De leerkracht zou zelf een analoge werkwijze kunnen hanteren bij het klassikaal opstellen van bewijzen van eigenschappen en het opbouwen van redeneringen. Ook is het zinvol dat de leraar aan het eind van een oplossingsproces of redenering de denkstappen eens controlerend overloopt en de gebruikte heuristische methoden eens expliciet laat formuleren of bevragen.

Het verdient aanbeveling dat voldoende differentiatie in de opdrachten wordt nagestreefd, omdat in de verwerving van probleemoplossende vaardigheden het verschil tussen de leerlingen erg groot kan zijn. Hierdoor kan zowel een wiskundig-sterkere leerling aan zijn trekken komen, als tijd vrijgemaakt worden voor het begeleiden van de wiskundig-zwakkere leerlingen. Voor wiskundig-sterke leerlingen kan men bijv. vlugger naar open problemen grijpen.

6 ONDERZOEKSVAARDIGHEDEN

De leerlingen worden geconfronteerd met onderzoeksopdrachten die ze zelfstandig of in groep moeten verwerken. Een aantal vaardigheden die ze daarbij kunnen hanteren zijn al gedeeltelijk aan bod gekomen bij het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden. Nu komen er uitdrukkelijker de regulerende en de reflectieve onderdelen bij.

Een onderzoeksopdracht begint met het uitklaren van de onderzoeksvraag. Belangrijk voor de haalbaarheid, zeker in de beginfase, is deze voldoende te beperken en af te bakenen, anders riskeren de leerlingen in een te groot project verloren te lopen. Dat kan door de onderzoeksopdracht op te splitsen in deelvragen (wie, wat, waar, wanneer, waarom, hoe, welke, waarmee, waartoe, …).

Interessant is dat leerlingen ook gevoeligheid ontwikkelen voor de soort vraag die ze onderzoeken: bijv.

- beschrijven of exploreren van een situatie,
- vergelijken en ordenen van situaties,
- onderzoek gericht op verklaring of het theoretisch organiseren,
- evaluatie- of toetsingsonderzoek,
- onderzoek gericht op voorspellingen,
- onderzoek met het doel een concreet probleem op te lossen.

Afhankelijk van het soort onderzoek zal men vaak ook een andere planning volgen en op een andere wijze gegevens verzamelen, beoordelen of interpreteren. Vaak hanteert men ook andere denkmethoden, bijv.

- reproductief denken,
- abstraherend denken,
- inductief denken,
- reductief denken,
- deductief denken.

Leerlingen zullen in deze beginfase allicht maar met de meest eenvoudige vormen van dit uitgebreid palet van onderzoeksmogelijkheden geconfronteerd worden.

Na het formuleren van een vermoeden of sterker een hypothese zal men de vraag meestal analyserend uiteenrafelen, gegevens verzamelen in functie van de vraag, om te komen tot verificatie. Daarbij kunnen allerlei zoeksystemen gehanteerd worden (bibliotheek, media, internet).

Het is niet alleen belangrijk te weten wat onderzocht zal worden, men zal er ook een concrete werkorganisatie voor opzetten. Een dergelijk plan van aanpak bestaat uit een onderzoeksplan en een tijdplan. In het onderzoeksplan staan de deelvragen die men geselecteerd heeft, de vermoedens en hypothesen, de methoden, de bronnen en hulpmiddelen. Een tijdplan is zinvol om de concrete organisatie op te volgen wat betreft de beschikbaarheid van materiaal en hulpmiddelen, verwerkingstermijnen, eventuele taakverdeling en afspraken.

In deze studierichtingen, waar wiskunde slechts een beperkte omvang heeft, zal wiskunde maar zijdelings bijdragen tot het realiseren van de onderzoeksvaardigheden. Toch bevatten een aantal opdrachten (bijv. in economie of humane wetenschappen) vaak een wiskundige of statistische component. Leerlingen moeten deze modellen leren herkennen en vlot gebruiken in deze toepassingssituaties. Ook de opdrachten binnen de vrije ruimte kunnen een wiskundige component bevatten. Een wiskundig oog bij het kiezen van modellen zal vaak ook letten op een mogelijke algoritmisering van een proces.

Wat betreft het procesverloop kan men nu vaak terugvallen op de in wiskunde ontwikkelde probleemoplossende en controlerende vaardigheden.

Belangrijk is ook het proces af te sluiten met een reflectiefase, waarin de leerling zelf terugkijkt op het verloop van het proces en er zijn leerervaringen bij formuleert en eventueel een werkplan opstelt om moeilijkheden en tekorten op te vangen.

7 LEERVAARDIGHEDEN

Aan het verwerven van leervaardigheden moet in de derde graad nog steeds bewust gewerkt worden. Daarbij moet steeds meer aandacht gaan naar het zelfstandig leren van de leerlingen. Belangrijk is dat de bijdrage van wiskunde kadert in een bredere aanpak van de problematiek leren leren in de school en de groei naar een zelfverantwoord leren. Omdat het 'de leerling' is die adequate technieken moet verwerven, zal over de vakken heen toch een zekere eenvormigheid nagestreefd worden. Algemene technieken worden uiteraard vakspecifiek vertaald.

Bij het verwerven van wiskunde worden een aantal *leervaardigheden* geactiveerd.
Voorbeelden zijn

- het inprenten (notaties, symbolen, formules);
- het gebruik van de vormkenmerken van een tekst (titels, subtitels, afbeeldingen, schikking kaders, lettertype, tekstmarkeringen);
- de aandacht voor het begrijpen en analyseren van de leerinhoud;
- het opnieuw opzoeken en zo nodig inoefenen van voorkennis (het aanleggen of gebruiken van een vademecum kan hierbij ondersteunend werken);
- het verdiepen van de leertekst in leerboeken of notities (zich vragen stellen bij de leerinhoud, de tekst structureren bijv. met tekstmarkeringen, kleur, ..., het bijhouden van een kennisschema);
- het gebruiken van 'informatiebronnen' (een inhoudstafel, een register, een samenvatting van de leerinhouden in het leerboek, een vademecum, een handleiding van de rekenmachine);
- het zichzelf sturen bij het leren, bijv.
    - de keuze van het verwerkingsproces eigen aan de wiskundige leerinhoud,
    - het oordeelkundig gebruiken van een antwoordblad, een correctiesleutel,
    - het plannen van de studietijd,
    - het onderzoeken van de gemaakte fouten (bijv. door de eigen werkwijze te vergelijken met die van anderen, aangeven waarom iets fout gegaan is) en hoe die kunnen vermeden worden.

Belangrijk is te beseffen dat *tijdens het leerproces* zelf al sterk kan bijgedragen worden tot het realiseren van leervaardigheden. Zo kan een leerproces waarin de leerling actief betrokken wordt bij het bevragen van de leerinhouden, die leerling leren 'vragen stellen'. Het 'analyseren' van een definitie of eigenschap in de klas ondersteunt het analyseren tijdens het instuderen. Het gebruik van een ordelijk bordschema met het geëxpliciteerd (niet automatisch) gebruik van verdiepingstechnieken (kleur, kaders, structuur) zal leerlingen aanzetten dit te doen. Het vergelijken van het bordschema met de neerslag van de leerstof in het leerboek (veel meer dan het aanduiden van de leerstof) en het wijzen op de vormkenmerken ervan ondersteunt het leren. Het hernemen van de structuur bij de aanknopingsfase van de les, het laten raadplegen van overzichten van leerinhouden (bijv. samenvatting in het leerboek en/of in een beschikbaar of eigenhandig aangelegd vademecum) zal hen telkens opnieuw confronteren met structurering en synthese van hun kennis en hen meteen leren hun voorkennis zelfstandig op te zoeken en aan te vullen. De wijze waarop de leerkracht omgaat met fouten en deze aangrijpt als leerkansen, kan leerlingen de waarde leren van het onderzoeken van hun fouten. De wijze waarop leerlingen betrokken worden bij het leerproces kan hun zelfwerkzaamheid en hun verantwoordelijkheid voor het eigen leren versterken.

8 REFLECTIEVAARDIGHEDEN

Leerlingen moeten leren systematisch reflectie in te bouwen bij het uitvoeren van opdrachten en i.h.b. bij het leren. Niet alleen het verwerven van nieuwe kennis en inzichten, het vinden van de oplossing van een probleem of het uitvoeren van een leertaak zijn belangrijk, maar ook de wijze waarop het proces verlopen is, biedt belangrijke leerkansen. Leerlingen moeten dus leren stilstaan bij het proces zelf. Na het handelen, volgt het terugblikken op dat handelen, waarbij men zich bewust wordt van de essentiële elementen ervan, de goede ervaringen en de problemen die zijn opgetreden. Daarbij zal de leerling, eventueel gecoacht door de leraar, alternatieven formuleren en selecteren vanuit bezinning en overleg, om ze in een nieuwe situatie uit te proberen.
Voorbeelden van reflectieve vragen zijn:

- Wat was het doel, wat wilde ik bereiken?
- Hoe is het proces concreet verlopen?
    - Hoe kijk ik zelf terug op het proces?
- Welke problemen deden zich effectief voor en hoe kan ik dit positief omschrijven?
- Welke oplossingen, alternatieven zijn er?
    - Welke voordelen en nadelen zie ik al?
- Hoe stuur ik mijn leervaardigheden bij vanuit deze ervaring?

Het is evident dat dergelijke inzichten niet vanzelfsprekend automatisch worden voortgebracht. Ze kunnen bijvoorbeeld als werkwijze aan bod komen bij meer klassikaal verwerkte opdrachten of zelfs na een klassikale les. Er kan dan klassikaal gereflecteerd worden, bijvoorbeeld aan de hand van voornoemde vragen. Toch lijkt een individuele aanpak met een meer persoonlijke feedback van de leraar zinvoller. Dat veronderstelt weliswaar een van nabij opvolgen van het leerproces van de (individuele) leerling, bijv. vanuit een observatieschema. De rol van de leraar verschuift hierbij dus van die van alwetende informatiebron naar begeleider en ondersteuner van het leerproces.

5.1.2 Attitudes en opvattingen

LEERPLANDOELSTELLINGEN

De leerlingen ontwikkelen

9	zin voor nauwkeurigheid en orde, o.m. - een houding van gecontroleerd uitwerken en terugkijken op uitgevoerde opdrachten.	11
10	zin voor helderheid, bondigheid, volledigheid, eenvoud en doelmatigheid van de gebruikte wiskundetaal, o.m. - de ervaring dat gegevens uit een probleemstelling toegankelijker worden door ze doelmatig weer te geven in een geschikte wiskundige representatie; - de doelmatigheid van het rekenen, voor een adequate keuze tussen het manuele werken en het gebruik van ICT-hulpmiddelen.	1 3 4 7
11	kritische zin, o.m. - een kritische houding tegenover de eigen berekeningen, beweringen, handelingen, ...; - een reflectieve houding ten aanzien van gemaakte keuzen voor representatie en oplossingstechnieken; - een kritische houding tegenover de mogelijkheden en de beperkingen van het gebruik van wiskunde.	2 5
12	zelfvertrouwen, zelfstandigheid, doorzettingsvermogen en doelmatigheid bij het aanpakken van problemen en opdrachten.	
13	zelfregulatie, o.m. - een onderzoeksgerichte houding ten aanzien van feiten, opgaven en problemen; - het oriënteren, plannen, uitvoeren en bewaken van een oplossingsproces.	12 4

14	zin voor samenwerking en overleg, o.m. - de ervaring dat ze hun mogelijkheden kunnen vergroten door samenwerking met anderen; - appreciatie voor een andere oplossing of aanpak.	13
15	waardering voor wiskunde door inzicht in de bijdrage ervan in de culturele, historische en wetenschappelijke ontwikkeling, o.m. - zin voor bewondering door de rol van wiskunde in de kunst; - zin voor de rol van wiskunde bij het beschrijven van reële problemen; - zin voor verwondering en bewondering voor de elegantie van een redenering of een oplossing.	6 8 9
16	inzicht in hun studie- en beroepskeuzeproces, o.m. door het inwinnen van informatie over het aandeel van wiskunde in een vervolgopleiding en die vergelijken met hun voorbereiding.	10

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Doorheen de wiskundevorming kunnen leerlingen een aantal attitudes en in het bijzonder leerattitudes verwerven. Omdat zoals bij leervaardigheden het de leerling is die attitudes moet verwerven, zal over de vakken heen een zekere eenvormigheid nagestreefd worden en moet de bijdrage van wiskunde *kaderen in een bredere attitudevorming in de school*.

Het is belangrijk te beseffen dat attitudes maar bereikt worden doorheen een *proces van langere duur*. Ze hangen ook deels samen met de wijze en het niveau waarop leerinhouden worden uitgewerkt. In die zin is het beheersingsniveau ten aanzien van deze attitudes en opvattingen daarvan afhankelijk en te begrijpen in functie van het normale verwerkingsniveau bij deze leerlingen. Daarom is een continue aandacht aan attitudes, ook in de derde graad, nog zinvol.

9 ZIN VOOR NAUWKEURIGHEID EN ORDE

Zin voor nauwkeurigheid en orde kan nagestreefd worden bij de ontwikkeling van reken-, meet- en tekenvaardigheid. De leerlingen moeten beschikken over de gewoonte op hun uitvoeringsproces terug te kijken als een vorm van *controle*. Ze kunnen zo vlugger tot nauwkeurige resultaten komen.

Omdat de graad van complexiteit van de wiskunde en de opdrachten toeneemt, moet nauwkeurigheid nagestreefd worden bij het gebruik van notaties en symbolen, bij het verwoorden van definities en eigenschappen (zowel schriftelijk als mondeling). Het leerproces in de klas moet voldoende kansen bevatten om terugkoppeling te geven over antwoorden en oplossingen van leerlingen zelf. Het is precies in het toetsen van hun onvolmaakte antwoord dat de leerlingen de kans krijgen het te corrigeren.

Ordelijk en systematisch werken is een belangrijke leerhouding. Ze kan bijgebracht worden bijvoorbeeld bij het noteren, het maken van oefeningen en het aanpakken van problemen.

10 ZIN VOOR KWALITEIT VAN DE WISKUNDIGE REPRESENTATIE

Leerlingen moeten hun gedachten en hun inzicht behoorlijk leren verwoorden. Het leerproces in de klas moet daartoe voldoende kansen bieden. Vanuit de vaak intuïtieve verwoording in de fase van de begripsvorming of het vermoeden van een eigenschap moeten de leerlingen geleidelijk aan een correcte wiskundetaal hanteren. Een wiskundige formulering is vaak helder, bondig en van alle ballast ontdaan. De leerlingen kunnen hierbij ervaren dat het gebruik van dergelijke formuleringen vaak het denkproces helder doet verlopen. Ligt de beknoptheid van symbolische formuleringen voor de hand, dan is een behoorlijke verwoording ervan vaak een probleem. Dit vraagt bijzondere aandacht.

Omdat een zoekproces met vraag en antwoord, met gissen en missen en dus niet rechtlijnig ontwikkeld wordt, zal eens het doel bereikt, de uiteindelijke redenering synthetiserend overlopen worden, om een helder inzicht te bekomen. Voor leerzwakke leerlingen biedt dit vaak de gelegenheid aan te pikken. Ook bij het oplossen van problemen zal aandacht besteed worden aan het overhouden van een duidelijke synthese. Een heldere oplossing zal meestal overzichtelijk zijn en gemakkelijker te begrijpen. Zowel bij het leerproces van de wiskundige inhouden zelf, als bij het oplossen van een probleem zal men bij het synthetiserend overlopen aandacht besteden aan de doelmatigheid van een aanpak door de voor- en nadelen van bepaalde werkwijzen te bespreken.

11 KRITISCHE ZIN

Wiskundevorming moet leiden tot een bevragende, onderzoekende, controlerende, verifiërende houding. Dit wil zeggen dat berekeningen, beweringen, argumenteringen en redeneringen niet zomaar worden aanvaard en overgenomen. Dit slaat onder meer op vermoedens, oplossingstechnieken of redeneringen van leerlingen. Dit slaat op de zelf gekozen modellen of representaties en op de eigen berekeningen, oplossingen en redeneringen. Bij de keuze van een model of bij een berekening, een redenering, een oplossing van een probleem zijn zowel het proces als het eindproduct van belang. Oog krijgen voor de oplossingsmethode kan leiden tot het leren waarderen van andere oplossingen. Zo kunnen de leerlingen een werkwijze of methode leren waarderen omdat ze eenvoudiger is, minder tijd vraagt, wiskundig helder geformuleerd is, sneller veralgemening toelaat.

Naarmate men doordringt in de wiskundekennis moet ook de bevragende, onderzoekende, controlerende, verifierende en reflectieve houding groeien. Ze is onmisbaar bij de verdere ontwikkeling van wiskunde. Gelukkig doen zich ook meer kansen voor om ze te ontwikkelen.

Belangrijk is dat deze onderzoekende en reflectieve houding herkenbaar is in het didactisch optreden van de leerkracht. Zowel de aanbreng van nieuwe leerinhouden als het toepassen van kennis en het oplossen van problemen bieden kansen tot stimulerende klassengesprekken. Leerlingen zullen maar oog krijgen voor het oplossingsproces, als hieraan ook tijdens het onderwijsleerproces voldoende aandacht besteed wordt en als ze bijvoorbeeld gestimuleerd worden verschillende oplossingen of antwoorden te vergelijken.

Doorheen het ontwikkelen van een kritische houding worden leerlingen geconfronteerd met de mogelijkheden en de beperkingen van het gebruik van wiskunde. Het gebruik van statistiek, bijv. in de media, kan zeker als voorbeeld aan bod komen. Deze kritische ingesteldheid is een belangrijke houding voor wiskundegebruikers, die de meeste leerlingen in de toekomst zullen zijn. Een gezonde relativering naast de verwondering over de mogelijkheden van de wiskunde kan bij leerlingen leiden tot een gemotiveerde, evenwichtige opvatting over wiskunde.

12 ZELFVERTROUWEN EN ZELFSTANDIGHEID

Bij vaardigheden werd uitvoerig ingegaan op het aanpakken van problemen. Het is niet moeilijk in te zien dat het verwerven van probleemoplossende vaardigheden en onderzoeksvaardigheden een uitgelezen kans biedt om zelfwerkzaamheid en doorzettingsvermogen te verwerven. Met het oog op vervolgstudies moet in de derde graad de zelfstandigheid bij het verwerken van opdrachten toenemen.

Een goede aanpak van deze leerprocessen zal de leerlingen een solide basis geven waarop zij kunnen terugvallen. Succeservaring zal daarbij het zelfvertrouwen en de motivatie van leerlingen onderbouwen. Wiskundig minder begaafde leerlingen geraken snel ontmoedigd als ze geen succes kennen. Ze moeten aangezet worden een zelfde stap meermaals te hernemen. In een gedifferentieerde aanpak kunnen oefeningen zo aangeboden worden, dat voor die leerlingen de stappen niet te groot zijn. Voor anderen kan geopteerd worden voor een meer open vorm van aanbieden, zodat ze leren zelf een probleem te ontdekken en te stellen.

Het is evident dat leerlingen fouten zullen maken. In een te uitsluitend cognitief gewaardeerd leerproces worden leerzwakke leerlingen daardoor benadeeld. Het is belangrijk in te zien dat reflecteren op fouten inherent deel uitmaakt van het leerproces. Een goede leerkracht zal deze aanwenden als belangrijke leerkansen en zal leerlingen stimuleren daardoor het inzicht in hun leerproces te verbeteren. Een aanmoedigende en respectvolle benadering zal leerlingen zeker stimuleren en uiteindelijk leiden tot betere resultaten.

13 ZELFREGULATIE

Bij het oplossen van problemen moeten de leerlingen over een goede kennisorganisatie beschikken en zoekstrategieën kunnen hanteren. Daarnaast moeten ze hun zoeken en werken gecontroleerd uitvoeren. Dit betekent dat ze zelf hun werk kunnen 'reguleren'. Dit houdt onder meer in dat ze hun resultaat toetsen (bijv. bij een rekenresultaat zowel op juistheid als op realiteitswaarde). Het is echter niet alleen aan het einde van het proces dat 'controle' nodig is. Die kan van bij de aanvang in het oplossingsproces opgenomen worden. Van bij de verkenning van het probleem (de oriëntatie), bij het opmaken van een uitvoeringsplan en bij de uitvoering zelf kan stapsgewijze gewerkt worden en kan elke stap gecontroleerd worden. Zo leidt het aanpakken van problemen tot een onderzoeksgerichte houding en tot methodisch, planmatig en gecontroleerd werken. Bij het opzetten van een redenering, bij het verklaren van een eigenschap kunnen dezelfde regulatietechnieken gevolgd worden.

Het is evident dat leerlingen deze houding maar geleidelijk aan zullen verwerven en dat dit gemakkelijker zal gaan, naarmate deze houding tijdens het leerproces in de klas aan bod komt in de werkwijze van de leerkracht.

Met het ontwikkelen van een dergelijke onderzoeksgerichte houding kan wiskunde bijdragen tot een meer algemene vorming. Ze kan overgedragen worden op het aanpakken van andere dan wiskundige problemen. Zo kan ze leiden tot de leerhouding van methodisch, planmatig en gecontroleerd werken. Op deze wijze kan wiskunde bijdragen tot het verwerven van een kritische houding ten aanzien van het globale eigen denken en handelen.

14 ZIN VOOR SAMENWERKING EN OVERLEG

Een onderwijsleerproces waaraan de leerlingen volwaardig en actief kunnen deelnemen, waarin ze hun bevindingen en hun oplossingen kunnen vergelijken en toetsen aan die van anderen, kan hen een positieve waardering bijbrengen voor samenwerking en overleg. Bij het bespreken van oplossingsmethoden, bij het kritisch onderzoeken van elkaars oplossing kan waardering voor elkaars mening aangeleerd worden en daardoor waardering voor de persoon van de andere zelf.

Bij het uitvoeren van een aantal opdrachten, bijv. het oplossen van bepaalde (ruimer gestelde) problemen, het opzoeken van allerlei historische gegevens, het opzoeken op het internet over wiskundigen, belangrijke wiskundige stellingen, wiskundige illustraties of toepassingssituaties kan de samenwerking gestimuleerd worden door de opdrachten in groep te laten afwerken. Zo kunnen leerlingen aangezet worden tot samenwerking en overleg.

Actieve leerprocessen zullen wiskundig-sterke leerlingen zeker niet benadelen. Daarom moet er over gewaakt worden dat ook de wiskundig-zwakke leerling voldoende waardering ervaart in het onderwijsleerproces.

15 WAARDERING VOOR WISKUNDE

Wiskundevorming staat niet los van die van de andere vakken. Wiskunde zelf is doorheen de eeuwen ontwikkeld precies in samenhang met de opvattingen en de problemen van die tijd. Een aantal historische contexten bieden vandaag nog een zinvolle instap om bepaalde wiskundeproblemen en leeronderdelen aan te pakken. Daarom zal die historische context geïntegreerd worden in de aanpak.

Een meer realistische aanbreng en voldoende concrete toepassingen moeten er borg voor staan dat de ontwikkeling van wiskunde bij de leerlingen niet los staat van de wereld rondom hen. Anderzijds biedt wiskunde zelf heel wat kansen om door te dringen tot de essentie van bepaalde problemen en situaties. Door een beter begrijpen kan de verwondering en de bewondering voor de context groeien. De elegante wijze waarop met behulp van wiskunde problemen beschreven en opgelost worden kan op zich al verwondering wekken.

16 INZICHT IN HET STUDIE- EN BEROEPSKEUZEPROCES

Aan het einde van de derde graad staan leerlingen voor een belangrijke keuze in verband met de vervolgopleiding die ze zullen volgen en de latere beroepskeuze. In een aantal vormen van hoger onderwijs en studierichtingen krijgt wiskunde nog een belangrijke vormende en ondersteunende rol toebedeeld. Het al of niet vlot kunnen omgaan met de moderne wiskundemethoden die in de wiskundevorming van de derde graad aan bod komen, kan een aanwijzing geven voor deze keuze.

5.2 INHOUDELIJKE DOELSTELLINGEN

5.2.1 Functieleer

BEGINSITUATIE

De volgende leerinhouden in verband met functies werden voor alle leerlingen behandeld in de tweede graad.

- Expliciteren en interpreteren van algebraïsche verbanden tussen grootheden, als die gegeven worden met behulp van een tabel, een grafiek, een formule (o.m. waarden aflezen, extreme waarden aflezen, het globale verloop bespreken).
- Onderzoeken van functies van de eerste graad en de tweede graad in één veranderlijke (grafiek, nulpunt, tekenverandering) met inbegrip van het oplossen van vraagstukken met vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste graad in één onbekende en stelsels van vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.
- Onderzoeken van enkele elementaire functies met voorschriften zoals $f(x) = x^3$, $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Bovendien werden de volgende leerinhouden behandeld voor de leerlingen in leerweg vijf.

- Uitvoeren van euclidische deling van veeltermen en het toepassen van de reststelling.
- Oplossen van vraagstukken in verband met rekenkundige en meetkundige rijen.

ALGEMENE INLEIDING

De functieleer kan *algemeen* worden gezien als een studie van het beschrijven en het bestuderen van relaties en verbanden, die met behulp van een functie kunnen uitgedrukt worden. Zoals bij elke wiskundevorming is daarbij fundamenteel, dat de leerlingen een aantal concepten en denkprocessen eigen aan dit onderdeel leren begrijpen en beheren.

Daaruit volgt een dubbel doel voor de hier beoogde vorming. Een eerste belangrijke klemtoon is het leren *ontwikkelen van de wiskundige beschrijving* zelf, het mathematiseren van een situatie, het omzetten naar functionele verbanden en begrippen. Daarbij wordt geprobeerd het vastgestelde verband, de situatie, het probleem te beschrijven met behulp van karakteristieken van functies. Een tweede klemtoon is dan *het gebruik van de wiskundige kennis en methoden* om dergelijke karakteristiek(en) te bespreken om er zinvolle besluiten of oplossingen mee te ontwikkelen. In dat proces komt wellicht een rekentechnische verwerking voor, al of niet manueel uitgevoerd. Met de beschikbaarheid van de actuele hulpmiddelen wordt er in het leerplan voor geopteerd de complexiteit van de manuele technieken te beperken.
De klemtonen bij functieleer liggen vooral op een brede betekenisgeving, de ontwikkeling van wiskundig denken en het oplossen van problemen, eerder dan op het memoriseren van allerlei regels of op het verwerven van (extreme) automatismen in het (manueel) uitvoeren van rekentechnieken.

In hun *vooropleiding* zijn de leerlingen al geconfronteerd met functies. In een verkennende inleiding werden het aanpakken van problemen vanuit functionele verbanden en het bijbehorende begrippenkader omtrent functies algemeen gesitueerd. De leerlingen moeten vertrouwd zijn met een viervoudige verkenning van functieverbanden. Bij het stellen van een probleem of het beschrijven van een situatie wordt vaak eerst een verbale omschrijving gebruikt. Meer gemathematiseerd of gemodelleerd mondt dit uit bij de beschrijving van de functie met grafisch hulpmiddelen (bijv. door het gebruik van de grafiek), numeriek (bijv. door het gebruik van een tabel met corresponderende getalwaarden) of analytisch (waarbij met het functievoorschrift gewerkt wordt).
Dan volgde een meer specifieke studie van de eerste- en de tweedegraadsfuncties. Door een kennismaking met enkele andere elementaire functies werden begrippen als domein en asymptotisch gedrag intuïtief aangebracht.

In de derde graad wordt het *functieapparaat* uitgebreid, zowel de soorten functies als het begrippenkader. Maar gezien het voor deze leerlingen om een basisvorming gaat, die moet gerealiseerd worden in een relatief beperkt aantal lestijden, kan niet het ganse beschikbare functiearsenaal even sterk en diepgaand uitgewerkt worden. Er

moeten dus keuzen gemaakt worden, zowel wat betreft het aantal kenmerkende elementen dat uitgediept wordt, als het aantal categorieën functies dat aan bod kan komen.
Er wordt voor geopteerd slechts een beperkt aantal begrippen uit te diepen. Andere begrippen zullen beperkt moeten blijven tot de hoofdzaken of nog andere zullen slechts in een concrete omgeving als kennismaking ter sprake komen. En omdat de taal die hierbij zal gehanteerd worden, afhankelijk is van de situatie waarin de begrippen voorkomen, zal die dus niet altijd formeel zijn. De vorming die functieleer aanreikt, kan dan snel renderen in een motiverend gebruik van de inzichten in toepassingen.

De *functiecategorieën* die uitgebreid aan bod kunnen komen zijn veeltermfuncties, exponentiële, logaritmische en goniometrische functies. Er wordt voor gekozen om voor deze leerlingen binnen de basisleerinhouden geen systematische verwerking te voorzien van rationale, irrationale en cyclometrische functies. Bij de goniometrische functies blijven de voorschriften relatief beperkt tot hanteerbare situaties.

Als *karakteristieken van functies* zijn de leerlingen al vertrouwd met concepten zoals: nulpunt, domein, tekenverloop, extremum, stijgen en dalen, symmetrie, …. Deze worden uiteraard verder gebruikt bij de nieuwe functiecategorieën (en daarbij is het belangrijk didactisch aan te sluiten bij de eerder informele wijze waarop deze begrippen werden ontwikkeld). De concepten worden uitgebreid met afgeleide en integraal in de beperkte situatie van veeltermfuncties.
In een eerste benadering zal de klemtoon liggen op een verkenning van de belangrijkste begrippen en het manipuleren (aflezen, interpreteren) van (gegeven of snel te verwerven) karakteristieken van functies (grafiek, nulpunten, extrema, verloop), eerder dan op de algebraïsche rekenvaardigheid om deze karakteristieken zelf te berekenen. In deze fase van het onderzoek is het gebruik van de grafiek van de functie meestal aangewezen. Voor een aantal begrippen en functiecategorieën volstaat dat en kunnen hierbij de belangrijkste problemen al aan bod komen.
Een aantal begrippen kunnen nadien met meer nauwgezetheid omschreven worden. Als *nieuwe concepten* worden vooral afgeleide en in minder mate integraal naar voor geschoven.

In de functieleer kan niet voorbij gegaan worden aan de impact die *grafische rekenmachines* en *software* voor functies hebben in een actuele onderwijsaanpak. Deze technologische hulpmiddelen beïnvloeden niet alleen het didactische verloop van de leerprocessen, maar ook de wijze waarop bepaalde aspecten beklemtoond worden in de leerinhoud. Zo zijn de mogelijkheden om bepaalde concepten zoals asymptoot, afgeleide, integraal inzichtelijk te verwerken toegenomen (bijv. door het verveelvoudigen van de voorbeeldmogelijkheden en de kwaliteit ervan). Bepaalde bewerkingen zijn nu in een korte tijd uitvoerbaar. Interessante mogelijkheden, ook met getallen uit realistische toepassingen, zijn beschikbaar met enkele toetsaanslagen. Intensief investeren in het verwerven van het manueel manipuleren van ingewikkelde uitdrukkingen is dan ook niet meer zinvol. De zo nagestreefde automatismen zullen in de praktijk maar zelden effectief gebruikt worden.
Consequentie is dat voor deze leerlingen radicaal gekozen wordt voor het gebruik van rekentechnische hulpmiddelen. Deze keuze betekent niet dat leerlingen niet zouden moeten begrijpen waartoe ze de machine inschakelen, ook al zal voor de routinegebruiker de wiskundige werkwijze van de machine soms verdoken blijven. Het inschakelen van hulpmiddelen moet gebeuren met inzicht in de gebruikte concepten en met controlerend terugkoppelen op het proces dat het hulpmiddel uitvoert (bijv. worden de juiste operaties gebruikt om het doel te bereiken).
Precies om dat inzicht en die kritische ingesteldheid te bereiken zullen nog een aantal voorbeelden en situaties ambachtelijk of manueel moeten verwerkt worden, zodat het inzicht in het verloop van het proces gevrijwaard wordt. Vermits niet de ingewikkelde techniciteit maar het inzicht hier dan prioritair zijn, kan de rekentechnische complexiteit van deze situaties beperkt gehouden worden.
Anderzijds worden problemen, waarbij functievoorschriften optreden die moeilijker manueel te verwerken zijn, door het gebruik van ICT toegankelijker.

Voor de *ordening van de doelstellingen* bestaan verschillende mogelijkheden. Voor de didactische verwerking ervan geldt hetzelfde. Het leerplan wil hier geen structurering opdringen, maar moet praktisch wel in een bepaalde ordening gepresenteerd worden. Het staat de leraren vrij verschillende onderdelen of deelaspecten ervan geïntegreerd aan te bieden.

Er wordt voor geopteerd om de doelstellingen *per functiecategorie* te verzamelen. Voordeel hiervan kan zijn, dat voor de leraar meteen duidelijk is, wat voor een bepaalde functiecategorie moet verwerkt worden, wat beperkt aanvullend kan zijn, en wat als eventuele verdieping of uitbreiding mogelijk is. Niet alle begrippen moeten voor alle functiecategorieën even diepgaand uitgewerkt worden. Voor bepaalde begrippen (limiet, afgeleide) betekent een andere functiecategorie soms meteen ook een verhoging van de moeilijkheidsgraad van de manuele berekening, maar uiteraard ook een kans om het begrip te verdiepen. Hier wordt een zekere ruimte gelaten aan de leraar om, eventueel voor een beperkt aantal leerlingen, bepaalde aspecten grondiger te ontwikkelen.
Het geheel wordt vooraf gegaan door een *grafische verkenningsronde*, waarin een aantal begrippen al ruim kunnen functioneren in kennis- en toepassingssituaties, zonder dat de inbreng van de formele begripsvorming of ingewikkeld rekentechnisch werk daarmee te zwaar interfereert.

1 GRAFISCH ONDERZOEK

LEERPLANDOELSTELLINGEN

F1	B	Met behulp van een grafisch onderzoek vragen beantwoorden i.v.m. probleemsituaties waarvan het functioneel verband gegeven is of de functionele verbanden gegeven zijn.	14 31 32
F2	B	Van de grafiek van een functie een nulpunt, het tekenverloop, de symmetrie, het stijgen, dalen of constant blijven binnen een interval, een extremum aflezen (als ze voorkomen).	14 31
F3	U	Met behulp van de grafiek het asymptotisch gedrag van een functie onderzoeken en dat illustreren met een tabel van functiewaarden.	
F4	B	Het verband bespreken tussen de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^3$ en $g(x) = \sqrt[3]{x}$ en naar analogie tussen de functies $f(x) = x^n$ en $g(x) = \sqrt[n]{x}$.	23

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Voor de meeste leerlingen is een *visuele benadering van functies* vanuit grafieken aangewezen. Vanuit de vooropleiding zijn ze vertrouwd met deze methodiek van (grafisch) onderzoeken en verder mathematiseren naar een meer analytische vorm. Deze aanpak wordt verder gezet bij de verkenning van nieuwe functiecategorieën.

Het *begrippenkader*, dat over functies is opgebouwd in de tweede graad, kan hier worden opgefrist en aangevuld. Een systematische studie van de functiecategorieën is echter geen noodzaak en zelfs niet aangewezen. De leerlingen beschikken immers niet over het algebraïsche rekeninstrumentarium om functies die ingewikkelde rekenproblemen stellen te onderzoeken.

In het algemeen kan hier elke grafiek aan bod komen (bijv. lijngrafieken uit een tijdschrift). Vermits zinvolle betekenisgeving het einddoel is, zullen deze grafieken zinvolle en realistische interpretaties moeten toelaten. Het gebruik van dit materiaal uit externe bronnen biedt de gelegenheid de leerlingen een *kritische houding* aan te brengen ten aanzien van het gebruik ervan (bijv. exacte waarden aflezen van of tabellen aanleggen bij grafieken met een vage schaalverdeling of met vette lijngrafiek).

Een functievoorschrift dat voortvloeit uit vraagstukken, contexten of probleemsituaties wordt in deze fase gegeven en nog niet door de leerlingen opgesteld. Het gegeven functievoorschrift wordt omgezet in een grafiek d.m.v. ICT.
Met behulp van de grafiek (al of niet met ondersteuning van ICT) worden *vragen i.v.m. de gegeven situatie* beantwoord. Daarbij moet men er zich van bewust zijn dat het aflezen van een grafiek steeds gebeurt binnen een bepaald kijkvenster. Een gevaar bij gebruik van ICT is dat leerlingen hun zicht op een functie beperken tot het uitleesvenster. Afhankelijk van de gebruikte software kan een tabel van functiewaarden opgeroepen worden. Ook kunnen bijzondere waarden benaderend worden afgelezen (grafisch uitvergroten, volgfunctie).

Leerlingen moeten de concrete begrenzing kunnen bepalen van een gegeven situatie. Zo kan de mogelijke afbakening van een veranderlijke in het wiskundig model verschillen van deze in een bestudeerde context. Hierbij adequaat gebruik maken van ICT vraagt o.m. een goede keuze van het uitleesvenster.
Binnen een gegeven context kan het ook voorkomen dat de leerlingen het snijpunt van grafieken moeten aflezen (benaderen) en interpreteren. Dit kan later een eventueel aangrijpingspunt zijn voor de motivatie van het oplossen van vergelijkingen en stelsels. Nu kunnen ook al vragen gesteld worden zoals 'binnen welk interval is de ene situatie voor- of nadeliger dan de andere'.
Met extreme waarden worden niet alleen deze bedoeld waarbij de raaklijn aan de kromme horizontaal loopt. Binnen een interval kunnen zich andere vormen van extreme waarden voordoen.
Wil men het bespreken of manipuleren van functievoorschriften hier integreren, dan zullen deze voldoen aan de begrenzing, die bij de bespreking van de verschillende functiecategorieën (hierop volgend) gegeven wordt.

Tot de essentiële inzichten in verband met grafieken en hun onderzoek behoort *het vergelijken van grafieken*, m.n. het opzoeken van gemeenschappelijke punten (cf. verband met gelijkheden, stelsels; bijv. wanneer geven twee evoluties hetzelfde resultaat) en de onderlinge ligging (cf. verband met ongelijkheden, bijv. welke evolutie geeft een beter resultaat). Hier gaat het vooral over het grafisch aflezen en interpreteren van dergelijke elementen. Uiteraard kan, voor zo ver de nodige rekentechnieken al gekend zijn, het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden hierin geïntegreerd worden.

Het vergelijken van de ligging van grafieken kan leiden tot het onderzoeken van *symmetrisch liggende grafieken* of delen ervan. In het bijzonder kan men het inzicht meegeven dat spiegeling van een grafiek ten opzichte van de bissectrice van het eerste kwadrant de grafiek oplevert van de inverse functie (de leerlingen kennen als mogelijkheden al $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^3$ en $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = x$ en $g(x) = \frac{1}{x}$). Let wel, dat aandacht moet besteed worden aan een aantal voorwaarden, bijv. het assenstelsel is orthonormaal, de eventuele beperking van het domein om een functie te bekomen. Dit inzicht wordt uitgebreid naar de grafieken van $g(x) = \sqrt[n]{x}$ en $f(x) = x^n$.
Voor verdere voorbeelden beperkt men zich tot eerstegraadsfuncties en functies van de vorm $f(x) = ax^2 + b$.

UITBREIDING

Vragen over het gedrag van de functie bij toenemende waarden van de veranderlijke of bij het naderen naar een bepaalde reële waarde kunnen een aanleiding zijn om een intuïtief begrip van limiet mee te geven. Het begrip limiet zelf komt bij deze leerlingen niet aan bod. Het begrip *asymptoot* sluit nauw aan bij deze aanpak. Het uitzoomen van het kijkvenster kan het 'rechte-effect' van de asymptoot illustreren. In deze fase is het niet de bedoeling de vergelijking van een asymptoot te bepalen. Als men achteraf over de rekentechnische vaardigheid beschikt, kan men teruggrijpen naar deze verkenningssituaties.

2 VEELTERMFUNCTIES

LEERPLANDOELSTELLINGEN

F5	B	Eenvoudige concrete situaties omzetten in een voorschrift.	
F6	B	In concrete situaties - de nulpunten van een veeltermfunctie bepalen; - de snijpunten van de grafiek van twee veeltermfuncties bepalen; - ongelijkheden oplossen.	31 32

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Het verwerken van deze doelstellingen kan volgen op de verkennende fase van het lezen en interpreteren van grafieken (doelstellingen uit 1. Grafisch onderzoek) of kan er meteen in geïntegreerd worden.

De leerlingen moeten leren een eenvoudige concrete situatie om te zetten in een voorschrift. In situaties die moeilijk om te zetten zijn in een voorschrift wordt dit voorschrift gegeven.

Enige aandacht wordt besteed aan een aantal basistechnieken (o.a. reststelling, euclidische deling) om algebraische (reken)problemen op te lossen. Het gebruik van ICT is aan te bevelen als het algebraïsch rekenen niet tot een snelle oplossing leidt.

AFGELEIDEN

LEERPLANDOELSTELLINGEN

F7	B	Gemiddelde veranderingen over een interval beschrijven en vergelijken met behulp van differentiequotiënten.	15
F8	B	Met behulp van een intuïtief begrip van limiet het verband leggen tussen het begrip afgeleide, het begrip differentiequotiënt en de richting van de raaklijn aan de grafiek.	15
F9	B	De afgeleide herkennen in situaties binnen en buiten de wiskunde, o.m. de afgeleide in een punt gebruiken als maat voor een ogenblikkelijke verandering.	19 15
F10	B	De afgeleide berekenen van de functies $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ en de bekomen uitdrukking veralgemenen naar functies $f(x) = x^n$, waarbij n een natuurlijk getal is.	16
F11	B	De som- en veelvoudregel toepassen om de afgeleide functie te bepalen van een veeltermfunctie.	17
F12	U	De afgeleide van een product van veeltermfuncties berekenen.	
F13	U	De afgeleide van een macht van een veeltermfunctie berekenen.	
F14	B	De raaklijn construeren aan de grafiek van een functie in een punt van die kromme.	
F15	B	De betekenis van de afgeleide functie gebruiken om te bepalen - in welke intervallen een functie stijgt of daalt; - voor welke waarde(n) een functie een extremum bereikt.	18
F16	B	Problemen oplossen waarbij het begrip afgeleide gebruikt wordt.	20
F17	U	De betekenis van de tweede afgeleide functie gebruiken om te bepalen - in welke intervallen de grafiek van een functie hol of bol is; - voor welke waarde(n) de grafiek van een functie een buigpunt heeft.	

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De *voornaamste doelstellingen* bij de studie van het begrip afgeleide bij veeltermfuncties zijn
- een *betekenisvolle ontwikkeling* van het begrip nastreven;
- dit begrip gebruiken bij de studie van het *verloop van de functie* en in het bijzonder van de grafiek;
- en het *toepassen* om in een probleemstelling bijzondere waarden en veranderingen te onderzoeken.

Het *begrip afgeleide* moet in essentie gekoppeld worden aan het beschrijven van verandering.
- De leerlingen beschikken al over het begrip *differentiequotiënt* als maat voor de gemiddelde verandering over een interval.
- Door onbeperkt inkrimpen van het interval (met als uiterste grens ‘tot een punt’) ontstaat de idee van een maat voor de *ogenblikkelijke verandering* in dat punt.
- De bekomen *limietwaarde* is de afgeleide van de functie in dat punt.
- Bij dit proces kan gelijktijdig de *meetkundige interpretatie* uitgewerkt worden: de snijlijn die de gemiddelde verandering aangeeft evolueert naar raaklijn. Daardoor is het verband gelegd tussen de afgeleide in een punt van een kromme en de richtingscoëfficiënt (de helling) van de raaklijn in dat punt aan de kromme.

- Tenslotte is het zinvol voor verder gebruik van dit definitieproces een synthese te geven in een *algebraïsche uitdrukking*. Als het limietbegrip nog niet eerder intuïtief is ingevoerd (zie deel A Grafisch onderzoek), kan hier alleszins de notatie aangebracht worden.

Voorbeelden om het begrip afgeleide concreet betekenisvol aan te brengen zijn o.m. snelheid, vraag (economie), winst en groei.

Het begrip 'afgeleide in een punt' wordt in een *algemene formulering* vastgelegd. Met behulp daarvan worden de afgeleide functies berekend van de functies $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$. Het bekomen algebraïsch verband wordt veralgemeend voor de functies $f(x) = x^n$, waarbij n een natuurlijk getal is. Daarna worden de som- en de veelvoudregel toegepast om de afgeleide functie te bepalen van een 'willekeurige' veeltermfunctie. Deze regels moeten minstens aan de hand van voorbeelden plausibel gemaakt worden.

De leerlingen moeten *de afgeleide functie van een veeltermfunctie* manueel kunnen berekenen door de hierboven genoemde regels te gebruiken. Het berekenen van de afgeleide functie van een veeltermfunctie is zo eenvoudig dat het gebruik van ICT hierbij overbodig is.

De afgeleide(n) van een functie word(t)(en) traditioneel verbonden met het onderzoeken van het *verloop van de functie* en het bepalen van haar grafiek. In een tijd waarin enkele toetsaanslagen volstaan om de grafiek te bekomen loont een tijdrovende investering in het automatiseren van voornoemde werkwijze niet meer. Alleszins zullen enkele voorbeelden ontwikkeld worden om de leerlingen het inzicht te laten verwerven in de verbanden tussen functie en de eerste afgeleide functie.
Daarbij kan ook aandacht besteed worden aan 'alternatieve' vraagstellingen, zoals
- het selecteren uit een aantal gegeven grafieken van deze die passend is bij een gegeven afgeleide functie;
- de grafiek schetsen van de afgeleide functie bij een gegeven grafiek;
- de grafiek van een functie (of mogelijkheden daarbij) schetsen bij de gegeven grafiek van de afgeleide functie;
- het bepalen van het tekenverloop van de eerste afgeleide functie als de grafiek van de functie gegeven is.

Het is belangrijk heel wat *vraagstukken* op te lossen waarbij het begrip afgeleide gebruikt wordt. In een eerste fase kan bij de gestelde context het voorschrift gegeven zijn. In een tweede fase kan het functievoorschrift, dat bij de context hoort, ook door de leerlingen opgesteld worden.
Bij deze vraagstukken mag men zich niet beperken tot het bepalen van extrema. Ook vragen naar het stijgen of dalen, de mate waarin dat gebeurt, of de mate van verandering ervan, of het interval waarin deze elementen optreden of waarbinnen het probleem zich situeert kunnen gesteld worden. Vraagstukken bieden de gelegenheid om het onderscheid te schetsen tussen een relatief extremum en een absoluut extremum binnen een bepaald interval.

UITBREIDING

Als uitbreiding kunnen de rekenregels voor machtsfuncties en het gebruik bij veeltermfuncties uitvoeriger verklaard worden met behulp van de algemene formulering voor het begrip afgeleide.

Als men functies wil beschouwen die een product of een macht zijn van veeltermfuncties kan men de leerlingen ook best de afleidingsregels voor product en machten aanleren. Zo wordt de, op lange termijn niet houdbare, rekenattitude vermeden om dergelijke uitdrukkingen telkens voluit uit te rekenen. Het kan volstaan de regels te formuleren vanuit voorbeelden en ze daarna te veralgemenen. Ook deze regels kunnen verklaard worden.

Bij veeltermfuncties is het berekenen van de tweede afgeleide geen echt bijkomend probleem. De betekenis van de tweede afgeleide kan men eenvoudig uitleggen. Zo is volgens de bekende procedure bijvoorbeeld de eerste afgeleide (functie) stijgend als de tweede afgeleide (functie) positief is. Dit wil zeggen dat de helling van de raaklijn toeneemt. De grafiek wordt 'steiler'. Ook het begrip buigpunt kan binnen eenvoudige contexten geïllustreerd worden als het punt waar het toenemen van de helling van de raaklijn stopt en overgaat naar afnemen. Het gebruik van de visuele mogelijkheden van ICT-hulpmiddelen maakt dit proces toegankelijker.

INTEGRALEN

LEERPLANDOELSTELLINGEN

F18	B	Een primitieve functie bepalen van een veeltermfunctie.
F19	U	De integraal van functies van de vorm $f(x) = (ax + b)^n$ berekenen.
F20	B	Het verband uitleggen tussen het begrip bepaalde integraal van een functie en oppervlakten van gebieden bepaald door die functie en de horizontale as.
F21	B	Het verband illustreren tussen het berekenen van een bepaalde integraal van een functie en de primitieve functie van de gegeven functie.
F22	B	Vraagstukken oplossen waarbij het bepalen van de oppervlakte van een gebied kan herleid worden tot het begrip integraal.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De *voornaamste doelstellingen* bij de studie van het integraalbegrip bij veeltermfuncties zijn
- een *betekenisvolle ontwikkeling* van de begrippen bepaalde en onbepaalde integraal,
- een begrijpen van het *verband tussen beide begrippen*;
- en het *toepassen* van de begrippen in vraagstukken.

Voor de *aanbreng* van het integraalbegrip kan men uitgaan van twee mogelijke vragen:
- hoe ziet een functie eruit waarvan we de afgeleide functie kennen,
- of bereken de oppervlakte van een bepaald gebied afgebakend door (een) functie(s).

De eerste vraagstelling leidt door de invertering van het afleidingsproces tot primitieven, en zo tot het begrip *onbepaalde integraal*. De tweede vraagstelling leidt tot het omschrijven van het begrip *bepaalde integraa*l van een functie. De volgorde waarin de aanbreng verloopt, heeft voor beide mogelijkheden voor- en nadelen. Alleszins moeten beide begrippen aan bod komen.

Bij de weg van de invertering gaat men op zoek naar een functie F, een *primitieve* van de functie f, waarvan de afgeleide functie de gegeven functie f is. Door nauwkeurig kijken en vergelijken van de ‘formules’ voor afgeleiden kan men gemakkelijk de berekeningswijze ontwikkelen om een primitieve functie te bepalen van functies zoals $f(x) = x^n$, $f(x) = ax^n$ en van een veeltermfunctie. Deze rekenregels zijn zo eenvoudig dat het gebruik van ICT overbodig is. De dx wordt beschouwd als een onderdeel van de notatie.

Om het begrip *bepaalde integraal* van een functie te ontwikkelen moet men alleszins het verband leggen met oppervlakten bepaald door de functie.
De problemen zijn daarbij:
- hoe die oppervlakte zinvol betekenis geven;
- het verschillend teken dat aan oppervlakte boven en onder de horizontale as wordt toegekend;
- en uiteindelijk hoe die oppervlakte concreet berekenen.

De oppervlakte zinvol maken kan door de leerlingen te confronteren met problemen die te herleiden zijn tot de berekening van de oppervlakte tussen de grafiek van een functie en de horizontale as (voorbeelden zijn volume uit debiet, afgelegde weg uit snelheid, arbeid, marginaliteit in economie, gemiddelde van een functie over een interval, bijv. gemiddelde dagtemperatuur). Vooraleer over te stappen op wat ingewikkelder vormen zal men, om de leerlingen vanuit overeenkomst te overtuigen, best enkele eenvoudige gevallen onderzoeken waarbij de oppervlakte effectief met de oude technieken (formules) kan berekend worden. Men zorgt ervoor situaties aan te brengen waar oppervlakten onder de horizontale as als vanzelfsprekend negatief zullen gerekend worden.
De bepaalde integraal van een functie over een interval kan dan gedefinieerd worden als een ‘oppervlakte-met-een-teken’ bepaald door het gebied tussen de grafiek van de functie en de horizontale as over dat interval.

Het *berekenen van de oppervlakte* zelf blijft een probleem. Enerzijds kan men dit voor deze leerlingen omzeilen door het *gebruik van de rekenmachine of software* voor functies (bijv. applets). Bepaalde software laat zelfs toe het gebied waarvan de oppervlakte werd berekend te arceren. Deze aanpak is te vergelijken met het laten berekenen van bepaalde functiewaarden door de rekenmachine (bijv. bij goniometrische, exponentiële of logaritmische functies wordt ook niet geëxpliciteerd hoe de functiewaarde precies berekend wordt). Het biedt het voordeel om *snel aan toepassingen* te kunnen werken, waarbij het integraalbegrip in zijn volle betekenis aan bod komt. Anderzijds kan men in enkele concrete voorbeelden de oppervlakte van een dergelijk gebied *effectief berekenen*. Daarbij kan men zich beperken tot een gebied onder de grafiek van een positieve gedeelte van een veeltermfunctie. De oppervlakte wordt benaderd door *de som van de oppervlakten van een aantal rechthoekjes*. Deze oppervlakte kan onbeperkt dicht benaderd worden door het aantal rechthoekjes te verhogen. Ook hier kan software heel wat didactische hulp bieden, zodat dit proces met een minimum aan voorbeelden toch snel en inzichtelijk kan verlopen. Het onbeperkt dicht benaderen roept uiteraard herinneringen op aan een zelfde proces bij de afgeleide. Dit is dan een gelegenheid om het voorgaande met een 'limiet'proces te verbinden. Voordeel van toch de benaderingen met sommen te geven is misschien dat de leerlingen het verband met de gegeven functie (en misschien de notatiewijze) beter inzien. Alleszins moet men beseffen dat dergelijke berekeningswijze door de leerlingen zelf niet moet kunnen uitgevoerd worden. Het gaat hem dus om het 'begrijpen' van het concept of werkwijze en het plausibel maken ervan.

De volgende stap is het verbinden van beide integraalbegrippen. Dat kan door middel van *de hoofdstelling*. Het is alleszins de bedoeling deze leerlingen hierin op een zeer intuïtief niveau inzicht te geven, dus zonder een te formele behandeling.
Zo kan men ervoor kiezen om in enkele concrete en eenvoudige gevallen het verband plausibel te maken. Men berekent bijvoorbeeld de oppervlakte binnen een bepaald interval [a,b] tussen een rechte en de horizontale as op twee wijzen: enerzijds door de oppervlakte binnen een bepaald interval [a,b] te bepalen en anderzijds door $F(b) - F(a)$ te berekenen, waarbij F een primitieve functie is van de eerstegraadsfunctie die de rechte bepaalt. Na enkele voorbeelden kan de 'formule' veralgemeend worden voor andere functies.

Het integraalbegrip moet toegepast worden bij het *oplossen van problemen*. De onbepaalde integraal kan hierbij gebruikt worden om grootheden ten opzichte van elkaar uit te drukken Bij de bepaalde integraal kunnen de hierboven al genoemde toepassingen verder gedifferentieerd aan bod komen.
Bij vraagstukken over oppervlakteberekening moet de nodige aandacht gaan naar het feit dat de begrippen oppervlakte en bepaalde integraal niet identiek zijn. Als de grafiek onder de horizontale as loopt, dan is de oppervlakte gelijk aan de absolute waarde van $F(b) - F(a)$. Om die reden moet men bij het bepalen van de oppervlakte van een gebied dat begrensd wordt door de grafiek van een veeltermfunctie nagaan welke nulpunten van die veeltermfunctie behoren tot het beoogde integratie-interval (cf. kritisch omgaan met formules en technieken en het plannen van de werkwijze).
Ook bij het bepalen van *de oppervlakte tussen twee krommen* die de voorstelling zijn van de grafiek van twee veeltermfuncties moet worden nagegaan of deze twee krommen elkaar snijden binnen het beoogde interval.
Als toepassingen kunnen verder *berekeningen van inhouden van omwentelingslichamen* aan bod komen. De inhoud kan benaderd worden door de som van de inhouden van schijfjes. Hier kan de analogie met de benadering van oppervlakte met behulp van rechthoekjes het inzicht vergemakkelijken.
Tenslotte kunnen ook omgekeerde vragen aan bod komen, waarbij het verband tussen 'sommen en integraal' gebruikt wordt om sommen te benaderen door integralen (cf. economie voor de berekening van de totale kosten uit marginale kost).

3 EXPONENTIELE EN LOGARITMISCHE FUNCTIES

LEERPLANDOELSTELLINGEN

F23	B	De uitdrukking a^b, met $a > 0$ en b rationaal definiëren.	21
F24	B	Exponentiële groeiprocessen onderzoeken door middel van grafieken en tabellen.	24 25
F25	B	De vergelijking uitleggen tussen een lineair groeiproces en een exponentieel groeiproces.	25

F26	B	De grafiek van de functie $f(x) = p.a^x$ tekenen en domein, bereik, bijzondere waarden, stijgen en dalen en asymptotisch gedrag aflezen.	22 24
F27	B	Het begrip $^a\log b$ definiëren.	23
F28	B	Basiseigenschappen van bewerkingen met logaritmen formuleren.	
F29	B	Concrete problemen in verband met exponentiële groei oplossen met betrekking tot beginwaarde, groeifactor en groeipercentage.	24 25
F30	B	Het verband onderzoeken tussen de functies $f(x) = a^x$ en $f(x) = {}^a\log x$ door middel van grafieken en tabellen.	23
F31	B	De grafiek van de functie $f(x) = {}^a\log x$ tekenen en domein, bereik, bijzondere waarden, stijgen en dalen en asymptotisch gedrag aflezen.	23

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De *voornaamste doelstellingen* bij de studie van exponentiële functies zijn
- een *betekenisvolle ontwikkeling* nastreven van begrippen zoals exponentiële groei, macht, logaritme;
- de *exponentiële functies* gebruiken als model voor de beschrijving van groeiprocessen;
- en het *toepassen* van de verkregen kennis bij problemen in verband met groeiprocessen.

De leerlingen kennen uit hun vooropleiding machten met gehele exponenten en hun rekenregels. Om inzicht te verwerven in exponentiële groei en in exponentiële functies in het algemeen moet eerst het *machtsbegrip* uitgebreid worden. Dit moet zo bondig mogelijk en functioneel gebeuren, dus zonder uitgebreide behandeling van nde machtswortels. Nadat men de uitdrukking a^b met a > 0 en b rationaal heeft gedefinieerd, kan men aanvaarden dat de rekenregels die gelden voor gehele exponenten behouden blijven. Het aantal oefeningen i.v.m. deze regels wordt beperkt gehouden.

De leerlingen worden nu geconfronteerd met een nieuwe soort groeiprocessen, m.n. die beschreven met een macht waarbij de veranderlijke in de exponent voorkomt. Ze kennen voor groei hoofdzakelijk al het model van de lineaire groei. Die werd bestudeerd ter gelegenheid van de studie van recht evenredige grootheden en van eerstegraadsfuncties. Een korte herhaling kan volstaan. Lineaire groei zal vooral aan bod komen als vergelijkingsbasis, een andere vorm van groeien.
Voorbeelden van exponentiële groeiprocessen zijn o.a. bevolkingsaangroei, kapitaalsvorming bij samengestelde intrest, afname van radioactieve massa, bacteriecultuur, demping van geluid, vrijgekomen energie bij een aardschok, ...

Het veel voorkomen van exponentiële groei rechtvaardigt het nader bestuderen van het model van de exponentiële functies. Uit de constructie van verschillende functies van de vorm $f(x) = p.a^x$ kan men de voornaamste eigenschappen afleiden, o.m. de invloed van de coëfficiënt p op het verloop en de grafiek (cf. het analoge inzicht bij het onderdeel elementaire functies uit het vierde leerjaar).

Bij het oplossen van concrete problemen in verband met exponentiële groei wordt men geconfronteerd met het oplossen van de vergelijking $a^{f(x)} = b$. Om deze vergelijkingen op te lossen maakt men meestal gebruik van logaritmen. Men zal echter niet nalaten te tonen dat sommige van deze vergelijkingen op te lossen zijn door te steunen op het begrip exponent zelf.
Het begrip logaritme wordt gedefinieerd als de inverse van een macht, dat toelaat de exponent te berekenen als het grondtal en het resultaat van de machtsverheffing gegeven is.
Als basiseigenschappen komen zeker aan bod: logaritme van een product en van een macht en de formule voor de verandering van grondtal. Verklaring van deze eigenschappen kan aan de hand van de definitie.

De logaritmische functie is de inverse van de exponentiële functie. De eigenschappen kunnen afgeleid worden uit de constructie van een aantal welgekozen voorbeelden. Daaruit volgt onder meer het inzicht in de symmetrie

t.o.v. de bissectrice van de eerste coördinatenhoek (in een orthonormaal assenstelsel) tussen de grafieken van een logaritmische functie en de verwante exponentiële functie.
Toepassingen bij logaritmische functies kunnen liggen bij bijv. de hoogte boven de zeespiegel in functie van de luchtdruk, de geluidssterkte in functie van intensiteit.

4 GONIOMETRISCHE FUNCTIES

LEERPLANDOELSTELLINGEN

F32	B	Het maatgetal van een hoek omzetten van zestigdelige graden in radialen en omgekeerd.	26
F33	B	De verbanden tussen de goniometrische getallen van verwante hoeken formuleren en verklaren.	
F34	U	Som- en verschilformules en de formules van Simpson hanteren met een formularium.	
F35	B	De grafiek tekenen van de functie $f(x) = \sin x$ op basis van de goniometrische cirkel.	27
F36	B	Voor de functie $f(x) = \sin x$ domein, bereik, periodiciteit, extrema en stijgen en dalen aflezen van de grafiek.	28
F37	B	Vergelijkingen oplossen van de vorm $\sin x = k$ met behulp van de grafiek van de functie en van de goniometrische cirkel.	30
F38	B	Uitgaande van de grafiek van $f(x) = \sin x$ de grafiek van de functies met voorschrift $k.\sin x$, $\sin(k.x)$, $\sin(x+k)$ en $\sin x + k$ opbouwen en de coëfficiënt interpreteren.	29
F39	B	Bij een grafiek van een sinusfunctie het voorschrift bepalen.	
F40	B	Indien mogelijk een goniometrische functie gebruiken als model voor een periodieke verschijnsel.	
F41	B	Vergelijkingen van de vorm $\sin(ax + b) = c$ oplossen en grafisch interpreteren.	

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De *voornaamste doelstellingen* bij de studie van goniometrische functies zijn
- een *betekenisvolle ontwikkeling* nastreven van begrippen zoals goniometrisch getal (sinus, cosinus), periodiciteit, amplitude, periode, faseverschuiving;
- de *goniometrische functies* gebruiken als model voor de beschrijving van periodieke verschijnselen;
- en het *toepassen* van de verkregen kennis bij problemen.

Om goniometrische functies te bestuderen moet de stap van ‘hoek’ naar ‘reëel getal’ worden gezet. Dit gebeurt door de *radiaal* als hoekeenheid te kiezen.

In de tweede graad werden de *verbanden* bestudeerd *tussen de goniometrische getallen* van complementaire en supplementaire hoeken. Na herhaling worden deze verbanden uitgebreid tot tegengestelde en antisupplementaire hoeken. Goniometrische formules worden in de basisleerstof slechts aangebracht voor zoverre ze noodzakelijk zijn binnen de ontwikkeling van de goniometrische functies.

De leerlingen moeten in staat zijn de grafiek van een *algemene sinusfunctie* te onderzoeken. Om de aanbreng niet te ingewikkeld te maken, is het zinvol zich aanvankelijk te beperken tot de functie met voorschrift $f(x) = \sin x$.
Er zijn allerlei betekenisvolle situaties aan te geven, waaruit de grafiek van deze functie kan afgeleid worden: de cirkelbeweging, een draaiend rad, de schroef van een vliegtuig, de harmonische trilling van een veer.
Het is aan te raden de grafiek van $f(x) = \sin x$ ook manueel te tekenen. De leerlingen ervaren hierdoor dat men voldoende punten moet plaatsen om een zo nauwkeurig mogelijke grafiek te bekomen. Controle kan gebeuren

d.m.v. ICT. Bij het onderzoek van deze functies komen de begrippen domein, bereik, periode, nulpunten, teken, stijgen en dalen, extrema aan bod.

Vergelijking van een aantal grafieken, bijvoorbeeld van $f(x) = \sin x$, $f(x) = 2.\sin x$, $f(x) = -\sin x$, $f(x) = \sin 3x$, $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$, ... moet leiden tot de begrippen *amplitude, periode en faseverschuiving*. Het koppelen van een meetkundige betekenis aan deze begrippen moet het inzicht bevorderen (verticale en/of horizontale uitrekking, horizontale en/of verticale verschuiving, periode). Ook kan men er op wijzen dat de cosinusfunctie in feite een verschoven sinusfunctie is.
Amplitude, periode, nulpunten en verschuiving worden zowel bepaald uitgaande van de grafiek als van het voorschrift. Men zal aandacht besteden aan het opstellen van het functievoorschrift als de grafiek gegeven is.

Periodieke verschijnselen die kunnen onderzocht worden zijn o.a. getijden, debiet bij in- en uitademen, zaagtand, prooi-roofdiercyclus, reuzenrad, schroefbeweging, afgelegde weg ten opzichte van het beginpunt bij een cirkelvormige beweging, harmonische trilling, gemiddelde dagtemperatuur, dierenpopulatie, elektrocardiogram, bioritme, samenstelling van trillingen (geluid), ...

Het oplossen van goniometrische vergelijkingen wordt beperkt tot het oplossen van basisvormen zoals $\sin x = c$, $\sin x = \sin a$, $\sin(ax+b) = \sin a$. Het is aangewezen de vergelijkingen eerst op te lossen in een bepaalde periode. Daarna kan de oplossing ruimer geïnterpreteerd worden.
De grafieken van de bijbehorende functies kunnen als hulpmiddel dienst doen. De grafische oplossing zal de interpretatie van een berekend resultaat merkelijk vereenvoudigen. Het gebruik van ICT is hierbij aanbevolen.

UITBREIDING

Het opstellen van goniometrische formules kan een beter inzicht geven in de samenhang tussen goniometrische getallen. De leerlingen kunnen in enkele concrete berekeningen ontdekken dat de meest voor de hand liggende vormen, waarbij bijvoorbeeld $\sin(a + b)$ zou verbonden worden met $\sin a + \sin b$, niet geldig zijn. ICT-hulpmiddelen werken hierbij ondersteunend. Ook de juiste formules kunnen gecontroleerd worden voor een aantal waarden. Waar haalbaar kan ook een meetkundige verklaring of afleiding gegeven worden.
Voor het gebruik van de formules in toepassingen kunnen de leerlingen best gebruik maken van een *formularium* (zie algemene doelstellingen over vaardigheden, o.m. leervaardigheden). Van een beperkt aantal formules kan afgesproken worden dat ze gememoriseerd worden.
Gezien de verschuiving van klemtonen naar een meer toepassingsgerichte opvatting van goniometrische functies zal minder aandacht besteed worden aan het aantonen van goniometrische identiteiten.

5.2.2 Statistiek

BEGINSITUATIE

De volgende leerinhouden in verband met (beschrijvende) statistiek werden behandeld in de tweede graad.
- Het verwerken, voorstellen en interpreteren van statistische gegevens.
- Centrum- en spreidingsmaten als parameters om gegevens samen te vatten.

ALGEMENE INLEIDING

Statistiek is de wetenschap van het verzamelen, ordenen en interpreteren van gegevens. De studie van statistiek is maatschappelijk interessant en nuttig. Het is een middel om met behulp van gegevens inzicht te krijgen in reele problemen en op basis van gegevens conclusies te trekken met een zekere betrouwbaarheid. In het secundair onderwijs is de hoofdbedoeling van het onderdeel statistiek de leerlingen te leren nadenken en redeneren over statistische gegevens, statistische voorstellingen en statistische uitspraken. Door de evolutie in het rekenen en tekenen met computers kan de klemtoon gelegd worden op statistische ideeën en begrippen (concepten) en het verkrijgen van inzicht vanuit gegevens. De betekenis van resultaten is belangrijker dan de berekeningen. In de statistiek hebben gegevens en resultaten van berekeningen maar zin in hun context. Vandaar dat het aangewezen is te starten vanuit reële data en effectief verzamelde gegevens, dan wel van fictieve situaties. Statistisch redeneren is niet eenvoudig en is ook niet hetzelfde als wiskundig redeneren. Daarom is het belangrijk heel veel voorbeelden te geven. Het is zeker zinvol om hiervoor samen te werken met andere vakken.

LEERPLANDOELSTELLINGEN

S1	B	Statistische gegevens, centrum- en spreidingsmaten en grafische voorstellingen van statistische gegevens interpreteren.	
S2	B	Aan de hand van concrete voorbeelden aangeven dat men enkel op basis van aselecte steekproeven uitspraken kan doen over de ganse populatie en dat bij elk statistisch experiment toeval een rol speelt.	
S3	B	In betekenisvolle situaties gebruik maken van een normale verdeling als continu model bij data met een klokvormige frequentieverdeling en het gemiddelde en de standaardafwijking van de gegeven data gebruiken als schatting voor het gemiddelde en de standaardafwijking van deze normale verdeling.	33
S4	B	Het gemiddelde en de standaardafwijking van een normale verdeling grafisch interpreteren en grafisch het verband leggen tussen een normale verdeling en de standaardnormale verdeling.	34 35
S5	B	Bij een normale verdeling de relatieve frequentie interpreteren van een verzameling gegevens met waarden - tussen twee gegeven grenzen, - groter dan een gegeven grens, - of kleiner dan een gegeven grens, als de oppervlakte van een gepast gebied.	36
S6	U	Bij de normale verdeling de oppervlakte onder de kromme over een bepaald interval interpreteren als kans dat die gegevenswaarden zich zullen voordoen.	

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De *voornaamste doelstellingen* bij de studie van dit onderdeel statistiek is dat
- de leerlingen statistische voorstellingen en gegevens kritisch leren lezen en interpreteren
- de leerlingen kennismaken met het samenvatten (modelleren) van statistische gegevens in een functie aan de hand van de normale verdeling
- en bij normaal-verdeelde gegevens met de grafiek van de normale verdeling kunnen werken om statistische problemen op te lossen.

In de tweede graad bestudeerden de leerlingen reeds statistische gegevens. Ze maakten hierbij grafische voorstellingen en maakten ook kennis met centrum- en spreidingsmaten. Het kunnen interpreteren van (en kritisch kijken naar) statistische gegevens, maten en voorstellingen was daarbij een belangrijke doelstelling. Aan de hand van veel goed gekozen voorbeelden wordt dit in de derde graad uitgediept. Zo zal gewezen worden op het belang van de vorm van een grafische voorstelling (symmetrisch, niet-symmetrisch, …) en naar eventuele extreme meetwaarden, die een grote invloed kunnen hebben op het gemiddelde en de standaardafwijking. Steeds zal de context een belangrijke rol spelen. Het is nuttig om in de klas bij bepaalde gegevens met leerlingen te discussiëren over zinvolle grafische voorstellingen, informatie die verloren gaat, welke centrummaat aangewezen is, hoe de gegevens verzameld zijn, …

Steekproeven waarbij mensen vrijwillig beslissen om mee te doen (televoting, …) en opportunistische steekproeven (de eenheden zijn gemakkelijk of goedkoop te bereiken, bijv. een enquête in een winkelstraat) leveren meestal onbetrouwbare informatie op met betrekking tot de hele populatie. Men noemt ze vertekend. De leer-

lingen moeten bij concrete voorbeelden kunnen aangeven of een steekproef mogelijk vertekend is en wat het effect daarvan is op een statistische uitspraak op basis van die steekproef.
Maar ook goede steekproeven uit eenzelfde populatie leveren verschillende resultaten op. Dit fenomeen noemt men steekproefvariabiliteit. Variabiliteit heeft voor gevolg dat je uit een steekproefresultaat nooit met 100 % zekerheid besluiten kunt trekken over de hele populatie. Dit is niet hetzelfde als zeggen 'Met statistiek kan je alles bewijzen'. De bedoeling is juist om deze variabiliteit te kunnen inschatten. Aan de hand van concrete voorbeelden of simulaties maken leerlingen kennis met variabiliteit van steekproefresultaten.

De overgang van een histogram naar een dichtheidsfunctie kan intuïtief gebeuren door over te gaan op relatieve frequenties per eenheid (de relatieve frequentie gedeeld door de breedte van elk interval) en een vloeiende kromme te tekenen door het histogram. Alle gegevens worden zo samengevat in de grafiek van een functie. Heel wat histogrammen zijn symmetrisch en klokvormig (de lichaamslengte, het exacte gewicht van pakken suiker van 1 kilo, …). Zo kan de normale verdeling ingevoerd worden als model voor de klokvormige frequentieverdeling. Om de benaderingsgraad te visualiseren kan men een klokvormig histogram overdekken met de bijbehorende normaalverdeling. De leerlingen berekenen met een rekenmachine of met behulp van software het gemiddelde $\bar{x}$ en de standaardafwijking s van de meetwaarden. Daarna maken ze een grafische voorstelling van de normaalverdeling $N(\mu,\sigma)$ waarbij μ de waarde krijgt van $\bar{x}$ en σ de waarde van s. De precieze kennis van het functievoorschrift van een algemene normaalverdeling is hier niet nodig.

Deze benadering van het histogram van de frequentieverdeling door de normale verdeling kan ook gebruikt worden om het verband tussen de vorm van de grafiek en gemiddelde en standaardafwijking te leggen. De grafische betekenis van het gemiddelde van een normale verdeling is de x-coördinaat van de top van de verdelingsfunctie. Voor de standaardafwijking geldt de vuistregel: 68 % van de waarden die de variabele kan aannemen, liggen tussen de grenzen $\mu-\sigma$ en $\mu-\sigma$ en ook 68 % van de oppervlakte tussen de grafiek van de normale verdeling en de x-as ligt tussen $\mu-\sigma$ en $\mu+\sigma$. Deze regel kan aan de hand van de discrete verdeling intuïtief verklaard worden of met ICT nagerekend worden.

Het omzetten van een willekeurige normale verdeling naar de standaardnormale verdeling is bij gebruik van statistische software op een rekenmachine of computer niet nodig om concrete problemen op te lossen. De standaardnormale verdeling wordt dan ook enkel gezien als een speciaal voorbeeld van een normale verdeling ($\mu = 0$ en $\sigma = 1$).

Met behulp van de normale verdeling kunnen nu een aantal vragen aangepakt worden die inzicht moeten geven in het praktische gebruik van dit beschrijvingsmodel. Met ICT kunnen de relatieve frequenties bij een normale verdeling nu bepaald worden en tegelijkertijd geïllustreerd worden als oppervlakte. Concrete vragen zoals 'Hoeveel procent van de volwassen mannen is kleiner dan 170 cm, heeft een lengte tussen 180 cm en 190 cm, is groter dan 195 cm?' en 'Bepaal de lengte zodat 75 % van de mannen kleiner is dan deze lengte.' bij een gegeven gemiddelde en standaardafwijking komen nu aan bod. De leerlingen moeten uiteraard wel inzien dat het hierbij om een model gaat.

De leerlingen moeten aan de hand van voorbeelden ook begrijpen dat niet alle data normaal verdeeld zijn of benaderd kunnen worden door een normale verdeling: bijv. de snelheid van geflitste wagens in de bebouwde kom, het begintijdstip van een telefoongesprek vanuit een kantoor, het inkomen van alle werknemers van een groot bedrijf, … Nagaan of statistische gegevens eventueel normaal verdeeld zijn, gebeurt in eerste instantie door te redeneren over de data en te onderzoeken of een histogram van deze gegevens klokvormig is. Daarnaast kan men dan nagaan of aan de 68-95-99,7-regel voldaan is. In de klas kan men zich hiertoe beperken. Een correctere analyse gebeurt door de relatieve cumulatieve frequenties uit te zetten in een assenstelsel van 'normaal waarschijnlijkheidspapier'. Deze schaalverdeling is ook voorhanden op de grafische rekenmachine en statistische software, zonder dat de cumulatieve frequenties moeten uitgerekend worden.

Met behulp van de normale verdeling kunnen nu bijv. ook statistische gegevens met verschillend gemiddelde en standaardafwijking vergeleken worden, stel bijv. dat je weet dat twee grote groepen schooluitslagen normaal verdeeld zijn en je wilt een uitslag van de ene groep vergelijken met een uitslag van een andere groep: bijv. is 8 bij een verdeling met gemiddeld 7 en standaardafwijking 1,3 ‘beter’ dan 15 bij een verdeling met gemiddelde 13,5 en standaardafwijking 1,8? Dit probleem kan aangepakt worden door na te gaan hoeveel procent van de uitslagen in beide gevallen hoger of lager liggen dan de te vergelijken waarden of door afwijkingen van het gemiddelde in beide gevallen uit te drukken in aantal standaardafwijkingen en deze getallen te vergelijken (z-scores).

UITBREIDING

In het tweede jaar van de tweede graad werd het verband gelegd tussen kansen en relatieve frequenties. Hierop wordt gesteund om ook hier kansen te bepalen bij normaal verdeelde gegevens. De kans dat een doos suiker minder weegt dan 1kg (als het gewicht van alle door dezelfde machine verpakte dozen suiker normaal verdeeld is met gegeven gemiddelde en standaardafwijking of als de normale verdeling een goed model is voor deze verdeling) is de relatieve frequentie van het aantal pakken suiker dat minder weegt dan 1kg, of m.a.w. de oppervlakte onder de normale kromme links van de grenswaarde 1 kg. Het is hier niet de bedoeling om de binomiale verdeling door de normale verdeling te benaderen, noch om de continuïteitscorrectie die daarbij hoort te behandelen.

5.3 KEUZEONDERWERPEN

5.3.1 Matrices en stelsels

ALGEMENE INLEIDING

Bij de klassieke aanpak van de studie van matrices is het oplossen van stelsels vaak de enige toepassing. Nochtans geven tal van problemen, zowel binnen als buiten de wiskunde, aanleiding tot matrices. De matrix is dan, zoals bij stelsels, een handige wiskundige notatie voor een tabel met numerieke gegevens. Passende bewerkingen met deze matrices kunnen dan leiden tot de oplossing van het probleem.

LEERPLANDOELSTELLINGEN

MS1	B	Met behulp van matrices een concreet probleem schematiseren.
MS2	B	Binnen een gesteld probleem matrices optellen en aftrekken, een matrix met een getal vermenigvuldigen, een matrix transponeren, matrices vermenigvuldigen en machten van matrices berekenen.
MS3	B	Evoluties van blokken gegevens beschrijven met matrices.
MS4	B	De methode van het rijherleiden verklaren en gebruiken voor het oplossen van mxn-stelsels van de eerste graad (m en n maximum 3).
MS5	B	Vraagstukken oplossen die te herleiden zijn tot het oplossen van een mxn-stelsel van de eerste graad (m en n maximum 3).
MS6	U	Een mxn-stelsel met één parameter bespreken (m en n maximum 3).
MS7	U	De inverse matrix van een reguliere matrix berekenen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Matrices en bewerkingen met matrices kunnen ingevoerd worden vanuit toepassingen. De matrix wordt dan gedefinieerd als een handige opslagplaats voor een blok gegevens. De bewerkingen beschrijven dan de samenhang tussen de getalgegevens.

De rekenregels voor het berekenen van de som van matrices en het product van een reëel getal met een matrix liggen voor de hand. De rekenregel voor het vermenigvuldigen van matrices is niet zo vanzelfsprekend maar kan mits gepaste voorbeelden goed geïllustreerd worden. Bijvoorbeeld: uit een gegeven productiematrix van verschillende producten per regio en een gegeven matrix met de winst per product, de totale winst per regio berekenen.

Ook de eigenschappen van de bewerkingen kunnen naar voor komen in contexten. De leerlingen ervaren dat de meeste eigenschappen van het rekenen met getallen ook gelden voor het rekenen met matrices. Bijzondere aandacht verdient de associativiteit van het matrixproduct. Hierdoor krijgen machten van matrices een eenduidige betekenis. Uiteraard wordt er op gewezen dat het matrixproduct niet commutatief is.

De evolutie van blokken gegevens is een interessante toepassing op de klassieke matrixvermenigvuldiging waarvan er veel in een vereenvoudigde vorm in de klas aan bod kunnen komen. Hierbij ligt de klemtoon op het mathematiseren: het vertalen van het concreet probleem en het zoeken naar de juiste wiskundige bewerkingen om het probleem op te lossen. In een aantal gevallen kan een matrix gemakkelijker worden opgesteld nadat het probleem geschematiseerd en gevisualiseerd is met behulp van een pijlenschema of een graaf.

Mogelijke toepassingen op deze evoluties van blokken zijn: de evolutie van het koopgedrag bij een groep consumenten (Markovketens), de evolutie van een populatie dieren (Lesliematrices), het migratiepatroon van de bevolking in een bepaalde regio (migratiematrices) of het aantal wegen tussen bepaalde grootsteden (verbindingsmatrices).

Een andere toepassing van matrices is het oplossen van stelsels. Vooraleer een oplossingsmethode te behandelen, is het nuttig zich de vraag te stellen welke bewerkingen op een gegeven stelsel mogen worden uitgevoerd. De begrippen oplossingenverzameling, gelijkwaardige stelsels en elementaire rijoperatoren worden verklaard.

Nadien kan de methode van het rijherleiden worden aangeleerd voor het oplossen van een mxn-stelsel (waarbij m en n maximum 3 zijn). Het is logisch dat onnodig zwaar rekenwerk met de huidige ICT-mogelijkheden wordt vermeden.

Bij het oplossen van vraagstukken ligt de nadruk op het opstellen van het stelsel en het interpreteren van het gevonden resultaat. Het oplossen van het stelsel gebeurt bij voorkeur met behulp van ICT.

UITBREIDING

Het bespreken van stelsels kan beperkt worden tot stelsels met één parameter. Het verwerven van het inzicht staat hier centraal vanuit de vraag: wanneer zijn er geen oplossingen, wanneer één, wanneer meerdere.

De deling van matrices is niet gedefinieerd. Wel is het mogelijk in bepaalde gevallen de inverse matrix te berekenen. De methode van het rijherleiden laat ons toe om deze inverse matrix, als hij bestaat, te berekenen.

5.3.2 Financiële algebra

ALGEMENE INLEIDING

Financiële algebra is niet alleen een vormend maar ook een belangrijk praktisch onderdeel van de wiskunde. In hun later leven zullen heel wat leerlingen geconfronteerd worden met vormen van beleggen of vormen van lenen. Daarom heeft de studie van financiële algebra zowel een wiskundig als een sociaal-maatschappelijk aspect. Beide aspecten zijn even belangrijk en moeten bijgevolg allebei voldoende aandacht krijgen.

Wiskundige begrippen die kunnen toegepast worden zijn o.a. de eerstegraadsfunctie (bijvoorbeeld: enkelvoudige intrest), de exponentiële functie (bijvoorbeeld: samengestelde intrest, de opeenvolgende aflossingsbestanddelen bij een schuldaflossing met constante annuïteit), meetkundige rij (bijvoorbeeld: kapitaalsvorming), iteratie (bijvoorbeeld: het bepalen van het jaarlijks kostenpercentage bij een consumentenkrediet). Het probleemoplossend denken wordt bevorderd door de leerlingen te confronteren met verschillende praktische situaties.

De theoretische kennis mag niet losgekoppeld worden van de realiteit. De leerlingen moeten, als toekomstige consumenten, vaardig worden in het evalueren van het ruime aanbod binnen de financiële wereld. Het is niet mogelijk dat alle bestaande vormen van beleggen en lenen besproken worden. Bovendien ontstaan er voortdurend nieuwe vormen. Het is nodig dat leerlingen zo opgeleid worden dat zij de transfer kunnen maken naar bestaande of nieuwe vormen.

Financiële algebra is sterk gebonden aan economische conjunctuur en wetgeving. Bijgevolg moet de leraar zich op de hoogte houden van bijvoorbeeld wijziging van rentevoeten, van roerende voorheffing, van wettelijke regels enz. zodat deze wijzigingen onmiddellijk kunnen opgenomen worden in de lessituatie. Informatie vindt men in de economische bladzijden van dagbladen en tijdschriften, bij de financiële instellingen en op het internet.

Met de leerlingen kan besproken worden wat de voor- en nadelen zijn van een zichtrekening, van een spaarrekening, van bepaalde soorten beleggingen (termijnrekening, kasbons, fondsen, ...), wat de gemiddelde kostprijs is van een bouwgrond en van een woning, hoeveel een gezinsinkomen moet bedragen om een bepaalde lening aan te kunnen gaan, of een bepaald goed beter gekocht wordt door middel van een consumentenkrediet of door gebruik te maken van spaargeld, enz.

Bij het oplossen van een probleem moeten de leerlingen een goed onderscheid kunnen maken tussen enkelvoudige en samengestelde intrest, tussen kapitaalsvorming en schuldaflossing, tussen de aard van de rentevoet (jaarlijks, semestrieel, ...), enz.
De ervaring leert dat heel wat leerlingen moeite hebben om deze leerstof te verwerken. De leerlingen moeten zich niet alleen kunnen inleven in de materie maar moeten hun kennis ook geregeld actualiseren. Daarom zal men voldoende tijd nemen om de doelstellingen te realiseren.

In de studierichting “economie-moderne talen” is overleg is met de leraren economie aangewezen.

LEERPLANDOELSTELLINGEN

FA1	B	Het verschil uitleggen tussen enkelvoudige en samengestelde intrest.
FA2	B	Een jaarlijkse rentevoet omzetten in een gelijkwaardige maandelijkse, trimestriële of semestriële rentevoet en omgekeerd.
FA3	U	Een aantal beleggingsvormen vergelijken en het nettorendement ervan berekenen.
FA4	B	De eindwaarde en het termijnbedrag berekenen bij een postnumerando kapitaalsvorming.
FA5	B	Het te lenen bedrag en het termijnbedrag berekenen bij een schuldaflossing met dadelijk ingaande annuïteit.
FA6	B	Het bedrag berekenen dat moet betaald worden als de schuld wordt afgelost voor de eindvervaldag.
FA7	U	Het termijnbedrag berekenen bij een variabele rentevoet.
FA8	B	Het verschil uitleggen tussen een lening met constante annuïteit en een lening met constante kapitaalsaflossing.
FA9	B	Een aflossingstabel interpreteren.
FA10	B	Uit een reclameaanbieding het soort consumentenkrediet herkennen en de gegevens ervan controleren.
FA11	B	In verband met de aangeleerde begrippen informatie verzamelen en interpreteren.
FA12	B	De aangeleerde begrippen kaderen binnen de actuele situatie.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Bij *enkelvoudige en samengestelde intrest* kan men uitgaande van de hoofdformules de formules voor het berekenen van beginwaarde, rentevoet en tijd afleiden. Maar het is evengoed mogelijk in de hoofdformule de gegevens in te vullen en de gevraagde parameter te berekenen zoals bij een vergelijking. Belangrijke toepassingen zijn de zichtrekening, de spaarrekening en de termijnrekening. Oefeningen op het berekenen van de netto-intrest bij een zichtrekening of een spaarrekening hebben geen zin. Alhoewel er algemene regels zijn voor het bepalen van de valutadata zijn er teveel afwijkingen naargelang de soort verrichting en de financiële instelling. Bij een spaarrekening moet er bovendien rekening worden gehouden met een getrouwheids- en een aangroeipremie. Deze premies zijn ook aan bepaalde voorwaarden verbonden. Dit alles maakt het moeilijk om een juiste intrestberekening te laten maken door de leerlingen. Om deze begrippen te illustreren kan men gebruik maken van bankdocumenten zonder dat dit aanleiding moet geven tot berekeningen.

Heel wat aandacht moet besteed worden aan het sociaal-maatschappelijk aspect van *diverse beleggingsvormen* zoals kasbons, verzekeringsbons, fondsen, e.d. Hierbij zal voldoende nadruk gelegd worden op de verschillen

tussen deze beleggingen. Bij het berekenen van het nettorendement moet rekening gehouden worden met de inschrijfkosten en de uitbetalingkosten. Er kan ook op gewezen worden dat andere factoren zoals inflatie en mogelijke fiscale mindering ook invloed hebben op het nettorendement.
Bij toepassingen op *gelijkwaardige rentevoeten* moeten de leerlingen inzien dat afrondingen tot niet te verwaarlozen verschillen kunnen leiden. Men kan er de leerlingen op wijzen dat in de praktijk hierover geen eenduidigheid bestaat.

De studie van de *kapitaalsvorming* d.m.v. periodieke stortingen kan zich beperken tot het bepalen van de eindwaarde en het termijnbedrag. Belangrijker is de studie van de *schuldaflossing*. Het te lenen bedrag komt overeen met de beginwaarde van een kapitaalsvorming. Dit bedrag V kan dan afgeleid worden uit de gelijkheid $V.u^n = A_n$ ($u = 1+i = 1+\frac{p}{100}$ en A_n is de eindwaarde van een kapitaalsvorming na n perioden). Bij het berekenen van het te lenen bedrag of het termijnbedrag zal men rekening houden met de gelijkwaardige rentevoet als de periodieke stortingen maandelijks, trimestrieel of semestrieel gebeuren. Ook de vraag naar het totaal af te betalen bedrag en het reële bedrag dat men terugbetaalt bij een schuldaflossing kan hier gesteld worden. Leningen met veranderlijke rentevoet komen momenteel veel voor. Daarom is het belangrijk de gevolgen te bestuderen bij een verandering van de rentevoet. Bij het vervroegd terugbetalen van de resterende schuld wordt er een wederbeleggingsvergoeding berekend. Als voor de schuldrest een lagere intrestvoet kan bekomen worden kan het interessant zijn de schuldrest om te zetten in een nieuwe lening hetzij bij dezelfde financiële instelling, hetzij bij een andere. Hierbij moet er wel rekening gehouden worden met bijkomende kosten. Bij dezelfde financiële instelling kunnen die kosten zich beperken tot dossierkosten. Wordt de nieuwe lening aangegaan bij een andere financiële instelling dan moet men buiten de wederbeleggingsvergoeding ook rekening houden met o.a. dossierkosten, notariskosten, inschrijvingskosten, e.d..

Bij het interpreteren van *een aflossingsplan* kan men wijzen op het feit dat termijnbedrag kan opgesplitst worden in een aflossingsbestanddeel en een rentebestanddeel evenals dat bij een schuldaflossing met constante annuiteit elk aflossingsbestanddeel gelijk is aan het voorgaande vermenigvuldigd met $u = 1 + i$. In de studierichting Economie-moderne talen kan er op gewezen worden dat de verschillende waarden uit een aflossingstabel op verschillende rekeningen geboekt worden. Ook in de belastingsaangifte worden rente- en aflossingsbestanddeel verschillend genoteerd.

De verschillende soorten *consumentenkrediet* (verkoop op afbetaling, lening op afbetaling, financieringshuur (leasing)) kunnen door voorbeelden geïllustreerd worden. Het begrip maandelijkse lastenpercentage is niet meer van toepassing. Controle op het juist zijn van de weergegeven getallen in een advertentie kan gebeuren met de formules: $M = \frac{k.\sqrt[12]{u^n}.(\sqrt[12]{u} - 1)}{\sqrt[12]{u^n} - 1}$ of $k = \frac{M}{\sqrt[12]{u} - 1}.(1 - \frac{1}{\sqrt[12]{u^n}})$, waarbij $u = 1 + \frac{JKP}{100}$, JKP = jaarlijks kostenpercentage, k = contante waarde - eventueel voorschot, M = de maandelijkse termijn en n = aantal stortingen.
(Vergelijk deze formules met deze bij een schuldaflossing).

Bij eenvoudige oefeningen is het gebruik van een formularium te verkiezen boven de ingebouwde financiële functies (bijv. in Excel). Het gebruik van ICT is wel nuttig bij het opstellen van een aflossingstabel of voor het onderzoeken van verschillende simulaties zoals bijvoorbeeld: de invloed van een renteverandering bij een lening op de aflossingstabel, het onderscheid tussen verschillende vormen van lening, het virtueel aankopen van een huis, binnen de actuele situatie de meest aangewezen belegging onderzoeken, … Daardoor leren de leerlingen diverse informatiebronnen en –kanalen kritisch selecteren, raadplegen, analyseren en toepassen waardoor voldaan wordt aan een aantal vakoverschrijdende eindtermen i.v.m. leren leren.

5.3.3 *Ruimtemeetkunde*

ALGEMENE INLEIDING

In de eerste en tweede graad (leerweg vier) werden de leerlingen al geconfronteerd met ruimtemeetkunde. De eigenschappen werden opgenomen in een “gereedschapskist” en gebruikt om meetkundige problemen op te lossen (zie leerplan tweede graad). In de derde graad kan die kennis en vaardigheid onderhouden, geconsolideerd en aangevuld worden door het onderzoeken van meetkundige situaties en het oplossen van een aantal meetkundige problemen. Belangrijk is dat men het meetkundig exploreren van situaties blijft ondersteunen.

Zo worden bij het maken van doorsneden van een veelvlak (kubus, balk, prisma, piramide) met een vlak heel wat meetkundige eigenschappen gemobiliseerd. Uitgaande van een aantal aanzichten of doorsneden kan men trachten een aantal uitspraken te doen over de ruimtelijke figuur.

LEERPLANDOELSTELLINGEN

M1	B	Eigenschappen over de loodrechte stand van rechten en vlakken in de ruimte onderzoeken en formuleren.
M2	B	In een concrete probleemstelling op een ruimtelijke voorstelling de doorsnede bepalen van een veelvlak met een vlak.
M3	B	Problemen oplossen in verband met ruimtelijke situaties door gebruik te maken van eigenschappen van vlakke figuren.
M4	B	Veelvlakken op hun eigenschappen onderzoeken.
M5	B	Eenvoudige meetkundige problemen in verband met veelvlakken oplossen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Het is zinvol de ruimtemeetkunde aan te vangen met een herhaling van wat al gekend is (zie gereedschapskist tweede graad). Bij het aanbrengen of herhalen van eigenschappen zal zo nodig weer aandacht besteed worden aan een duidelijke verwoording, aan een adequate voorstelling ervan zowel in een ruimtelijke situatie als op een tekening. De *loodrechte stand* van rechten, van een rechte en een vlak en van vlakken mag in de derde graad explicieter aan bod komen.

Het maken van een doorsnede van een vlak met een kubus of een balk laat toe een aantal redeneeroefeningen te maken en de meetkundige eigenschappen te gebruiken.
In leerweg vier is het maken van doorsneden niet aan bod gekomen. Bij leerlingen met deze vooropleiding zal men in de aanvangsfase uitgaan van een reële waarneming op concrete ruimtefiguren, zoals een kubus en een balk en hierbij relatief eenvoudige snijvlakken kiezen. Als ondersteuning kan men bijv. gebruik maken van een doorschijnend model van kubus of balk gevuld met een (gekleurde) vloeistof.
Leerlingen die leerweg vijf gevolgd hebben zijn hiermee al enigszins vertrouwd. Voor hen zal men een aangepast leertraject uitwerken. Zo kan dezelfde methodiek worden toegepast vanuit minder eenvoudige snijvlakken (bijv. geen twee van de drie punten die het snijvlak bepalen liggen in eenzelfde zijvlak) en op snijvlakken met andere ruimtefiguren zoals prisma en piramide.
Ook de omgekeerde vraagstelling is interessant. Uitgaande van een aantal aanzichten of doorsneden kan men een aantal mogelijke uitspraken onderzoeken over de ruimtelijke figuur. Bij het scannen van een voorwerp zal men vanuit een aantal parallelle doorsneden proberen zicht te krijgen op dat voorwerp.
Een ander didactisch hulpmiddel wordt geboden door software om ruimtefiguren te tekenen en doorsneden te bepalen. De leerlingen krijgen snel respons op hun werkwijze, eventuele fouten en kunnen ze zo snel bijsturen.

De leerlingen beschikken over een ruime kennis van eigenschappen uit de vlakke meetkunde en de driehoeks-

meting. Ze kunnen hier toegepast worden op problemen in ruimtelijke situaties. Ten aanzien van de tweede graad kunnen zowel problemen i.v.m. loodrechte stand in ruimtelijke situaties als meer complexe problemen aan bod komen. Het blijft daarbij zinvol voldoende aandacht te besteden aan het zichtbaar maken van de vlakke situatie waarin de eigenschappen worden toegepast (bijv. op een ruimtefiguur, op een tekening; zo bijvoorbeeld hoeft een rechthoekige driehoek helemaal niet als rechthoekig voorgesteld te worden in een tekening). Op zich versterkt dit al het ruimtelijk inzicht en het ruimtelijk voorstellingsvermogen.
Problemen die aan bod kunnen komen zijn o.m.:

- toepassingen in driehoeken die ontstaan door drie gegeven punten in ruimtefiguren te verbinden;
- onderlinge ligging van diagonaalvlakken in een balk;
- onderlinge ligging van een zijvlaksdiagonaal en een diagonaalvlak in een kubus;
- vorm en oppervlakte van een doorsnede van een veelvlak met een vlak;
- verband tussen de oppervlaktes van doorsneden van een piramide of een kegel gelegen in vlakken evenwijdig met het grondvlak;
- de afstand van een hoekpunt van een regelmatig viervlak tot het overstaand zijvlak;
- de hoek gevormd door snijdende rechten die de hoekpunten van een balk verbinden;
- berekeningen van hoeken die ontstaan in ruimtelijke figuren;
- de lengte van een bepaalde route afgelegd op een ruimtefiguur, het bepalen van de kortste route.

De studie van de ruimtemeetkunde kan afgesloten worden met het onderzoeken van enkele niet evidente veelvlakken (opbouw met vlakke figuren, soort, mogelijkheden, patroon) en eigenschappen ervan. Zo kan men als onderzoeksprobleem stellen het exploreren van de mogelijkheden om een bolvorm te maken met behulp van vlakke figuren (cf. voetbal, geodetische koepels).

5.3.4 Lineaire regressie en correlatie

ALGEMENE INLEIDING

In heel wat statistisch en wetenschappelijk onderzoek gaat men op zoek naar een mogelijk verband tussen twee variabelen. Meestal vermoedt men een zeker verband en probeert men dit via een onderzoek aan te tonen. Als vastgesteld is dat er met voldoende zekerheid kan worden aangenomen dat er een verband bestaat, probeert men dit verband te beschrijven met een formule. Zo kan men globale tendensen aangeven of dit verband gebruiken om voorspellingen te doen.
Het is zinvol de kennismaking met dit onderwerp te koppelen aan een concreet onderzoek.

LEERPLANDOELSTELLINGEN

LR1	B	Bij een reeks waarnemingsgegevens van twee variabelen op basis van een grafiek eventuele lineaire verbanden aangeven.
LR2	B	Bij concrete voorbeelden de betekenis van de correlatiecoëfficiënt uitleggen.
LR3	B	Met behulp van ICT bij waarnemingsgegevens van twee variabelen met een grote correlatie de regressielijn bepalen en hiermee bij de gegevens interpoleren en extrapoleren.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Bij het onderzoeken van het verband tussen twee kwantitatieve variabelen kan een ‘puntendiagram’ (het uitzetten van de koppels gegevens met op de ene as de eerste variabele en op de tweede as de andere variabele) duidelijkheid verschaffen omtrent het verband (de correlatie) tussen de twee variabelen. De mate van correlatie hangt af van de wijze waarop de punten in het diagram verspreid liggen. Bij een sterke (lineaire) correlatie concentreren de punten zich rond een rechte. Men noemt deze rechte de regressielijn. Aan de hand van concrete voorbeelden wordt dit aangebracht. Het is belangrijk dat de leerlingen inzien dat ook niet-lineaire verbanden mogelijk zijn. Voor het bepalen van de verbanden beperken we ons tot lineaire verbanden.

Een lineaire correlatie is sterk als de punten dicht bij een rechte lijn liggen en zwak als ze wijd verspreid om een lijn liggen. Een numerieke maat voor de correlatie is de correlatiecoëfficënt. De correlatiecoëfficiënt meet de zin en de sterkte van de lineaire relatie tussen twee kwantitatieve variabelen. Met behulp van ICT kan bij verschillende gegevens de puntenwolk getekend worden en de bijbehorende correlatiecoëfficiënt berekend worden. Zo wordt duidelijk dat dit getal tussen –1 en 1 ligt en dicht bij 0 ligt als het verband tussen de variabelen klein is, dat het dicht bij 1 ligt als de punten dicht bij een stijgende rechte liggen en dat het dicht bij –1 ligt als de punten dicht bij een dalende rechte liggen.

De formule voor de correlatiecoëfficiënt kan als volgt intuïtief verantwoord worden. Als het vlak in vier kwadranten verdeeld wordt volgens rechten evenwijdig met de assen en door het punt $(\bar{x}, \bar{y})$ dan liggen bij een sterke positieve correlatie de meeste punten in het eerste en derde kwadrant en bij een sterke negatieve correlatie in het tweede en vierde kwadrant zodat in het eerste geval de meeste afwijkingen $x_i - \bar{x}$ en $y_i - \bar{y}$ hetzelfde teken hebben en in het tweede geval een verschillend teken. Producten van de vorm $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ hebben bij een sterk verband voor het grootste deel hetzelfde teken. De som van deze termen is groot (positief of negatief) bij een grote correlatie. De noemer in de formule voor de correlatiecoëfficiënt zorgt ervoor dat de correlatiecoëfficiënt tussen –1 en 1 ligt. Wanneer de punten gelijkmatig over de vier kwadranten rond het zwaartepunt verspreid liggen, heffen de positieve en negatieve termen in de som van alle $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ elkaar op zodat de correlatiecoëfficiënt nagenoeg nul wordt.

Software en grafische rekenmachines bevatten instructies om gecombineerde tabellen gegevens in grafiek te zetten en de bijhorende regressielijn en correlatiecoëfficiënt te berekenen. Het is niet nodig de in de rekenmachine geprogrammeerde methode te verklaren. Indien het verband inderdaad lineair is en er een grote correlatie is, kan de regressielijn gebruikt worden om voor waarden van de x-variabele de y-variabele te voorspellen.
Het is belangrijk de leerlingen, bij voorkeur via concrete voorbeelden, te wijzen op drie aspecten.

- Een hoge correlatie wijst op een samenhang, maar niet noodzakelijk op een oorzakelijk verband. De onderzochte variabelen kunnen beide beïnvloed worden door andere variabelen.
- Een geringe correlatie bewijst evenmin dat er geen samenhangend verband zou zijn. Het is mogelijk dat het verband niet met een eerstegraadsfunctie te beschrijven is (maar bijv. door een exponentiële).
- Daarnaast geven statistische verbanden slechts globale tendensen en geen strenge regels. Hoewel rokers gemiddeld eerder dood gaan dan niet-rokers, zijn er mensen die 90 jaar worden terwijl ze toch veel roken.

5.3.5 Betrouwbaarheidsintervallen

ALGEMENE INLEIDING

Als men op basis van een steekproef een besluit wil trekken over de hele populatie moet men rekening houden met de steekproefvariabiliteit. Men kan die steekproefvariabiliteit aangeven door het steekproefresultaat te voorzien van een foutenmarge. Dergelijke foutenmarge is gekoppeld aan een betrouwbaarheidsniveau, bijv. 95 %. Dat betekent dat er een kans van 95 % is dat het interval bepaald door 'steekproefresultaat - foutenmarge' en 'steekproefresultaat + foutenmarge' de gezochte populatiewaarde bevat. Een dergelijk interval noemt men een betrouwbaarheidsinterval. Leerlingen moeten in staat zijn om statistische uitspraken, die gebruik maken van foutenmarges en betrouwbaarheidsniveaus, correct te interpreteren.

LEERPLANDOELSTELLINGEN

BI1	B	Bij concrete statistische uitspraken over proporties waarin gebruik wordt gemaakt van foutenmarges en het bijbehorend betrouwbaarheidsniveau, de betekenis van beide begrippen uitleggen.
BI2	B	Bij een concreet steekproefresultaat i.v.m. proporties een correcte statistische uitspraak formuleren, gebruik makend van een foutenmarge en het bijbehorende betrouwbaarheidsniveau.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Onvertekende steekproeven van gelijke grootte, getrokken uit eenzelfde populatie, zullen meestal lichtjes verschillende resultaten opleveren. Men spreekt van steekproefvariabiliteit. Stel bijv. dat we weten dat in een bepaalde populatie een proportie van 0,3 of 30 % aan een zekere ziekte lijdt. Twee onvertekende steekproeven van 1000 personen zouden dan bijv. een proportie 0,293 en 0,331 van mensen met die ziekte kunnen aantreffen. Om zicht te verkrijgen op de omvang van de steekproefvariabiliteit kan volgende vraag gesteld worden: “Wat zou er gebeuren als deze steekproefprocedure zeer vaak herhaald wordt?” Een simulatie (al dan niet met ICT) biedt hier een uitweg, bijv. welke steekproefresultaten zich kunnen voordoen en met welke relatieve frequentie. Men noemt de combinatie van beide de steekproefverdeling.

Gezien het toevallig karakter van een steekproefproportie is het onmogelijk met 100 % zekerheid te voorspellen wat de maximale en minimale waarden ervan kunnen zijn. In principe zijn alle waarden tussen 0 en 1 immers mogelijk. Wel kan men uit een simulatie vaststellen dat het gros van de steekproefproporties (bijv. 95 %) niet meer dan een bepaalde waarde (bijv. 0,026 of 2,6 %) afwijken van de populatieproportie. Men noemt 0,026 de foutenmarge en 95 % het bijbehorend betrouwbaarheidsniveau. Stel dat een steekproef een proportie van 0,317 opleverde, dan noemt men het interval $[0{,}317 - 0{,}026;\ 0{,}317 + 0{,}026]$ een betrouwbaarheidsinterval bij een betrouwbaarheidsniveau van 95 %. De leerlingen moeten bij concrete statistische uitspraken waarin gebruik wordt gemaakt van foutenmarges en het bijbehorend betrouwbaarheidsniveau, de betekenis van beide begrippen duidelijk kunnen uitleggen.

Op basis van simulaties bij verschillende steekproefgroottes n en verschillende populatieproporties p, kan een tabel opgesteld worden met foutenmarges, bij een betrouwbaarheidsniveau van bijv. 95 %. Op die manier kan bij elke steekproefproportie snel een foutenmarge opgezocht worden.

In plaats van met een tabel, gebaseerd op simulaties, kunnen betrouwbaarheidsintervallen ook op andere manieren bepaald worden. Zo kunnen grafische rekenmachines deze ook opstellen voor elk gewenst betrouwbaarheidsniveau. De klemtoon moet liggen op het inzicht in de begrippen, niet op de berekeningen.

Men kan ook aantonen dat, bij het heel vaak herhalen van een steekproefneming, de gevonden steekproefproporties normaal verdeeld zijn. Bovendien zijn er eenvoudige formules voor μ en σ, op basis van de steekproefproportie. De kennis van en het inzicht in de normale verdeling kan op die manier gebruikt worden om betrouwbaarheidsintervallen op te stellen in te interpreteren. Belangrijk hierbij is rekening te houden met de beperkingen die gelden om de normale verdeling en de formules voor μ en σ te mogen toepassen. Te weinig aandacht hieraan in de aanvangsfase kan er toe leiden dat leerlingen deze formules ten onrechte toepassen in alle situaties.

5.3.6 Toetsen van hypothesen

ALGEMENE INLEIDING

De resultaten van wetenschappelijk en/of statistisch onderzoek kunnen soms afwijken van wat men theoretisch denkt waar te zijn. Zo kan een winkelketen in een steekproef vaststellen dat slechts 70 % van de klanten tevreden zijn over de dienst-na-verkoop, terwijl de directie ervan overtuigd is dat 80 % tevreden is. Die 70 % kan het gevolg zijn van de steekproefvariabiliteit (en is wel degelijk 80 % van de klantenpopulatie tevreden). Ze kan evenwel toch wijzen op een werkelijk lager aantal tevreden klanten.
Bij toetsen van hypothesen probeert men op basis van een steekproef te onderzoeken of een hypothese over de ganse populatie aanvaard kan blijven of verworpen moet worden in het licht van de resultaten van de nieuwe steekproef.
De rekentechnische moeilijkheden waren vroeger een grote hinderpaal voor een kennismaking met dit belangrijk statistisch aspect in het secundair onderwijs. Nochtans is het mogelijk de belangrijkste aspecten van toetsen van hypothesen aan te brengen zonder rekenwerk. Met de huidige software vormt het rekenwerk ook geen hinderpaal.

LEERPLANDOELSTELLINGEN

HY1	B	Binnen een probleemsituatie van een eenvoudige hypothesetoets de begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese en P-waarde uitleggen.
HY2	B	Bij een onderzoek waar proporties voorkomen de nulhypothese en alternatieve hypothese formuleren en met behulp van ICT de P-waarde berekenen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Bij toetsen van hypothesen is de essentiële vraag: "Zijn deze waarnemingen, die (lichtjes) afwijken van wat de nulhypothese beweert, toevallig of niet?" (Wanneer we een eerlijke dobbelsteen 600 maal opgooien, valt die niet noodzakelijk 100 maal op 6. Daarbij zijn er twee mogelijke oorzaken voor deze afwijking: de teerling is eerlijk maar ten gevolge van de steekproefvariabiliteit is de steekproefproportie niet precies $\frac{1}{6}$ of de teerling is oneerlijk.)

Bij een significantietest onderzoekt men hoe groot de kans is dat de steekproefvariabiliteit of het toeval de oorzaak is van het afwijkend steekproefresultaat. Is het zeer onwaarschijnlijk dat de vastgestelde afwijking louter het gevolg is van het toeval (de steekproefvariabiliteit) dan moet de nulhypothese in vraag gesteld worden.

In het secundair onderwijs kunnen we ons beperken tot de basisideeën van het toetsen van een proportie (of een kans). De begrippen P-waarde en significantieniveau worden daarbij gebruikt. Veel aandacht moet gaan naar een goede verwoording van deze begrippen in concrete situaties en het aspect dat toeval steeds een rol speelt. De berekeningen kunnen we overlaten aan statistische software.

5.3.7 Telproblemen

BEGINSITUATIE

In de tweede graad hebben de leerlingen reeds eenvoudige telproblemen opgelost door ze voor te stellen met een boomdiagram, venndiagram of een ander schema.

LEERPLANDOELSTELLING

TP1	B	Systematisch mogelijkheden tellen in situaties waarin herhalingen zijn toegestaan en in situaties waarin herhalingen niet voorkomen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De belangrijkste doelstelling blijft dat leerlingen leren telproblemen systematisch aan te pakken. Het oplossen van de problemen is de bedoeling. Naast het gebruik van een boomdiagram, wegendiagram of venndiagram kan het helpen de problemen te classificeren. De begrippen variatie, permutatie en combinatie worden hiervoor ingevoerd.
Bij experimenten met twee uitkomsten wordt de band met de driehoek van Pascal en de bijhorende roostervoorstelling gelegd. Het verband tussen de driehoek van Pascal en het binomium van Newton kan als toepassing aan bod komen.

5.3.8 Kansrekenen

ALGEMENE INLEIDING

Als bij de studie van de normale verdeling de stap naar kansverdeling gezet is, kunnen we de leerlingen ook kennis laten maken met discrete kansverdelingen. Ook hier zal er dan voldoende aandacht gaan naar de analogie met aspecten van beschrijvende statistiek (relatieve frequentie - kans, histogram - kanshistogram, gemiddelde – verwachtingswaarde, …).

LEERPLANDOELSTELLINGEN

KR1	B	In eenvoudige situaties kansen berekenen door gebruik te maken van een kansboom, de somregel, productregel en complementregel.
KR2	B	Van een toevalsvariabele de kansverdeling opstellen en de verwachtingswaarde berekenen en interpreteren en het verband leggen met de begrippen ‘gemiddelde’ en ‘standaardafwijking’ uit de statistiek.
KR3	B	Vaststellen of een kansexperiment vertaald kan worden naar het model van de binomiale verdeling en de bijbehorende kansen berekenen met behulp van ICT.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de tweede graad gebruikten de leerlingen reeds boomdiagrammen om kansen te berekenen. Impliciet maakten ze ook gebruik van de som-, product- en complementregel. Aan de hand van enkele concrete oefeningen kan dit opgefrist worden. Ook de regel van Laplace zal daarbij vermeld worden.

Een toevalsvariabele (stochastische variabele) is de numerieke uitkomst van een statistisch experiment, bijv. het aantal koppen bij het herhaald (bijv. 10 maal) opgooien van een muntstuk. De tabel van de kansen van alle mogelijke uitkomsten is de kansverdeling van deze toevalsvariabele. Men kan hier ook een histogram van maken. Naar analogie met een tabel van relatieve frequenties kunnen we ook bij een kansverdeling het gemiddelde (en de standaardafwijking) berekenen.

Een veel voorkomende verdeling is de binomiale verdeling. Aan de hand van concrete voorbeelden kan bij deze verdeling (zoals bij de normale verdeling) de P-waarde (overschrijdings- en onderschrijdingskans) onderzocht worden. De berekening van deze kansen gebeurt met ICT. Dit laat toe aandacht te besteden aan het aspect ‘toeval’ bij een statistisch experiment.
Opmerking: als telproblemen niet werden behandeld, dan zal men de uitdrukkingen voor de combinaties voluit noteren.

5.3.9 Mathematiseren en oplossen van problemen

ALGEMENE INLEIDING

De leerlingen worden binnen en buiten de context van de wiskundevorming geconfronteerd met allerlei problemen, die soms relatief ingewikkeld kunnen zijn. Door hun wiskundekennis adequaat aan te wenden kan deze complexiteit vereenvoudigd worden. Daartoe moeten ze het probleem vlot kunnen onderzoeken of analyseren en er de wiskundige elementen van herkennen en onderscheiden. Door het probleem met een wiskundig model te beschrijven kan het verhelderd worden. Vaak komt het er op neer, op zoek te gaan naar de juiste gegevens, de vraag correct en helder te formuleren, de relaties die de context aanreikt in wiskundige termen uit te drukken. Het resultaat is een vergelijking, een stelsel, een meetkundige situatie, …. Met behulp van de beschikbare wiskundekennis kan dan het (verwiskundigd) probleem aangepakt worden met vertrouwde oplossingsmethoden. Het resultaat moet uiteraard geïnterpreteerd worden in de context om te onderzoeken of het daar betekenisvol is. Bij sommige problemen is de wiskundige ‘omschrijving’ een letterlijke vertaling van de probleemstelling. Bij heel wat problemen moeten echter extra veronderstellingen of beperkingen ingevoerd worden om een wiskundig model voor het probleem te kunnen vinden. Dit wiskundig model laat wel toe het probleem verder te onderzoeken. Achteraf moet de invloed van de extra veronderstellingen op het resultaat bekeken worden.

Bij de probleemstelling gebruiken de leerlingen heuristiek die vaak transfereerbaar is naar andere probleemsituaties. De wiskundige inhouden zijn hier slechts ondersteunend voor het ontwikkelen van deze probleemoplossende vaardigheden.
Zo kunnen leerlingen onder meer leren

- een goede voorstelling van een probleem te maken, o.m. herkenbaarheid van een probleem, herkenbaarheid van wiskundekennis;
- de relaties binnen het probleem te analyseren, bijv. noodzakelijke en overbodige informatie onderscheiden, bijkomende informatie zoeken;
- een oplossingsplan op te stellen als nodig, bijv. het probleem opsplitsen in deelproblemen, een restrictie maken op de probleemstelling (i.c. het beperken van onderdelen om een wiskundige beschrijving mogelijk te maken), een vermoeden formuleren en toetsen;
- adequaat hulpmiddelen in te schakelen, bijv. vakspecifieke informatie, vademecum, aanwending van ICT;
- oog te hebben voor de interpretatie van resultaten;
- een gecontroleerde houding te ontwikkelen van terugkijken zowel op de fase van het stellen en/of het analyseren van het probleem, als die van het effectief oplossen;
- na te denken over de gevolgde oplossingsweg en hieruit conclusies te trekken naar de aanpak van een volgend probleem, bijv. hun wiskundekennis verhogen of beter structureren, bepaalde vaardigheden oefenen, betere kennisschema’s uitwerken, onderdelen herhalen.

Het verwerken van problemen met behulp van wiskunde kan bij de leerlingen opvattingen en houdingen ontwikkelen over wiskunde. Zo zullen ze zich realiseren dat wiskunde meer is dan een stel regels, maar effectief kan ingezet worden om problemen uit het reële leven op te lossen of ten minste om er inzicht in te verwerven.
Ze kunnen inzien dat de vaardigheden verworven bij de aanpak van problemen binnen de wiskundevorming ook ingezet kunnen worden bij het oplossen van andere problemen. Zo kan een onderzoekende houding aangewend worden in elk probleemproces (bijv. verzamelen, aanvullen van informatie, opzoeken of herhalen van kennis, kritische houding ten aanzien van informatie). Zo ontwikkelt een wiskundige probleemaanpak vaak het doorzettingsvermogen en de zin voor nauwkeurigheid. Een houding van systematisch reflecterend terugkijken op een oplossingsproces kan hen leren fouten te vermijden en bij te sturen. Daardoor zal de tevredenheid over de uitvoering van een opdracht toenemen, en van daaruit kan het geloof in de eigen capaciteiten en hun zelfvertrouwen groeien.

Deze houdingen zijn ook van fundamenteel belang bij het leren zelf, i.c. een onderzoekende houding, doorzettingsvermogen, geloof in eigen kunnen, gecontroleerd uitvoeren van een plan, reflecterende feedback, ….

LEERPLANDOELSTELLINGEN

MA1	B	Problemen herkennen, analyseren en de probleemstelling verhelderen met behulp van hun wiskundekennis.
MA2	B	Heuristische methodes gebruiken om een probleem aan te pakken.
MA3	B	Resultaten interpreteren binnen de context van het gestelde probleem.
MA4	B	Een reflecterende houding verwerven door gecontroleerd terugkijken op de oplossingsweg, het gekozen model en de uitgevoerde berekeningen.
MA5	B	Vertrouwen verwerven door hun wiskundekennis zinvol in te schakelen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de praktijk kunnen allerlei situaties aanleiding zijn tot interessante probleemstellingen.

- Problemen en toepassingen aangereikt binnen andere vakken.
- Het ondersteunen van een wiskundig gedeelte van een project in de vrije ruimte.
- Maatschappelijke problemen en situaties:
    - statistische informatie, enquêtes;
    - problemen en enquêtes binnen de schoolcontext;
    - maatschappelijke gedragingen (rijgedrag, rookgedrag, drugs,besteding inkomen, …);
    - milieuproblematiek;
    - samenlevingsproblemen;
    - verkiezingen;
    - verwerking en kritische bevraging van informatie in televisie, kranten en tijdschriften.

Ook de leerinhouden die de leerlingen verwerken vanuit het leerplan bevatten allerlei situaties om deze methodiek van probleemaanpak in de praktijk te brengen.

Alhoewel al heel wat aandacht besteed werd aan het verwerven van probleemoplossende vaardigheden, zal men de leerlingen toch voldoende moeten begeleiden op de weg van probleemaanpak, die zeker niet eenvoudig is, als men opteert voor een grote inbreng vanuit zelfstandig werken met wiskunde. Sommige leerlingen hebben wellicht het meeste leerkansen als de leraar zijn aanpak voldoende transparant kan maken.
Bij dergelijk zelfstandig verwerken van een opdracht zal men de opdracht en de leerlingen gericht opvolgen om de ze voldoende succeservaring te bieden. Zo is het zinvol verschillende wegen om tot een oplossing te komen zichtbaar te maken en te waarderen. Alleszins moeten de leerlingen terugkoppeling verwerven op het eigen proces van aanpakken.

Een aantal opdrachten kunnen individueel gegeven worden. Maar het lijkt ook zinvol ruimere probleemstellingen te behandelen in de vorm van groepstaken. Hierbij zullen leerlingen, weliswaar op hun niveau, over wiskunde en probleemaanpak moeten communiceren. Hiermee zal hun (wiskundige) taalvaardigheid aangescherpt worden (bijv. nauwkeurigheid, correct gebruik wiskundige begrippen). En zoals bij elke vorm van groepswerk bestaat hier de kans op (verdere) ontwikkeling van de sociale vaardigheden (van onderlinge communicatie, spreken en luisteren, openheid, respecteren van afspraken, respecteren van elkaars persoon, aanbrengen van en/of aanvaarden van een andere mening).

Dit onderdeel moet uiteraard opgenomen worden binnen de evaluatie. Het zou van een te beperkte visie reflecteren als dit onderdeel alleen zou beoordeeld worden op de uiteindelijke oplossing van een probleem. Permanente evaluatie, begrepen als een permanente feedback op het oplossingsproces, is hier het meest aangewezen.

6 SUGGESTIES VOOR DE VRIJE RUIMTE

ALGEMENE INLEIDING

De lessentabellen voor de derde graad ASO laten de scholen, afhankelijk van de studierichting, één tot vier lestijden ruimte (d.i. vrije ruimte). Een school/scholengemeenschap bepaalt autonoom hoe zij de basisvorming en het fundamenteel gedeelte van de lessentabel aanvult tot 32 lestijden. De vrije ruimte biedt een extra stimulans om als schoolteam verder werk te maken van onderwijsvernieuwing en om de lopende experimenten en projecten in het reguliere lestijdenpakket een plaats te geven. Het VVKSO suggereert, behalve invulling met vakken, zelfstandig leren, overgang naar hoger onderwijs, vakoverschrijdende thema's, projecten en vakken, ook clustering van vakken.
Hieronder zijn een aantal voorbeelden hiervan opgenomen. Het zijn suggesties met telkens vermelding van de betrokken vakken. Een bundeling van alle thema's is opgenomen in het inspiratiehandboek *Werken in de vrije ruimte*. Hierin wordt ook aandacht besteed aan methodieken, inhouden, evaluatievormen en aan de praktische consequenties voor de schoolorganisatie (infrastructuur, lesrooster).
Deze vakkencombinerende thema's willen een inspiratiebron zijn om over vakgrenzen heen een initiatief op maat van de studierichting en van de school uit te werken. Een multidisciplinaire benadering kan, in combinatie met het uitdiepen van nieuwe didactische werkvormen, die ook al aan bod komen binnen het vak, een meerwaarde betekenen voor leraar en leerling.

VRIJE RUIMTE EN WISKUNDE

In deze studierichtingen kan wiskunde zeker bijdragen in de uitwerking van projecten. Dat wil zeggen zeker vanaf het optreden, het verzamelen en het verwerken van numerieke gegevens, waarvoor een aantal modellen beschikbaar zijn (grafieken en tabellen, lineaire en exponentiële groei, statistiek). Anderzijds biedt de historische ontwikkeling van wiskunde een schat aan filosofische overwegingen en ontwikkelingen, die zowel in verband kunnen worden gebracht met geschiedenis of klassieke cultuur, als met algemene achtergrondvorming. Ten slotte biedt wiskunde ook duidelijke aangrijpingspunten om opgenomen te worden in de concrete uitwerking van een kunstzinnig project.

1 WISKUNDE (EN WETENSCHAPPEN) IN DE GESCHIEDENIS; GESCHIEDENIS VAN WISKUNDE … ; WETENSCHAPSFILOSOFIE.

BETROKKEN DISCIPLINES

Wiskunde, geschiedenis, fysica, chemie, biologie, aardrijkskunde, moderne vreemde talen, klassieke talen (telkens afhankelijk van de gebruikte bronnen)

BESCHRIJVING

Op keerpunten in de geschiedenis hebben wiskunde en wetenschappen, wiskundigen en wetenschappers (en ze waren dan vaak ook 'filosofen' of is het omgekeerd) een belangrijke rol gespeeld. Voorbeelden zijn onder meer te vinden in de Griekse beschaving (ontwikkeling van de wetenschappelijke methoden met o.m. Plato, Aristoteles, Pythagoras, Euclides, Archimedes …), de zestiende en/of zeventiende eeuw (o.m. Descartes, Fermat, Pascal, Newton, …) en de overgang negentiende en twintigste eeuw (o.m. Whitehead, Russell, … en o.m. een aantal computerdeskundigen). Omdat wiskunde en wetenschappen vaak een gelijkopgaande groei hebben gekend, wordt hier vaak vanzelfsprekend vakoverschrijdend gewerkt.

Leerlingen kunnen gemakkelijk aan het werk vanuit
- de ontwikkeling van wiskunde of wetenschappen in een bepaalde periode,
- het onderzoek naar de inbreng en filosofische opvattingen van een wiskundige,

- de geschiedenis van een onderdeel van de wiskundekennis afhankelijk van het tijdsgebeuren, bijvoorbeeld de geschiedenis
  - van het functiebegrip,
  - van het getalbegrip en -eigenschappen (bijv. de stelling van Fermat en haar ontwikkelingen tot in de twintigste eeuw),
  - van de meetkunde (bijv. de axiomatiek van Euclides en haar invloed op het denken, de ontwikkeling van de niet-euclidische meetkunde),
  - van de ontwikkeling van de wiskundetaal zelf, bijv. de ontwikkeling van symboliek, het werken met formules, het gebruik van de logica,de etymologische studie van de ontwikkelingen van terminologie (bijv. vanuit Grieks en Latijn of precies vanuit de vernederlandsing die Simon Stevin bewerkstelligde).

Als de teksten in een bibliotheek kunnen gevonden worden, kan gewerkt worden aan de hand van oorspronkelijke (of als dusdanig overgeleverde) bronnen. Zowel de toenmalige invloed kan besproken worden als de consequenties op hedendaagse opvattingen (inclusief vakopvattingen).

Hierbij wordt het tijdskader en beoordelingskader van de tijdsgebonden elementen aangereikt vanuit geschiedenis (zie ook thema 1 bij *Vrije ruimte* van *geschiedenis* omtrent zingeving). Hierbij kunnen talen een belangrijke rol krijgen voor de vertaling en de tekstinterpretatie van bronnen: klassieke talen voor de oudheid (met voor Grieks en Latijn de studie van oorspronkelijke teksten), de zestiende en zeventiende eeuw (wetenschapstaal was nog vaak Latijn); Frans, Duits en Engels voor teksten vanaf de zeventiende eeuw. Hierbij spelen wiskunde en wetenschappen een belangrijke rol, omdat uiteraard ook de inhouden moeten begrepen worden.

WERKVORMEN

Literatuurstudie. Uitdieping van een gekozen thema.
Werkstuk via begeleid zelfstandig werken.
Rapportering d.m.v. afgewerkte tekst en presentatie in de klasgroep, al of niet gecombineerd met het gebruik van een logboek of met een presentatie van een portfolio.

BRONNEN/MATERIAAL

– **Beckers, D., Smid, H.J.**, Praktische opdrachten en de geschiedenis van de wiskunde, TU Delft, KU Nijmegen, 1998.
– **Beukers, F.,** Pi, de geschiedenis van pi, Utrecht, Epsilon uitgaven, 2000.
– **Bouwman, N., Kalle, C.,** Het gebruik van wiskunde in de Islam, Utrecht, Epsilon uitgaven, 2002.
– **De Smit, B., Top, J., e.a.,** De speeltuin van de wiskunde, Beek, Natuurwetenschappen & Techniek, 2003.
– **Devlin, K.,** Wiskunde, Wetenschap van patronen en structuren, Wetenschappelijke bibliotheek, Beek, Segment, 1998.
– **Glas, E.,** De mathematisering van natuur, techniek en samenleving, Leuven, Garant, 1991.
– **Goossens, W.,** Over wetenschap, Leuven, Garant 1991.
– **Guedj, D.,** De stelling van de papegaai, Ambo, 1999.
– **Mankiewicz, R.,** Het verhaal van de wiskunde, Abcoude, Uniepers, 2000.
– **Stewart, I.,** Over sneeuwkristallen en zebrastrepen, Abcoude, Uniepers, 2002.
– **Struik, D.J.,** Geschiedenis van de wiskunde, Utrecht, Het Spectrum, 1990.

– **Garfunkel S.,** For all practical purposes, New York, Freeman & cy., 1991.
– **Johnson, A.,** Classic Math, history topics for the classroom, Palo Alto, Dale Seymour Publications, 1994.
– **Kline, M.,** Mathematics in western culture, London, Pinguin Books, 1990.
– **Smith, C.J.,** History of mathematics, Volume I en II, New York, Dover Publications, 1958.

– The Mac Tutor History of mathematics archive op www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/
– History of mathematics by subject op aleph0.clarku.edu/%7Edjoyce/mathhist/subjects.html
– Lectures on history of mathematics op www.math.tamu.edu/~don.allen/history/m629_97a.html
– Mathematicians of the seventeenth and eighteenth centuries op www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/RBallHist.html

2 KUNST EN WISKUNDE

BETROKKEN DISCIPLINES

Wiskunde, geschiedenis, esthetica, fysica, chemie, Nederlands, moderne vreemde talen, klassieke talen (telkens afhankelijk van bronnen), muzische vorming, plastische opvoeding.

BESCHRIJVING

Sinds mensenheugenis is er een duidelijk verband tussen wiskunde en kunst. Zowel in de schilderkunst, als de bouwkunst, de muziek, … kan de invloed van mathematisch 'denken' onderzocht worden. O.m. patronen, vlakverdelingen, verhoudingen (i.h.b. bij onderzoek van de gulden snede in de natuur, de beeldende kunst en de architectuur; bij composities in de schilderkunst, bijv. da Vinci, Rubens, Ingres, David, Seurat, Verstockt) De ontwikkeling van perspectief en het weglaten daarvan. Het gebruik van symmetrie, transformaties (Moorse kunst, bijv. Alhambra in Spanje), curven (bijv. in glasramen, in Jugendstil). 'Strikt geometrische' ontwikkelingen zoals in Bauhaus, bij Le Corbusier , Rietveld, Gaudi, ….

In de muziek kan aandacht besteed worden aan de opbouw van tonen (frequenties, trillingen, lengte van snaren of blaasinstrumenten …), intervallen (bijv. octaven, Pythagorische diatonische toonladder) … , het gebruik van reeksen in bepaalde partituren (transformaties). De elektronische muziek, en de weergave via elektronische middelen kunnen jongeren wellicht aanspreken. Hier zou zelfs aandacht kunnen besteed worden aan het brengen van informatie op moderne beeld- en klankdragers als CD en DVD (zie ook thema 2). Bij muziek sluit ook dans en ballet aan, waarbij figuren vaak gedanst worden op geometrische patronen (cirkels, spiralen, gulden snede, rijen van Fibonacci).

Het thema kan op velerlei wijzen worden aangepakt. Zo kan men bepaalde aspecten bestuderen, zoals symmetrie (zie voorbeeld Escher), perspectief (zie voorbeeld), toepassing van gulden snede, curvenverbindingen (cf. Jugendstil).

<u>Wiskundige transformaties bij Escher</u>

Het is algemeen bekend dat de mens een natuurlijke affiniteit heeft met symmetrie. Er zijn bijzonder veel kunstwerken bekend waarvan het overduidelijk is dat de kunstenaar zich heeft laten leiden door meetkundige principes. Een bekend voorbeeld van zo'n kunstenaar is Escher.
Enkele bestaande kunstwerken onderzoeken op meetkundige elementen.
Een eigen wiskundig kunstwerk ontwerpen.

<u>Perspectief</u>

Verschillende soorten perspectief. Verschillende ruimtelijke voorstellingen. Verhoudingen.
Lichtinval, schaduwwerking vanuit verschillende soorten lichtbundels.
Geschiedenis van de perspectief.

<u>Gulden snede</u>

Een aantal kunstwerken (schilderijen, gebouwen, beeldhouwwerken) onderzoeken op de toepassing van de gulden snede.

<u>Meetkunde van de glasramen</u>

Vlakverdelingen en curvenverbindingen.

<u>Wiskundige kunst maken</u>

Wat maakt een kunstwerk tot een 'wiskundig' kunstwerk? En hoe maak je een 'wiskundig' kunstwerk? Is het voldoende als er op de één of andere manier geometrische figuren (cirkels, vierkanten, kubussen, enz.) in verwerkt zijn? Een inventaris maken van een aantal mogelijkheden (verhoudingen, gulden snede, vlakverdeling, symmetrie, iteratie ….).

Een kunstwerk maken geïnspireerd door de wiskunde en dat aspect toelichten.
Het onderzoek kan resulteren in beeldende opdrachten (zie ook thema's plastische opvoeding):
- geometrische composities: tangram, pictogrammen, toepassingen op logo's;
- tapijt of decoratief paneel: (repetitieve kunst en fractalen) element in ritmische ordening herhalen;
- toepassingen op wiskundige begrippen voor handboek wiskunde;
- ritmische composities in bas-reliëf (klei of karton);
- composities opbouwen via ICT;
- ruimtelijke opdracht: ontwerpen van een maquette van een toren.

Fractalen

Het kunstzinnig zichtbaar maken van wiskundige functies en iteratieprocessen in het complexe vlak.

WERKVORMEN

Literatuurstudie, Keuze van een thema.
Werkstuk via begeleid zelfstandig werken.
Rapportering d.m.v. afgewerkte tekst of portfolio en presentatie in de klasgroep.
Portfolio van wiskundig besproken kunstwerken.
Ontwerpen en/of uitvoeren van een kunstvoorwerp.

BRONNEN/MATERIAAL

– **Ernst, B.,** Bomen van Pythagoras. Variaties van Jos De Mey, Amsterdam, Aramith uitgevers, 1985.
– **Devlin, K.,** Wiskunde, Wetenschap van patronen en structuren, Wetenschappelijke Bibliotheek, Beek, Segment, 1998.
– **Hoveijn, I., Scholtmeijer, J.,** Fractals, Utrecht, Epsilon Uitgaven, 2001.
– **Jansen S., Adolphe J.M., e.a.,** Rosas , Anne Teresa De Keersmaeker, als en als verwondering, Renaissance du Livre, Tournai, 2002; DVD: **De Mey T.,** Rosas fase, C-Sals, Editions à voir, 2002.
– **Kleijne, W., Konings, T.,** De gulden snede, Utrecht, Epsilon Uitgaven, 2000.
– **Lauwerier, H.,** Fractals, Bloemendaal, Aramith, 1987.
– **Mankiewicz, R.,** Het verhaal van de wiskunde, Abcoude, Uniepers, 2000.
– **Pedoe D.,** Perspectief doorzien, meetkunde als thema in de kunst, Amsterdam, Aramith uitgevers, 1988
– **Stewart, I.,** Over sneeuwkristallen en zebrastrepen, Abcoude, Uniepers, 2002.
– **Van de Craats, J.,** De juiste toon, Utrecht, Epsilon uitgaven, 2003.
– **Van den Broeck L.,** Spiegelanamorfosen in Uitwiskeling, 15/4 p.14-40.
– **Verweij, A., Kindt, M.,** Perspectief, hoe moet je dat zien?, Utrecht, Epsilon Uitgaven, 1999.

Doeboeken, Leiden, Stichting 'Vierkant voor wiskunde':
  – Fibonacci-getallen en de gulden snede.
  – W.A.Mozart, Muzikaal Dobbelspel I-II.
  – Tegels leggen, en dergelijke.
  – Zelf Escher-achtige vlakvullingen ontwerpen
  – Lijnen in perspectief.

– **Garland, T.H., Kahn, C.V.,** Math en Music, Harmonious Connections, Palo Alto, Dale Seymour Publications, 1995.
– **Garland, T. H.,** Fascinating Fibonaccis, Palo Alto, Dale Seymour publications, 1987.
– **Martin Cundy, H., Rollett, A.P.,** Mathematical Models, Oxford, Tarquin publications, 1989.
– **Sakles, M.,** Source Book of problems for geometry, Industrial design and architectal ornament, Palo Alto, Dale Seymour publications, 1994.

Algemene sites
  – perso.unifr.ch/michael.beer/mathandmusic.htm
  – www.aps.nl/wiskunde en dan 'good practice'
  – Wiskunde en kunst op www.arsetmathesis.nl/
  – Art et Maths op www.mathkang.org/cite/expo2000.html

- Visual Mathematics op members.tripod.com/vismath/mart.htm
- mathforum.org/mam/03/
- Puzzels, spellen en objecten gerelateerd aan natuurkunde, wiskunde en logica op www.arabesk.nl/nederlands.html

De gulden snede

- www.arsetmathesis.nl/arthesis/mondriaan.htm
- www.phys.tue.nl/TULO/info/guldensnede/architectuur.html
- www.nvvw.nl/ontpyth.htm
- www2.lokv.nl/bronnenbundels/1994/1994_33.htm

Wiskunde achter de kunst van…

- www.pa.win.tue.nl/wstomv/publications/Waaier-Koos.pdf
- www.rinusroelofs.nl/index.html
- www.georgehart.com/sculpture/sculpture.html
- web.inter.nl.net/hcc/Hans.Kuiper/nlindex.htm
- www.mcescher.nl/

3 MATHEMATISEREN EN OPLOSSEN VAN PROBLEMEN

BETROKKEN DISCIPLINES

Alle vakken

BESCHRIJVING

Probleemoplossende vaardigheden zijn belangrijke vaardigheiden die in vele situaties gehanteerd kunnen worden. Vaak is er in een geïsoleerde vakaanpak weinig ruimte om hier uitgebreid op in te gaan. Precies het multidisciplinaire karakter van de vrije ruimteopdrachten kan deze ban doorbreken. Dit onderwerp heeft dus de initiële bedoeling ruimte te scheppen voor de ontwikkeling van deze vaardigheden. De wellicht onvermijdelijke inhoudelijk aanpak moet hierin ondergeschikt zijn aan het reflecteren over de probleemoplossende vaardigheden zelf en het verwervingsproces ervan. Wiskunde kan hierin als modelvormende discipline eventueel een centrale rol vervullen.

Leerlingen verwerven (leren) 'probleemoplossende vaardigheden' maar door effectief problemen aan te pakken. Deze problemen kunnen uit allerlei situaties ontstaan binnen alle vakken. Zo worden leerlingen hier ook mee geconfronteerd als dergelijke problemen binnen wiskunde kunnen aangepakt worden, ook als ze vakoverschrijdend zijn.

Een aantal problemen zijn inderdaad mathematiseerbaar. Dat wil zeggen dat de leerlingen door hun wiskundekennis adequaat aan te wenden een beschrijvingsmodel kunnen aanwenden of opstellen, en daardoor de complexiteit van de situatie kunnen vereenvoudigen. Daartoe moeten ze het probleem vlot kunnen onderzoeken of analyseren en er de wiskundige elementen van herkenen en onderscheiden. Door het probleem met een wiskundig model te beschrijven kan het verhelderd worden.

Bij de probleemstelling en -oplossing gebruiken de leerlingen heuristiek die vaak transfereerbaar is naar andere probleemoplossende situaties ook binnen andere vakgebieden. De inhouden zijn hier slechts ondersteunend voor het ontwikkelen van deze probleemoplossende vaardigheden.

Zo kunnen leerlingen onder meer leren

- een goede voorstelling van een probleem te maken, o.m. herkenbaarheid van een probleem, herkenbaarheid van wiskundekennis;
- de relaties binnen het probleem te analyseren, bijv. noodzakelijke en overbodige informatie onderscheiden, bijkomende informatie zoeken;
- een oplossingsplan op te stellen als nodig, bijv. het probleem opsplitsen in deelproblemen, een restrictie maken op de probleemstelling (i.c. het beperken van onderdelen om een wiskundige beschrijving mogelijk te maken), een hypothese formuleren en ze toetsen;

– adequaat hulpmiddelen in te schakelen, bijv. vakspecifieke informatie, vademecum, ICT-gebruik
– oog te hebben voor de interpretatie van resultaten
– een gecontroleerde houding te ontwikkelen van terugkijken zowel op de fase van het stellen en/of het analyseren van het probleem, als die van het effectief oplossen;
– na te denken over de gevolgde oplossingsweg en hieruit conclusies te trekken naar de aanpak van een volgende probleem, bijv. hun kennis verhogen of beter structureren, bepaalde vaardigheden oefenen, betere kennisschema's uitwerken, onderdelen herhalen.

Leerlingen kunnen inzien dat de vaardigheden verworven bij de aanpak van problemen binnen de wiskundevorming ook ingezet kunnen worden bij het oplossen van andere problemen. Zo kan een onderzoekende houding aangewend worden in elke probleemproces (bijv. verzamelen, aanvullen van informatie, opzoeken of herhalen van kennis, kritische houding ten aanzien van informatie). Zo ontwikkelt een wiskundige probleemaanpak vaak het doorzettingsvermogen en de zin voor nauwkeurigheid. Een houding van systematisch reflecterend terugkijken op een oplossingsproces kan hen leren fouten te vermijden en bij te sturen. Daardoor zal de tevredenheid over de uitvoering van een opdracht toenemen, en van daaruit kan het geloof in de eigen capaciteiten en hun zelfvertrouwen groeien. Deze houdingen zijn ook van fundamenteel belang bij het leren zelf, i.c. een onderzoekende houding, doorzettingsvermogen, geloof in eigen kunnen, gecontroleerd uitvoeren van een plan, reflecterende feedback ….

Een aantal opdrachten kunnen individueel gegeven worden. Maar het lijkt ook zinvol ruimere probleemstellingen te behandelen in de vorm van groepstaken. Hierbij zullen leerlingen over hun probleemaanpak moeten communiceren. Hiermee zal hun (bijv. wiskundige) taalvaardigheid aangescherpt worden (bijv. nauwkeurigheid, correct gebruik wiskundige begrippen). En zoals bij elke vorm van groepswerk bestaat hier de kans op (verdere) ontwikkeling van de sociale vaardigheden (van onderlinge communicatie, spreken en luisteren, openheid, respecteren van afspraken, respecteren van elkaars persoon, aanbrengen van en/of aanvaarden van een andere mening).

In de praktijk kunnen allerlei situaties aanleiding zijn tot interessante probleemstellingen.

– Problemen aangereikt binnen vakken (en met een wiskundige component).
– Maatschappelijke problemen en situaties:
  · statistische informatie, enquêtes;
  · maatschappelijke gedragingen (rijgedrag, rookgedrag, drugs, besteding inkomen …);
  · milieuproblematiek;
  · samenlevingsproblemen;
  · verkiezingen;
  · verwerking en kritische bevraging van informatie in televisie, kranten en tijdschriften.

WERKVORMEN

Effectief (aangeboden of zelf voorgestelde) problemen aanpakken, individueel of in groep.
Portfolio van onderzochte en/of opgeloste problemen.

BRONNEN/MATERIAAL

– **Roels J., De Bock D. e.a.,** Wiskunde vanuit toepassingen, Leuven Acco, 1990.
– **Peterson J.,** Technical Mathematics, Albany, Delmar Publishers, 1994.
– **Schoenfeld A.H.,** Mathematical problem solving, San Diego, Academic press, 1985.
– **Stewart J.,** Precalculus, Pacific Grove, Brooks/Cole, 1998.
– **Waner S., Costenoble S.,** Calculus applied to the real world, New York, Harper Collins, 1996.
– **Comap**, Principles and Practice of Mathematics, Springer, 1997.

4 BIJKOMENDE SUGGESTIES

WISKUNDE MET WETENSCHAPPEN

Cartografie

Er zijn verschillende manieren om van een bolvormig oppervlak een vlakke kaart te maken, vanuit verschillende eisen, bijv. afstanden op de kaart moeten evenredig zijn met de werkelijke afstanden, hoeken op de kaart moeten gelijk zijn aan de werkelijke hoeken, de kortste afstand tussen twee punten moet een rechte lijn zijn. Studie van de mogelijkheden, met een strengere wiskundige aanpak.

Opmeten en in kaart brengen van een terrein

Voor een terrein wordt een nieuwe bestemming voorzien. Het moet opgemeten worden en precies in kaart gebracht worden (beplanting, weg, beschadiging). Hoekmeting, afstandsmeting, triangulatie voor tussenafstanden en voor controle. De bodem kan deels onderzocht worden op kwaliteit en/of verontreiniging.

Ontwikkeling van populaties

Verzamelen en in kaart brengen van bevolkingsgegevens. Wiskundige voorstellingstechnieken.

Voorbeelden

Groei bevolkingsaantallen
Demografische modellen en de wiskunde die daarbij gebruikt wordt.
Aan de ene kant maken we ons zorgen over hoe snel de wereldbevolking groeit. Aan de andere kant wordt geklaagd over een tekort aan mensen. Men maakt zich bijvoorbeeld ook zorgen over de betaalbaarheid van pensioenen, sociale voorzieningen … Op basis van allerlei wiskundige modellen worden bevolkingsvoorspellingen gedaan. Dezelfde modellen, die ook steeds maar waarschuwen over hoe snel de aarde overbevolkt zal raken.

Evolutie van een populatie
Bijv. met gebruik van Lesliematrices.

De tijdmeting door de eeuwen heen

Van het ontdekken van de zonnecyclus, het gebruik van tijd- en hoekmaten, het ontwikkelen van instrumenten om de tijd te meten en af te lezen (bijv. zonnewijzers), tot onze gesofisticeerde digitale klokken.

WISKUNDE MET ECONOMIE EN WETENSCHAPPEN

Dataverwerking en interpretatie

In heel wat situaties van enquêtes en bevragingen kan wiskunde het middel leveren voor statistische verwerking en interpretaties.

Voorbeelden

Opstellen en verwerking van een schoolenquête onder de leerlingen

Overgewicht
Een maatstaf voor overgewicht is de BMI (Body Mass Index). De leerlingen kunnen een formule opstellen en achtergronden (bijv. consequenties) zoeken. Ze kunnen een onderzoek doen bij een bepaalde doelgroep.

Beleggen met wiskunde

Beschrijving van de situatie op een aandelenbeurs. Schommelen van koersen, de graadmeter van een beursdag (beursindex). Een eigen beleggingsportefeuille maken en opvolgen.

Huren of kopen

Wie een woning zoekt kan een huis (of appartement) huren of kopen. Wat is op verschillende termijnen het voordeligst. Welke aspecten spelen een rol? (Bijv. belastingvoordeel, onderhoud, soorten hypotheken, bijkomend lenen voor herstelling, inrichting …, huurstijging.) Een vergelijking maken voor verschillende termijnen.

Hypotheek gratis door inflatie?

Hypotheken lijken bijna gratis door de combinatie van oplopende inflatie met de hypotheekrenteaftrek. De gemiddelde hypotheekrente van dit moment; de inflatie van dit moment; het gemiddelde belastingtarief waarbij hypotheekrente wordt afgetrokken.

Kortste wegennet

Om kosten en het milieu te sparen is het relevant om bij een verplaatsing langs een aantal met elkaar te verbinden plaatsen een weg te volgen met een minimum aan totaal aantal kilometers. In schema brengen van de verbindingen met grafen.

WISKUNDE MET TAAL

Het opbouwen van wiskunde- en wetenschapstaal, die veel strikter is dan omgangstaal, (met o.m. het universele karakter van een symbolentaal; logische samenhang; gebruik van taaltechnieken in wiskunde en wetenschappen, bijv. signaalwoorden, kernwoorden, synthese -en structureringstechnieken).

WISKUNDE ALS BASIS VAN STATISTISCHE VERWERKING EN KANSBEREKENING

Correlatie

Verbanden tussen gemeten grootheden worden kwantitatief uitgedrukt met behulp van correlatie- en regressierekening. Het is een krachtige methodiek die echter bij een fatsoenlijk aantal meetgegevens een rekenkracht vergt. Daarvoor wordt nu de computer ingeschakeld die over veel meer benaderingsmethoden beschikt. De gegevens van een gekwantificeerde enquête kunnen verwerkt worden.

Kiezen en wiskunde

– Blijkbaar zijn er verschillende kiessystemen (ook wel: kiesstelsels) mogelijk, elk met z'n eigen voor- en nadelen. Is er een kiesstelsel te bedenken of bestaat er al een kiesstelsel dat een zo eerlijke mogelijke uitslag oplevert? Met eerlijk wordt dan bedoeld een uitslag waar een zo'n groot mogelijk percentage van de stemmers tevreden mee is.
– Verwerking van de kiesgegevens en vergelijking met de voorspellingen in kranten en televisie. De werking van de voorspellingsmechanismen bij de zogenaamde 'exitpolls'.

WISKUNDE EN MILIEUPROBLEMATIEK

Wegwerpmaatschappij

Als we de reclame volgen moeten we geregeld een aantal dingen in onze omgeving vernieuwen en de oude wegwerpen. Maar is dat goed voor het milieu? Aspecten als milieuvriendelijkheid en gebruiksgemak kunnen afgewogen worden tegen kostprijs met inbegrip van de afvalverwerking of stokkering.

Economische of ecologische verpakking

Vele artikelen zoals groente, frisdank, verf en tennisballen worden verpakt in blik. De fabrikant wil de kosten zo laag mogelijk houden. Daarom moet worden uitgezocht welke invloed de afmetingen van de blikken op de kosten hebben. Minimalisering van de kosten (in functie van oppervlakte, lasnaden …).

Verpakking, glas, pet, blik …

Statistische verwerking van de gegevens over afvalverwerking.

Milieu in huis

Energieverbruik wordt duurder, maar toch blijft de consument meer energie verbruiken. Ondanks een aantal maatregelen neemt het verbruik van energie niet af, want onze apparaten zijn zuiniger en gebruiksvriendelijker geworden en dat veroorzaakt precies een toename van het gebruik ervan.
Onderzoek van het energieverbruik (bijv. gemiddelde verbruik; verbruik van apparaten), eventueel maatregelen om ze terug te dringen (spaarlampen, ecotaks …).

Windenergie

Al geruime tijd probeert men energie op te wekken met windkracht. Hoe groter de wieken van de windmolen, hoe groter het vermogen dat kan worden opgewekt. Onderzoek van deze verbanden en het opstellen van een formule hiervoor.
Vergelijking van verschillende soorten energie op kost, milieueffect ….

Files

Files ontstaan als het te druk is op de wegen (vooral tijdens de ochtend- en avondspits). Je krijgt namelijk een file als in een min of meer constante stroom auto's met ongeveer dezelfde snelheid op een bepaalde plaats wordt geremd. Zo'n file is niet nodig als iedereen namelijk de juiste doorstroomsnelheid kiest. Een algebraïsch model opstellen voor het fileprobleem.

7 EVALUATIE

Het is niet moeilijk in te zien dat leerprocessen beter (vlotter) zullen verlopen als de leerling regelmatig informatie krijgt over zijn vorderingen en als de leerkracht een goed inzicht heeft in de aard van de eventueel optredende problemen. Evaluatie is daartoe een uitgelezen middel en vormt aldus een belangrijk onderdeel van het onderwijsleerproces.

SCHOOLCULTUUR

De gehanteerde terminologie in verband met evaluatie, de verschillende opvattingen over de functie, de organisatievorm, de rapportering, ... zijn echter *niet eensluidend*. Deze verscheidenheid wordt geïllustreerd door de verschillende betekenissen die bijvoorbeeld gegeven worden aan termen als toets, examen, permanente evaluatie, formatieve evaluatie, dagelijks werk, enz. Daarom is evaluatie van leerlingen en wat ermee gebeurt vaak verbonden met *een schooleigen cultuur*. Evaluatie van wiskunde moet hierin uiteraard passen, omdat evaluatie naar de leerlingen toe over de vakken en de jaren heen wel een zekere eenvormigheid moet vertonen.

FUNCTIES VAN EVALUEREN

Evalueren is het *waarderen* van iets of iemand. De term evalueren wordt in het onderwijs gebruikt voor waardering als deze niet 'uit de lucht komt vallen', maar opgenomen is in de rij meten, waarderen, beslissen. Evaluaties gebeuren dus intentioneel. Evaluaties zijn niet vrijblijvend, omdat ze leiden tot een bepaalde *beslissing*. De functies van evalueren zijn verbonden met de aard van de beslissingssituaties.

Evaluatie kan de functie hebben van *resultaatsbeoordeling*. Over een periode van langere duur wordt het rendement van het onderwijsleerproces vastgesteld. Meestal gebeurt dit aan de hand van examens of summatieve toetsen. Deze vorm is allicht het meest vertrouwd.

Evaluatie kan de functie hebben van *plaatsing, oriëntering en selectie*. Evaluatiegegevens worden bijvoorbeeld gebruikt om leerlingengroepen samen te stellen, om differentiatie mogelijk te maken, om leerlingen te oriënteren naar de meest geschikte onderwijsvorm en studierichting, of toe te laten tot een bepaalde studierichting.

Evaluatie kan de functie van *diagnose* krijgen. Diagnose kan elke activiteit van de leerkracht zijn die erop gericht is een beeld te krijgen van de vorderingen van de leerlingen. Op de vaststelling van de aard en de oorzaak van de leermoeilijkheden kan dan een plan volgen om dit tekort te remediëren of bij te sturen.

In dezelfde zin kan een diagnose opgemaakt worden van de vorderingen van de leerlingen in verband met *redeneer- en probleemoplossende vaardigheden*. Vanuit een goed inzicht in de mogelijkheden en feitelijke situatie kunnen de leerlingen beter begeleid worden in hun leerproces.

Evaluatie kan de functie krijgen van *sturing van het onderwijsleerproces*. Er wordt informatie verzameld over de vorderingen van de leerlingen om het leerproces beter te organiseren. Dit soort evaluatie gebeurt voortdurend tijdens het leerproces. De leerling krijgt voortdurend informatie over zijn vorderingen, de leerkracht krijgt voortdurend informatie over het verloop van het leerproces.

Een bijzondere plaats wordt gegeven aan het evalueren van de *beginsituatie*. Dit kan leiden tot een georganiseerde herhaling met een gedifferentieerde aanpak. Het is zinvol gerichte herhalings- of remediëringspakketten te voorzien, die door de leerlingen zelfstandig worden verwerkt.

Evaluatie is medebepalend voor de 'beslissing' op de scharniermomenten van het lesverloop. De verkregen informatie kan door de leerkracht gebruikt worden om zijn didactisch handelen te beoordelen en te sturen. Bijsturing kan betrekking hebben op een aantal uiteenlopende factoren, bijvoorbeeld de leerinhoud kan te moeilijk zijn, de doelstellingen te hoog gegrepen, het tempo te hoog (of te laag), het beginniveau kan verkeerd ingeschat zijn, er kunnen problemen zijn van motivationele aard, ... De leerkracht kan hierop inspelen door bijvoorbeeld een bijkomend voorbeeld te geven, de formulering van een definitie of een eigenschap te hernemen, de voorziene oefeningen te beperken of aan te vullen. Sturing kan betekenen dat de leerkracht *gedifferentieerd* ingaat op de mogelijkheden van de leerlingen met aangepast oefeningenmateriaal, met remediëring, met ondersteuning van het leerproces door het leren van wiskunde te bespreken. Dergelijke sturing kan ook positief onderscheidend werken, bijv. door aan bepaalde leerlingen optimale ontwikkelingskansen te bieden door hen te confronteren met meer open problemen, meer eigen tips over hun oplossingsproces, gerichte aanwijzingen over heuristische methoden, ….

Evaluatie in de brede betekenis heeft zowel betrekking op het beoordelen van de leerlingen en de beslissingen die hieraan verbonden worden, als op de informatie over het verloop van het onderwijsleerproces zowel voor de leerling als voor de leerkracht. Ze kan betrekking hebben op een sanctionering met ingrijpende gevolgen of op een meer vrijblijvende begeleiding.

VAN EVALUATIE NAAR ZELFEVALUATIE

In de informatieve functie maakt evaluatie integrerend deel uit van het onderwijsleerproces. Belangrijk is alleszins dat de leerling *zelf informatie krijgt over zijn leren*, zowel wat betreft het proces als het eindresultaat. Zo zal in het leerproces van probleemoplossende vaardigheden niet slechts de beoordeling van het eindresultaat belangrijk zijn. De informatie over zijn wijze van aanpakken en de vorderingen daarin geeft de leerling inzicht in de nodige bijsturing.

Procesevaluatie is een aangewezen weg om leerlingen te leren vragen stellen bij de leerinhouden. In die zin is het een goede ondersteuning bij het verwerven van leervaardigheden. Procesevaluatie is een aangewezen weg om de leerling bewust te maken van de eigen mogelijkheden. In die zin en in het kader van het levenslang leren (waarbij niet alle vorderingen ‘getoetst’ zullen worden) kan vertrouwd worden met procesevaluatie de groei naar zelfevaluatie bevorderen. Een mogelijke ondersteuning wordt hier geboden door opdrachten waarbij de leerlingen zelf zinvol leren gebruik maken van een correctie- of een antwoordsleutel.

Een onderzoeksopdracht zal leiden tot een vorm van zelfstandig werken. Hierbij moeten de leerlingen oog hebben voor zelfevaluatie, vanuit het goed benutten van hun onderzoeks- en probleemoplossende vaardigheden doorheen heel dit proces. Dit is zeker een aanleiding om met behulp van een reflectieve aanpak terug te kijken op hun werk.

Het betrekken van leerlingen bij de evaluatie of fasen ervan , (bijv. co-evalueren, m.a.w. de leerling neemt deel aan; peerevaluatie , m.a.w. onderlinge evaluatie in een groep gelijken), het bespreken van evaluatiegegevens en het formuleren van werkpunten vanuit een gesprek kan de evaluatiegevoeligheid merkelijk aanscherpen. Het afsluiten van een leerproces, een werkopdracht, .. met een evaluerend terugkijken laat leerlingen toe zelf elementen van evaluatie in te brengen. Een dergelijke bespreking binnen een groepje verantwoordelijk voor een taak, bijvoorbeeld op basis van een observatielijst, geeft hen meer inzicht in het proces zelf, maar uiteraard ook in geven, krijgen, nuanceren en aanvaarden van feedback.

EVALUATIE VAN KENNIS EN INZICHT

De essentie van wiskundekennis is de kennis van en het *inzicht in begrippen en eigenschappen*. Dit houdt in: het kunnen geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden, het herkennen van het begrip of eigenschap in contextsituaties, het kennen van de betekenis ervan, het kennen van een formulering van een definitie of de eigenschap, het kunnen toepassen ervan in diverse contextsituaties.

Evaluatie van het inzicht in begrippen en eigenschappen zou de verschillende aspecten moeten onderzoeken. Het kennen van een eigenschap impliceert niet vanzelfsprekend dat ze kan *toegepast* worden en omgekeerd. Dit impliceert dat ook in de evaluatie *in de loop van het onderwijsleerproces* meer aandacht moet besteed worden aan deze aspecten, zoals bijvoorbeeld het begrijpen, het kunnen geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden, de formulering, het toepassen van de eigenschap.

Evaluatie zou er toe moeten leiden, dat de leerkracht nog tijdens het onderwijsleerproces informatie verwerft over de misverstanden over begrippen, eigenschappen en methoden bij de leerlingen. Ze kunnen dan sneller bijgestuurd worden. Voor een leerling is het belangrijk te weten op welk niveau een begrip moet gekend zijn en waar hij zich in het leerproces bevindt. Zo kan hij de aangepaste leermethode kiezen.

Van een aantal begrippen en eigenschappen kan gesteld worden dat ze tot de *parate kennis* van de leerlingen moeten behoren. Deze parate kennis moet dan ook als paraat getoetst worden en dus geregeld in de loop van het jaar. Kennis waarvan aanvaard is dat ze niet meteen paraat moet beheerst worden, maar bijvoorbeeld wel is opgenomen in een vademecum, kan getoetst worden met gebruik van het vademecum. Voorwaarde is natuurlijk dat leerlingen er ook buiten de evaluatiemomenten functioneel mee leren werken.

Over het algemeen wordt aangenomen dat in het geheel van de toetsing een goede spreiding van de leerinhouden over de verschillende beheersingsniveaus (kennis, inzicht en toepassing) wenselijk is.

EVALUATIE VAN VAARDIGHEDEN

In het leerplan wordt het verwerven van vaardigheden benadrukt. Ook op de evaluatie moet dit zijn weerslag hebben. Daarbij moet een vaardigheid als vaardigheid geëvalueerd worden. Het is zinvol een zogenaamde vaardigheidsanalyse te maken, d.w.z. een overzichtelijke lijst te maken van welke stappen leerlingen kunnen (moeten) zetten om de vaardigheid te verwerven of aan te wenden. Deze lijst wordt dan gebruikt om leerlingen in het leerproces (stapsgewijze) te observeren. Vanuit dergelijke feedback kan de leerling zich dan beter bijsturen.

De leerling moet wiskundige procedures, methoden en technieken behoorlijk en efficiënt kunnen uitvoeren. Dit betekent dat ook de *procedure* (bijvoorbeeld de verschillende stappen) moet geëvalueerd worden en niet slechts het eindresultaat. Hierin is ook ruimte voor evaluatie van de zelfcontrole van de leerling en voor het gecontroleerd uitvoeren (bijv. schatten, grootteorde, elementaire fouten vermijdend). Ook hier geeft de terugkoppeling die leerlingen krijgen over de uitvoering tijdens het leerproces zelf, hen sneller inzicht in hun fouten.

Voor de toetsing van vaardigheden kan overwogen worden een in de tijd gespreide toetsing uit te voeren. Dit betekent dat het bezitten van een vaardigheid niet afhankelijk gemaakt wordt van het bezit ervan op dat ene examenmoment.

In de evaluatie van vaardigheden neemt die van *probleemoplossende vaardigheden* een bijzondere plaats in. Aandacht voor het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden leidt tot het aanbieden van meer open gestelde problemen, meer aan (soms nieuwe) situaties gebonden vraagstukken, enz. Het oplossen van dergelijke problemen is een complex proces. Meer nog dan elders is feedback zowel *over het proces* als over het eindproduct belangrijk. De leerling zou informatie moeten krijgen over zijn kennis, en de vaardigheid waarmee hij die kan hanteren, over de wijze van vraagstelling, het gebruik van gegeven informatie, het formuleren van vermoedens, over de vaardigheid waarmee heuristische methoden gehanteerd worden, over de sturing van zijn oplossingsproces en de wijze van interpreteren en verifiëren van resultaten. Evaluatie van probleemoplossende vaardigheden heeft maar zin als *tijdens het proces* de wijze van werken van de leerling *systematisch, weloverwogen en voortdurend wordt opgevolgd*. Evaluatie kan het vertrouwen van de leerling in zijn mogelijkheden sterk beïnvloeden.
Maar ook de leerkracht krijgt belangrijke feedback, bijvoorbeeld over welke problemen uitdagend zijn, welke instructief, welke interesse wekken, welke niet succesvol zijn.

Naast probleemoplossende vaardigheden wordt aandacht besteed aan het ontwikkelen van reflectieve vaardigheden bij de leerlingen, d.w.z. het leren terug kijken op een proces dat ‘afgelopen’ is. En daarvan de leerkansen concretiseren. Het bewuster omgaan met dit leren resulteert in een netto effect bij een volgende opdracht. Voorbeelden van reflectieve vragen op het uitvoeren van een opdracht:

- Wat was de opdracht, heb ik het doel bereikt?
- Hoe is het proces concreet verlopen? De voorbereiding, de planning, de uitvoering, het besluit/antwoord?
- Welke concrete problemen deden zich voor? Hoe werd hiervoor een oplossing gevonden, uitgewerkt?
- Wat leert me dit voor de aanpak van een volgende opdracht?

EVALUATIE VAN ATTITUDES

In dit leerplan wordt gepleit voor het ontwikkelen van attitudes. Nog meer dan bij vaardigheden moet de leerkracht bij de evaluatie ervan oog hebben voor de individuele inspanning die de leerling doet om die doelen te bereiken. Enige omzichtigheid is geboden, want niet bij alle leerlingen is de spontane uitingsvorm de juiste weerspiegeling van de inzet. En sommige leerlingen hebben van nature uit meer tijd en inzet nodig om eenzelfde resultaat te bereiken.

Een hulpmiddel het evalueren van attitudes is een *observatielijst*, waarin een *aantal concrete gedragingen* opgesomd staan. Daarbij kan men een aantal niveaus van verwachting aangeven die beantwoorden aan een verbale uitdrukking voor de ‘beoordeling’. Zo komt men tot een categoriale beoordeling van attitudes, die de basis kunnen zijn voor feedbackgesprek met de leerling.

Zeker voor attitudes geldt dat terugkoppeling tijdens het leerproces de meest effectieve weg van bijsturen is. Aanmoediging zal meer vermogen dan neerbuigend afkeuren. Een verbale waardering kan naast een 'resultaat' voor de inhoudelijke toetsing een blijk van waardering zijn voor de inzet van de leerling.

ICT-HULPMIDDELEN

In de leerplannen is het gebruik van ICT-hulpmiddelen opgenomen, zowel voor illustratie en demonstratie van begrippen en eigenschappen, als voor het effectieve gebruik ervan door de leerlingen bij het uitvoeren van berekeningen, het onderzoeken van eigenschappen en het verwerken van informatie.

De evaluatie van onderdelen waarbij in de ontwikkelingsfase en de verwerkingsfase een rekenmachine, een grafische rekenmachine of een computer gebruikt werd, zal hieraan aangepast zijn. Dat betekent dat bij de toetsing hetzelfde materiaal ter beschikking van de leerlingen moet staan.

Het spontane en accurate gebruik van ICT wordt geëvalueerd als onderdeel van de nagestreefde vaardigheid.
Voorbeelden

- Het heeft geen zin leerlingen in de verwerkingsfase ICT te laten gebruiken en op de evaluatiemomenten manuele automatismen te verwachten.
- Bij observatie in de klas zal men leerlingen wijzen op inefficiënt gebruik.
- Op dezelfde wijze moet gewezen worden op inadequaat gebruik als leerlingen bijvoorbeeld tussenresultaten noteren, eventueel zelf terug invoeren, al of niet na afronding, wat merkwaardige rekenverschillen kan veroorzaken.
- Als de doelstelling het interpreteren van statistische gegevens is, zal men geen (evaluatie)tijd besteden aan het turven ervan, maar wel statistische software gebruiken.
- Met meetkundige software kan men een vermoeden laten onderzoeken, door de techniek van het verveelvoudigen (cf. het slepen van bepaalde punten). In dit geval is de computer echter een veredeld tekenblad, waarop de redenering wordt uitgevoerd. Ook voorheen moesten de leerlingen een tekening maken en maakte die deel uit van de evaluatie. Met het gebruik van een figuur op een machine kan dat dus evenzeer.

Bij dit soort evaluatie past wellicht een permanente evaluatie tijdens het leerproces zelf, dan wel de vaardigheid te testen met een reeks gekunstelde oefeningen.

In de observatie moet een onderscheid gemaakt worden tussen enerzijds de vaardigheid in het gebruik van het toestel (bijv. de vlotheid bij het intikken bij computergebruik) en anderzijds het inzicht in het gebruik van de toestelgebonden wiskundige werkwijze.

Bedieningsvaardigheid op zich kan niet het enige doel zijn van wiskundelessen. Binnen het ‘vak wiskunde’ mag bijvoorbeeld klaviervaardigheid geen hypotheek leggen op het gebruik van de computer bij berekeningen of dataverwerking. Voor wiskunde kan een relatief vlotte omgang met de machine volstaan. En die staat in functie van het wiskundige leerproces. Uiteraard zal een veelvuldig gebruik in de wiskundelessen bijdragen tot de algemene vlotheid. Er is geen principieel bezwaar tegen de beschikbaarheid van de handleiding van het toestel.

De evaluatie van deze vaardigheid moet vooral gezien worden als aanmoedigend met het oog op een vlotter verlopen van het wiskundige proces. Zo moet een evaluatie gespreid over het jaar een beeld geven van de vorderingen van de leerlingen en van hun effectieve vooruitgang. Dit impliceert ook dat de leerlingen voldoende oefenkansen krijgen. Het vlotte gebruik van een machine of software vraagt dus meer dan een incidenteel gebruik in de les. Dit vraagt van de school en de leerkracht een inspanning voor de leerlingen die niet zelf over het aangewezen materiaal kunnen beschikken.

Als men het gebruik van bepaalde werkwijzen met computer of rekenmachine als specifieke doelstelling heeft nagestreefd (bijv. gebruik bepaalde software, bepaalde functietoetsen), zal dit uiteraard deel uit maken van de evaluatie.

Overleg in de vakgroep is nodig om vertrouwd te worden met deze voor wiskunde ‘nieuwe’ evaluatiesituaties. Afspraken moeten gemaakt worden over de aangewezen evaluatievorm, de wijze van werken, de gestelde eisen, … en de afstemming tussen de leerkrachten onderling. Zo kan men afspreken het gebruik van ICT niet op het examen zelf te toetsen, maar bijvoorbeeld via de jaartoetsing, omdat ‘permanente’ of ‘gespreide’ evaluatie dan meer mogelijk wordt. Leerlingen moeten alleszins een duidelijk beeld krijgen van wat te verwachten is bij de evaluatie.

ORGANISATIE VAN DE TOETSING

In de organisatie van de toetsen bestaat een ruime verscheidenheid tussen de scholen. Hoe die ook gebeurt, belangrijk is dat ze aansluit bij de onderwijspraktijk. Dit wil zeggen dat ze moet aansluiten bij de doelstellingen en de verwerkingsniveaus die tijdens het leerproces en de verwerkingsopdrachten werden nagestreefd.
Wat betreft de criteria die aan toetsen als meetinstrument moeten worden opgelegd, zoals validiteit (meet de toets wat beoogd wordt te meten?) en betrouwbaarheid (is het resultaat een zo adequaat mogelijke weerspiegeling van het bereiken van de doelstellingen door de leerling?), wordt verwezen naar de geëigende literatuur.
Verder wordt aangenomen dat de evaluatie zich niet mag beperken tot enkele momenten. Geregeld toetsen (zowel mondeling als schriftelijk) laat toe adequaat in te spelen op de problemen die zich stellen. Wel mag verwacht worden dat leerlingen ook al grotere leergehelen leren beheersen, bijv. voor een ruimere summatieve toets.

8 OVEREENKOMST EINDTERMEN EN DOELSTELLINGEN

8.1 Eindtermen wiskunde ASO derde graad

1 ALGEMENE EINDTERMEN

De leerlingen kunnen

1 wiskundetaal begrijpen en gebruiken.
2 wiskundige informatie analyseren, schematiseren en structureren.
3 eenvoudig mathematiseerbare problemen ontleden (onderscheid maken tussen gegevens en gevraagde, de relevantie van de gegevens nagaan en verbanden leggen ertussen) en vertalen naar een passende wiskundige context.
4 wiskundige problemen planmatig aanpakken (door eventueel hiërarchisch op te splitsen in deelproblemen).
5 bij het oplossen van wiskundige problemen kritisch reflecteren over het oplossingsproces en het eindresultaat.
6 voorbeelden geven van reële problemen die met behulp van wiskunde kunnen worden opgelost.
7 bij het oplossen van wiskundige problemen functioneel gebruik maken van ICT.
8 voorbeelden geven van de rol van de wiskunde in de kunst.
9 kennis, inzicht en vaardigheden die ze verwerven in wiskunde bij het verkennen, vertolken en verklaren van problemen uit de realiteit gebruiken.
10 * kunnen informatie inwinnen over het aandeel van wiskunde in een vervolgopleiding van hun voorkeur en in hun voorbereiding erop.

De leerlingen

11 * leggen een zin voor nauwkeurigheid aan de dag bij het hanteren en het toepassen van wiskunde.
12 * ontwikkelen zelfregulatie met betrekking tot het verwerven en verwerken van wiskundige informatie en het oplossen van problemen.
13 * zijn gericht op samenwerking om de eigen mogelijkheden te vergroten.

2 REËLE FUNCTIES

De leerlingen

14 lezen op een grafiek af:
- eventuele symmetrieën,
- het stijgen, dalen of constant zijn,
- het teken,
- de eventuele nulwaarden,
- de eventuele extrema.

De leerlingen kunnen

15 bij veeltermfuncties
- de afgeleide gebruiken als maat voor de ogenblikkelijke verandering
- met behulp van een intuïtief begrip van limiet het verband leggen tussen:
  - het begrip afgeleide,
  - het begrip differentiequotiënt,

- de richting van de raaklijn aan de grafiek.

16 de afgeleide berekenen van de functies $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ en de bekomen uitdrukking veralgemenen naar functies $f(x) = x^n$ waarbij n een natuurlijk getal is.

17 de som- en de veelvoudregel toepassen om de afgeleide functie te bepalen van een veeltermfunctie.

18 bij veeltermfuncties de afgeleide functie gebruiken voor het bestuderen van het veranderingsgedrag en voor het opzoeken of verifiëren van extreme waarden en het verband leggen tussen de afgeleide functie en bijzonderheden van de grafiek.

19 het begrip afgeleide herkennen in situaties buiten de wiskunde.

20 bij een eenvoudig vraagstuk dat te herleiden is tot het bepalen van extrema van een veeltermfunctie, een veranderlijke kiezen, het functievoorschrift opstellen en de extrema bepalen.

21 de uitdrukking a^b, met $a>0$ en b rationaal, uitleggen.

22 de grafiek tekenen van de functie $f(x) = a^x$ (zonodig met behulp van ICT), en domein, bereik, bijzondere waarden, stijgen/dalen en asymptotisch gedrag aflezen.

23 voor geschikte domeinen een verband leggen tussen de functies $f(x) = x^2$ en $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^3$ en $f(x)= \sqrt[3]{x}$ en naar analogie tussen de functies $f(x) = x^n$ en $f(x) = \sqrt[n]{x}$ en tussen de functies $f(x) = a^x$ en $f(x) = {}^a\log(x)$.

24 uit de betrekking $a^b = c$ de derde veranderlijke berekenen als de twee andere gegeven zijn (eventueel met behulp van ICT).

25 lineaire en exponentiële groeiprocessen onderzoeken en bij exponentiële groei concrete problemen oplossen waarbij berekeningen dienen uitgevoerd te worden met betrekking tot beginwaarde, groeifactor en groeipercentage.

26 het verband leggen tussen graden en radialen.

27 de grafiek tekenen van de functie $f(x) = \sin x$ op basis van de goniometrische cirkel.

28 voor de functie $f(x) = \sin x$, domein, bereik, periodiciteit, stijgen/dalen en extrema aflezen van de grafiek.

29 de grafieken opbouwen van de functies $f(x) = a \sin(bx+c)$ en daarop a, b en c interpreteren.

30 vergelijkingen van de vorm $\sin x = k$ grafisch oplossen.

31 bij het oplossen van een probleem, waarbij gebruik gemaakt wordt van bestudeerde functionele verbanden, een functievoorschrift, een vergelijking of een ongelijkheid opstellen.

32 tabellen en grafieken bij bestudeerde functies als hulpmiddel gebruiken om functievoorschriften, vergelijkingen en ongelijkheden te interpreteren.

3 STATISTIEK

De leerlingen kunnen

33 in betekenisvolle situaties, gebruik maken van een normale verdeling als continu model bij data met een klokvormige frequentieverdeling en het gemiddelde en de standaardafwijking van de gegeven data gebruiken als schatting voor het gemiddelde en de standaardafwijking van deze normale verdeling.

34 het gemiddelde en de standaardafwijking van een normale verdeling grafisch interpreteren.

35 grafisch het verband leggen tussen een normale verdeling en de standaardnormale verdeling.

36 bij een normale verdeling de relatieve frequentie interpreteren van een verzameling gegevens met waarden tussen twee gegeven grenzen, met waarden groter dan een gegeven grens of met waarden kleiner dan een gegeven grens als de oppervlakte van een gepast gebied.

* Met het oog op de controle door de inspectie werden de attitudes met een * aangeduid in de kantlijn.

8.2 Overeenkomst

Et	leerplan c

1	V3, V4, A11
2	V3, V4, V5, A12
3	V5, A11
4	V5, A11, A13
5	V5, A12
6	A15
7	V1, V2, V4, V5, A11
8	V5, A15
9	V5, A15
10	A16
11	A11
12	A13
13	A14
14	F1, F2
15	F7, F8, F9
16	F10
17	11
18	F15

19	F9
20	F18
21	F23
22	F26
23	F4, F27, F30, F31
24	F24, F26, F28
25	F24, F25, F29
26	F32
27	F35
28	F36
29	F38
30	F37
31	F1, F2, F8
32	F1, F6, F8
33	S3
34	S4
35	S4
36	S5

9 BIBLIOGRAFIE

BOEKEN

ASPEELE, M.-J., DELAGRANGE, N., DE ROO, F., *Wiskundedidactiek, een inleiding*. Leuven, Acco, 1987.
BARNETT, R.A., ZIEGLER, M.R., *College Algebra 4th edition.* New York, McGraw-Hill, 1989.
BUIJS, A., *Statistiek om mee te werken.* Leiden, Stenfort Kroese, 1989.
BURTON, D., *The history of mathematics. An introduction*. Boston, Allyn and Bacon Inc., 1985.
CENTRE DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'a dix-huit ans*. Nivelles, CREM, 1995.
DE BOCK, D., e.a., *Afgeleiden en integralen*, Leuven, Acco, 1994
DE SMIT, B., TOP, J. , *Speeltuin van de wiskunde*, Veen Magazines, Natuurwetenschap en Techniek, 2003
DOCHY, F., SCHELFHOUT, W., JANSSENS, S., *Anders evalueren*, Heverlee, Lannoo-campus, 2003.
DOUMA, S.W., *Lineaire programmering als hulpmiddel bij besluitvorming.* Academic Service, 1982
EBBENS, S., ETTEKOVEN, S, VAN ROOIJEN, J., *Effectief leren in de les*, Groningen, Wolters-Noordhoff, 1996
ENGEL A., *Problem-Solving Strategies*, New York, Springer-Verlag, 1998
FENTEM, R., *Statistics.* London, Collins Educational, 1996.
FREUDENTHAL, H., *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Reidel Publ. Comp., 1973.
GOODMAN, A., HIRSCH, L., *Precalculus.* Englewood Cliffs - New Yersey, Prentice-Hall, 1994.
GRAVEMEIJER, K.P.E., *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, CD Press, 1994.
HERR, T., JOHNSON, K., *Problem solving strategies.* Berkeley, Key Curriculum Press, 1994.
HIRSCH, C.R., NORTON, M.A., e.a., *Geometry.* Glanview, Scott Foresman and Company, 1984.
HUFF, D., *How to lie with statistics*. London, Norton & Company, 1954.
JACOBS, H., *Mathematics a human endeavor.* New York, Freeman, 1982.
JOHSONBAUGH, R., Discrete mathematics, London, Prentice Hall, 1997
KAISER, H., NÖBAUER, W., *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht*. München, Freytag, 1984.
KLINGEN, H., OOT, A., *Computereinsatz im Unterricht, der pädagogische Hintergrund.* Stuttgart, Metzler Verlag, 1986.
KRABBENDAM, H., *Informatieverwerking en statistiek voor de lerarenopleiding.* Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 1994.
LAFARGUE-SORT, J., MARQUIS, B., *Les méthodiques pour résoudre des problèmes*. Paris, Hatier, 1992.
LAGERWERF, B., *Wiskundeonderwijs in de basisvorming*. Groningen, Wolters-Noordhoff, 1994.
LEHMANN, E., *Mathematik-Unterricht mit Computer-Einsatz.* Bonn, Dümmler, 1988.
LOWYCK, J., VERLOOP, N., e.a., *Onderwijskunde*. Leuven, Wolters, 1995.
MANKIEWICZ, R., *Het verhaal van de wiskunde.* Abcoude, Uitgeverij Uniepers, 2000.
MOORE, D. , McCABE, G. *, Statistiek in de praktijk*, *Theorieboek*, Academic Service, Den Haag, 2001
MOORE, D. , McCABE, G. *, Statistiek in de praktijk, Opgavenboek,* Academic Service, Den Haag, 2001
NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, *Curriculum and Evaluation Standards for school mathematics* . Reston, Virginia USA, NCTM, 1989.
OLDKNOW, R., TAYLOR, A., *Teaching mathematics with ICT,* London, Continuum, 2000.
POLYA, G., *How to solve it*. Princeton, University Press, 1973.
POLYA, G., *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving.* New York, Willey, 1981.
POSAMENTIER, A.S., STEPELMAN, J., *Teaching secondary school mathematics*. New York, Merill Publishing Company, 1990.
ROELS, J., DE BOCK, D., e.a., *Wiskunde vanuit toepassingen.* Leuven, Aggregatie wiskunde - K.U.Leuven, 1990.
SCHOENFELD, A. H., *Mathematical problem solving*. London, Academic Press, 1985.
STEUR, H., *Levende wiskunde. Toepassingen geordend naar wiskundig onderwerp*. Culemborg, Educaboek, Tjeenk-Willink, 1980.
STEWART, J., REDLIN, L., e.a., *Precalculus, 3th edition.* Pacific Grove, Brooks/Cole Publishing Company, 1998.
STRUIK, D.J., *Geschiedenis van de wiskunde*. Utrecht, Het Spectrum, 1990.
THAELS, K., e.a., *Van ruimtelijk inzicht naar ruimtemeetkunde.* Deurne, Wolters Plantyn, 2001
VAN DER BLIJ, F., *Wiskunde met verve.* Groningen, Wolters-Noordhoff, 2000

VAN DORMOLEN, J., *Aandachtspunten*. Utrecht, Bohn, Scheltema en Holkema, 1982.
VAN DORMOLEN, J., *Didactiek van de wiskunde*. Utrecht, Bohn, Scheltema en Holkema, 1976.
VAN LOOY, L., e.a. *Zelfstandig en coöperatief leren*, Brussel, VUBPress, 2002.
VAN PETEGEM, P., VANHOOF, J., *Evaluatie op de testbank*, Mechelen, Wolters-Plantyn, 2002.
VON HARTEN, G., STEINBRING, H., *Stochastik in der Sekundarstufe I.* Köln, Aulis Verlag, 1984.
WANER, S., COSTENOBLE, S.R., *Calculus applied to the real world,* New York, Harper Collins, 1996.
ZEBRA-reeks, Utrecht, Epsilon Uitgaven, 2000-2004.

TIJDSCHRIFTEN

UITWISKELING. Driemaandelijks tijdschrift, Groenstraat 18, 3221 Nieuwrode.
WISKUNDE EN ONDERWIJS. Driemaandelijks tijdschrift van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraren (VVWL), C. Huysmanslaan 60, bus 4, 2020 Antwerpen.

EUCLIDES. Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, De Schalm 19, 8251 LB Dronten.
NIEUWE WISKRANT. Tijdschrift voor Nederlands wiskunde onderwijs, Freudenthal Instituut, Postbus 9432, 3506 GK Utrecht.
PYTHAGORAS. Wiskundetijdschrift voor jongeren, Wiskundig Genootschap, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht.

INTERNET ADRESSEN

Portaalsite voor wiskunde	http://users.pandora.be/wiskunde/
Het wiskundelokaal van de digitale school	http://www.digischool.nl/wi/index.phtml
Mathworld	http://mathworld.wolfram.com/
Wiskundeweb	http://www.wiskundeweb.nl/
Applets	http://www.fi.uu.nl/wisweb/
Analyse	http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/
Calculus	http://homepages.seresc.net/~sray/alvirne.html
Problem Solving (1)	http://www2.hawaii.edu/suremath/home.html
Problem Solving (2)	http://www.nzmaths.co.nz/PS/
Problems	http://komal.elte.hu/verseny/feladatok.e.shtml
Geschiedenis van de wiskunde	http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history
Vlaamse wiskundeolympiade	http://www.kulak.ac.be/vwo/nl/vwowwwnl.html
Vragenbank	http://www.gricha.bewoner.antwerpen.be/
Nederlandse wiskunde olympiade	http://olympiads.win.tue.nl/nwo/
Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraren	http://www.vvwl.be
Uitwiskeling	http://www.uitwiskeling.be
Geboeid door wiskunde en wetenschappen	http://www.luc.ac.be/scholennetwerk/index.html
Nederlandse vereniging voor wiskundeleraren	http://www.nvvw.nl/
Freudenthalinstituut	http://www.fi.ruu.nl/
Nieuwe Wiskrant	http://www.fi.uu.nl/wiskrant/
Tijdschrift Pythagoras	http://www.pythagoras.nu/mmmcms/public/
Vlaamse statistieken	http://aps.vlaanderen.be/
Statistische gegevens	http://statbel.fgov.be/home_nl.htm
Centraal Bureau voor Statistiek	http://www.nrc.nl/W2/Lab/Profiel/Statistiek/
Sparen en beleggen	http://www.testaankoop.be/index_NL.html
Hypotheeklening en fiscaliteit	http://www.immotheker.be