WISKUNDE – LEERPLAN A

DERDE GRAAD KSO/TSO

STUDIERICHTINGEN MET

6 UUR PER WEEK

LEERPLAN SECUNDAIR ONDERWIJS

September 2004
LICAP – BRUSSEL D/2004/0279/022

WISKUNDE – LEERPLAN A

DERDE GRAAD KSO/TSO

STUDIERICHTINGEN MET

6 UUR PER WEEK

LEERPLAN SECUNDAIR ONDERWIJS

LICAP – BRUSSEL D/2004/0279/022
September 2004
ISBN-nummer: 90-6858-383-2

Vlaams Verbond van het Katholiek Secundair Onderwijs
Guimardstraat 1, 1040 Brussel

Inhoud

INLEIDING

Dit leerplan werd opgemaakt op basis van de eindtermen wiskunde van de derde graad van het secundair onderwijs. Het is bestemd voor de leerlingen van de derde graad van het Technisch Secundair Onderwijs en het Kunst Secundair Onderwijs.

Voor het aantal lestijden wordt gerefereerd aan de Lessentabellen - Voltijds secundair onderwijs - Derde graad van het Vlaams Verbond van het Katholiek Secundair Onderwijs.

Het ***leerplan a*** is opgemaakt voor het vak wiskunde in de studierichtingen met zes wekelijkse lestijden wiskunde.

Architecturale vorming	Biotechnische wetenschappen
	Techniek-wetenschappen

En voor de studierichtingen met zes wekelijkse lestijden, eventueel aangevuld met twee extra wekelijkse lestijden wiskunde.

	Industriële wetenschappen

1 BEGINSITUATIE

De leerlingen die in de derde graad het leerplan a moeten verwerken, volgden in de tweede graad het leerplan a.

De concrete leerinhouden en de wijze waarop ze in de lessen uitgewerkt worden in de tweede graad kan opgezocht worden in de leerplannen van de tweede graad (LICAP D/2002/0279/048). Daar waar nodig en zinvol wordt in het begin van een onderdeel de concrete beginsituatie aangegeven.

De volgende leerinhouden werden volgens het leerplan a in de tweede graad behandeld (bijkomend deel voor *Industriële wetenschappen* in cursief).

Meetkunde
Gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Thales.
De stelling van Pythagoras en het berekenen van afstanden in het vlak en in de ruimte.
Driehoeksmeting van de rechthoekige en willekeurige driehoek, met sinus- en cosinusregel.
Vectoren
Eigenschappen in een cirkel (o.m. omtrekshoek en middelpuntshoek), raaklijnen in een punt van de cirkel.
De onderlinge ligging van rechten en vlakken.
Meetkundige problemen in de ruimte.

Getallenleer en algebra
Uitbreiding van het getalbegrip tot reële getallen.
Rekenen met reële getallen en met machten van getallen met gehele exponenten.
Vierkantswortel en derdemachtswortel. Rekenen met vierkantswortels.
Vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste en de tweede graad in één onbekende oplossen.
Vraagstukken die leiden tot een vergelijking van de eerste en de tweede graad met één onbekende en tot stelsels van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.
Ontbinden van een veelterm in factoren.
De complexe getallen: begrip, bewerkingen, goniometrische vorm, nde macht en derdemachtswortel.
Algebraïsch rekenen: euclidische deling en reststelling.

Reële functies
Het interpreteren van functies gegeven door middel van een grafiek, een tabel, een formule.
Functies van de eerste graad in één veranderlijke.
Functies van de tweede graad in één veranderlijke.
Elementaire begrippen in verband met functies, o.m. domein, bereik, nulpunten, tekenverandering, stijgen en dalen, extreme waarden, symmetrie.
Horizontale en verticale verschuivingen van een grafiek. Uitrekking van een grafiek.
Functie met voorschrift $f(x) = a\sin[b(x+c)] + d$.

Analytische meetkunde
De afstandsformule.
De algemene vergelijking van een rechte.
Stelsels van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.
De vergelijking van een cirkel.
Vraagstukken analytisch oplossen. Bewijzen.

Beschrijvende statistiek
Representativiteit van een steekproef.
Gebruik en interpretatie van een frequentietabel en grafische voorstellingen.
Gemiddelde en mediaan als centrummaat en interkwartielafstand en standaardafwijking als spreidingsmaat.

2 ALGEMENE DOELSTELLINGEN

2.1 Wiskunde en wiskundevorming

WISKUNDE

Wiskunde biedt middelen tot *het begrijpen, het beschrijven, het verklaren en eventueel het beheren van systemen en situaties* uit onze omgeving. Het gaat in het bijzonder om natuurverschijnselen (bijv. in de natuurwetenschappen, beschrijving in de ruimte rondom), om technische realisaties (bijv. automatiseringsprocessen) en om menselijke relaties (bijv. het gebruik van statistische gegevens in de economie en in de media).

Een kenmerk van wiskunde is het creëren van *modellen* voor die beschrijving. De mathematisering van een situatie of een probleem betekent dat, na analyse en kwantificering, een wiskundig model (bijv. een evenredigheid, een vergelijking, een functioneel verband, een stelsel, een meetkundig verband, ...) wordt gevonden, waarin de situatie of het probleem kan beschreven worden. De bijbehorende oplossingstechnieken kunnen tot een effectieve oplossing leiden. *Kritische toetsing* van de oplossing in de beschreven realiteit kan leiden tot het aanvaarden, verwerpen of bijstellen van het wiskundig model.

Een ander kenmerk van wiskunde is het steeds verder *ordenen en organiseren* van de verworven inzichten in samenhangende schema's en systemen, waarbij de toepasbaarheid en de beperkingen van wiskundesystemen kunnen beschreven worden. Van nieuwe vaststellingen wordt geprobeerd ze te verbinden met of te verantwoorden vanuit de bestaande systemen.

WISKUNDEVORMING

De wiskundevorming in deze studierichtingen van het secundair onderwijs heeft een drievoudige rol: de ontwikkeling van een wiskundig *basisinstrumentarium,* de ontwikkeling van *het denken in het algemeen* en van *specifieke denkmethoden en probleemoplossende werkwijzen eigen aan een wiskundige aanpak en de reflectie erop*.

- De leerlingen moeten een ruime kennis en vaardigheid verwerven in het wiskundige *instrumentarium*, nodig om te kunnen functioneren in een maatschappij waar wiskunde in vele toepassingen gebruikt wordt en (als voorbereiding op hun mogelijke vervolgstudies) om vragen aan te pakken in verband met het beschrijven en verklaren van wetenschappelijke situaties.

  Wiskundige begrippen en verbanden moeten een *brede betekenis* krijgen in relatie met realiteitsgebonden situaties. De wiskundige *technieken en methoden* moeten voldoende beheerst worden (al of niet met gebruik van hulpmiddelen zoals een rekenmachine, een computerprogramma, een formularium).

  Wil deze kennis en vaardigheid adequaat gehanteerd worden, is een efficiënte *kennisorganisatie* noodzakelijk. Daartoe moet aandacht besteed worden aan de samenhang tussen begrippen en eigenschappen en tussen de eigenschappen onderling. Efficiënte toegankelijkheid van de kennis houdt in dat ze inhoudelijk niet slechts logisch geordend is, maar dat een ordening beschikbaar is die gericht is op het gebruik ervan in toepassingen.

  In het concrete verwervingsproces en in de toepassingen kan de bewondering voor de schoonheid en de verwondering voor het vaak verrassende van wiskunde groeien.

- De wiskundevorming draagt bij tot een fundamentele *denk- en attitudevorming*. Bij het verwerven van wiskundekennis en wiskundige methoden worden meer algemene denkmethoden (bijv. het analyseren, het synthetiseren, het hanteren van symmetrie en analogie, het systematisch en methodisch werken), verwervingstechnieken van kennis (bijv. herhaling, verbanden leggen, toetsing, verdere abstractie) en attitudes (bijv. het opbouwen van vertrouwen in het eigen kunnen, doorzettingsvermogen en kritische zin) ontwikkeld.

  Omdat dit vormingsproces niet los verloopt van de sociale context van de klas, wordt onrechtstreeks bijgedragen tot de vorming van sociale vaardigheden.

Bij het mathematiseren en het oplossen van problemen kunnen leerlingen vaardigheden en strategieën verwerven die breder toepasbaar zijn. In het proces van het argumenteren en het bespreken van de kwaliteit van een wiskundige oplossing zal wiskunde bijdragen tot het verwerven van een *kritische houding*, ten aanzien van het eigen denken en handelen.

- In deze studierichtingen krijgt wiskunde een belangrijke vormingsrol toebedeeld. De specificiteit van de wiskundige vorming kan hierdoor nog meer tot uiting komen. De vorming is dus niet alleen gericht op het functioneren in breed maatschappelijke context, maar wil een basis leggen voor vervolgstudies in studierichtingen met een wiskundige, een wetenschappelijke of een toegepast wetenschappelijke invalshoek.

  Dit betekent dat zowel van de kennis op zich als de vaardigheden *een hoger beheersingsniveau* gevraagd wordt. Zo zal aandacht besteed worden aan een efficiënte conceptvorming, met het oog op een ruimere toepasbaarheid van de wiskundekennis. De gehanteerde taal zal tot een vlottere verwoording moeten leiden en kan een formeler niveau bereiken. De problemen die aangepakt worden zullen diepgaander onderzocht worden en van een hogere moeilijkheidsgraad zijn (bijv. omdat ze algemener gesteld worden). Bijzondere aandacht zal besteed worden aan de wijze waarop concepten naar hun fundamenten worden uitgediept en waarop verbanden gelegd worden binnen de wiskunde en aan het wiskundig kader waarbinnen de kennis systematisch geordend kan worden.

  Samengevat betekent het dat de leerlingen een wiskundig eigen wijze van denken, redeneren en handelen moeten ontwikkelen, d.w.z.
  - vermoedens bevragen, onderzoeken en formuleren;
  - modelleren (mathematiseren) en structureren;
  - argumenteren en bewijzen;
  - gesloten en open problemen wiskundig kunnen stellen en analyseren, oplossingen argumenteren en bespreken, en heuristiek en probleemoplossende vaardigheden accuraat aanwenden;
  - communiceren over wiskundig beschreven situaties, met inbegrip van het vlot gebruik van meer specifieke wiskundetaal;
  - kritisch reflecteren op het eigen denken en handelen.

2.2 Algemene doelstellingen voor wiskunde in de derde graad

Voor de wiskundevorming in de *derde graad* van het *kunst secundair onderwijs* en het *technisch secundair onderwijs* met zes of acht wekelijkse lestijden wiskunde kunnen de volgende algemene doelstellingen vooropgesteld worden.

KENNIS EN INZICHT

De leerlingen gebruiken en onderhouden de kennis en de inzichten die ze al verworven hebben.
De leerlingen ontwikkelen

- een ruim wiskundig instrumentarium van begrippen, eigenschappen en methoden;
- het inzicht in de fundamentele verbanden tussen de wiskundige leerinhouden onderling en tussen de wiskundige leerinhouden en andere vakdisciplines;
- het inzicht in verbanden tussen het wiskundig instrumentarium en problemen die wiskundig vertolkt kunnen worden;
- het inzicht in het verwerken van numerieke informatie en beeldinformatie;
- redeneermethoden om hun bevindingen te argumenteren en te verklaren;
- wiskundige denkmethoden om o.m.
  - vermoedens te formuleren, te onderzoeken en te argumenteren,
  - verbanden te leggen, systematisch te ordenen en te structureren.

VAARDIGHEDEN

De leerlingen onderhouden de vaardigheden die ze al verworven hebben.
De leerlingen ontwikkelen

- rekenvaardigheden met o.m.
  - het adequaat gebruik van hulpmiddelen;
- meet- en tekenvaardigheden;
- wiskundige taalvaardigheden met o.m.
  - het communiceren over wiskundig beschreven situaties, met inbegrip van een adequaat gebruik van een meer specifieke wiskundetaal;
- denk- en redeneervaardigheden,
  in het bijzonder meer specifieke wiskundige methoden en werkwijzen met o.m. een efficiënte conceptvorming,vaardigheid in onderzoeken en formuleren van vermoedens,
  - vaardigheid in argumenteren en bewijzen,
  - vaardigheid in het gebruik van en wisselen tussen verschillende representaties,
  - een meer systematische ordening van de domeinspecifieke kennis;
- probleemoplossende vaardigheden met o.m.
  - het wiskundig stellen en analyseren van gesloten en open problemen, het accuraat aanwenden van een heuristiek en probleemoplossende vaardigheden, het modelleren van probleemstellingen;onderzoeksvaardigheden;
- leervaardigheden;
- reflectievaardigheden

ATTITUDES

De leerlingen ontwikkelen

- zin voor nauwkeurigheid en orde;
- zin voor volledigheid;
- zin voor helderheid, bondigheid, eenvoud van taalgebruik;
- kritische zin;het kritisch reflecteren op denken en handelen; zelfvertrouwen, zelfstandigheid en doorzettingsvermogen;
- zelfregulatie;
- zin voor samenwerking en overleg;
- waardering voor wiskunde als een dynamische wetenschap en als een component van de cultuur.

3 ALGEMENE PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de derde graad wordt verder gebouwd op de wiskundige vorming van het basisonderwijs en van de eerste en de tweede graad. Dat houdt in dat de leerlingen de kennis, de inzichten en de vaardigheden die verworven werden, blijven gebruiken en onderhouden. Voor de leerlingen die voor meer wiskunde kiezen mag verwacht worden dat daarbij geen fundamentele problemen voorkomen. Als uit de praktijk of een diagnostische toets blijkt dat onderdelen onvoldoende verworven werden, kunnen die functioneel en gericht herhaald worden. Een gedifferentieerde aanpak is aangewezen. Zo kan men ervan uitgaan dat de leerlingen bereid zijn zelfstandig aan oplossingen te werken, na een minimale ondersteuning om het probleem en een efficiënte aanpak te omschrijven.

KENNIS, INZICHT EN VAARDIGHEDEN

De didactische opbouw van wiskunde kan geordend worden rond vier kerngedachten: een *betekenisvolle begripsvorming*, de *technieken* om berekeningen uit te voeren, de *fundamenten* tegen een algemener wiskundig kader en de *toepassingen* binnen wiskunde, wetenschappen, techniek en maatschappij. Naargelang de fase van ontwikkeling van een wiskundeonderdeel zal aan deze verschillende opvattingen meer of minder aandacht toegekend worden. In een eerste fase zal wellicht meer aandacht gaan naar de begripsvorming en de toepassing van de begrippen op een relatief eenvoudig niveau, i.h.b. het berekeningsniveau. In volgende fas es kan dan meer aandacht besteed worden aan het uitdiepen van de fundamenten van begrip en inzicht, van de moeilijkheidsgraad van de toepassingen of van het niveau van rekenvaardigheid.

- In de derde graad komen een aantal nieuwe leerinhouden en nieuwe wiskundeonderdelen aan bod. Daarbij moet aandacht besteed worden aan een betekenisvolle *begripsvorming*. Het best is aan te sluiten bij de werkwijzen die voordien gehanteerd werden en waarmee leerlingen ondertussen vertrouwd zijn. Een eerste abstractie van nieuwe begrippen wordt onderbouwd met voorbeelden en tegenvoorbeelden, die onder meer kunnen aansluiten bij de ervaringswereld van de leerlingen of bij de problemen die ermee kunnen opgelost worden. In een onderzoeksfase kunnen de leerlingen ervaren wat de relevante en niet-relevante kenmerken van een begrip zijn. Bij het verbinden van nieuwe ervaringen aan het begrip of het niet meer behoorlijk functioneren ervan kunnen leerlingen daarop terugvallen. Door begrippen van bij de vorming te koppelen aan verschillende onderdelen worden ze breder en betekenisvoller opgenomen en wordt het gebruik ervan vereenvoudigd. Dit kan een motivatie zijn om leerstofonderdelen geheel of gedeeltelijk geïntegreerd te behandelen. De aanbreng van nieuwe eigenschappen kan op gelijkaardige wijze aangepakt worden.

  Voor de leerlingen die dit leerplan volgen moet een degelijk verwoordingsniveau van de leerinhouden nagestreefd worden. Daarbij zal aandacht besteed worden aan een vlot taalgebruik, maar ook aan het correct hanteren van een meer formele wiskundetaal.
- Om met concepten wiskundig te werken moeten vaak *berekeningen* uitgevoerd worden. Enerzijds moet dit leiden tot een operationele rekenvaardigheid, anderzijds tot inzicht in het aanwenden van de technieken en routineprocedures. Deze berekeningen kunnen manueel gebeuren of door middel van ICT, waarbij het manuele rekenwerk bewust beperkt wordt tot haalbare en zinvolle gevallen. Zo kan men de vraag stellen of er nog intensief moet geïnvesteerd worden in het verwerven van het manueel manipuleren van ingewikkelde uitdrukkingen. De zo nagestreefde automatismen zullen in de praktijk maar zelden effectief gebruikt worden. Door het zinvol inschakelen van rekenmachine en computer voor reken- en tekenwerk, voor onderzoek of als informatiebron draagt wiskunde bij tot het verwerven en onderhouden van ICT-vaardigheden.
- Eens de begrippen voldoende vertrouwd zijn, wordt binnen de wiskundevorming aandacht besteed aan de studie van de *fundamenten* en de theoretische preciseringen. Hierbij gaat het om de aspecten die nodig zijn om de begrippen in te passen in een samenhangende wiskundige theorie. Zo worden leerlingen geconfronteerd met wiskunde als systeem. Onder meer dit kan hen gevoelig maken voor een keuze voor een meer doorgedreven wiskundestudie in hun vervolgopleiding.
- In deze fase van de vorming is een louter abstract wiskundige vorming nog niet aangewezen. De verworven concepten worden *toegepast* om problemen uit de maatschappelijke leefwereld, uit wetenschappen en techniek te modelleren, te mathematiseren, en op die wijze op te lossen.

- Bij het mathematiseren speelt de betekenis van de begrippen een belangrijke rol, bijvoorbeeld inzien dat een antwoord op een gestelde vraag kan gevonden worden door een afgeleide of een integraal te berekenen, een matrixberekening, een statistische beschrijving.
- Binnen het model worden dan wiskundige bewerkingen uitgevoerd, al of niet met gebruik van ICT.
- Dan volgt een interpretatie van het resultaat, waarbij uiteraard de betekenis van de gehanteerde concepten optreedt (demathematiseren).

Precies toepassingen kunnen het inzicht verscherpen in verbanden tussen het gekende wiskundig instrumentarium en het oplossen van problemen en daardoor in de wiskundige begrippen en eigenschappen zelf. In het toepassingsproces kunnen de kerngedachten verdiept worden. Zo kunnen uit toepassingen bijvoorbeeld vragen rijzen naar de samenhang tussen begrippen of naar de toepasbaarheidvoorwaarden van bepaalde technieken, wat dan in een latere fase kan leiden tot een meer fundamenteel onderzoeken ervan. Bij de toepassingen moet aandacht besteed worden aan het onderhouden en het verder verwerven van algemene probleemoplossende vaardigheden. Daarbij zal de graad van zelfstandig werken nog toenemen. In het bijzonder zal door reflectie en kritische zin teruggekeken worden op het oplossingsproces zelf.

ATTITUDES EN OPVATTINGEN

Doorheen de wiskundevorming kunnen leerlingen een aantal attitudes en in het bijzonder *leerattitudes* verwerven, zoals orde, nauwkeurigheid, doorzettingsvermogen, zelfvertrouwen, ... Het aanpakken van problemen kan leiden tot een *onderzoeksgerichte houding*, tot methodisch en planmatig werken. Een leerproces waarin oplossingen worden vergeleken en getoetst, kan bijdragen tot samenwerking, overleg, structurering, zin voor helderheid, bondigheid, volledigheid, eenvoud in taalgebruik, waardering voor andere oplossingen.

Bij het bespreken van oplossingsmethoden en door het kritisch onderzoeken van elkaars oplossing kan *waardering* voor een andere mening aangeleerd worden en daardoor voor de persoon van de andere. Zo kan binnen het wiskundeonderwijs aandacht besteed worden aan *waarden* en *sociale vaardigheden*.

Ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit *realiteitsbetrokken situaties* kan bij de leerlingen het besef doen groeien van de bruikbaarheid en de werkelijkheidswaarde van wiskunde. Het gebruik van cijfermateriaal uit kranten en tijdschriften leert leerlingen hiermee om te gaan en er kritisch naar te kijken. Ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit een historische context kan belangstelling en waardering opwekken voor de historische en culturele aspecten van wiskunde in het algemeen.

ACTIEVE WERKVORMEN

De leerlingen moeten voldoende betrokken worden bij het ontwikkelen van de leerinhouden. Een radicale keuze voor *actieve wiskundelessen* ligt voor de hand. Begrippen en eigenschappen kunnen in goed gekozen didactische situaties door de leerlingen zelf onderzocht worden. Die leermomenten kunnen in leer- of klassengesprekken verwoord worden en aan de ervaring van anderen getoetst. Reflecties over dit proces zelf zijn aangewezen momenten om technieken in verband met het leren en het verwerven van reflectieve vaardigheden (bijv. zich vragen stellen, terugkijken op een uitgevoerde taak) aan te reiken.

In een *actief leerproces* leren leerlingen communiceren over wiskundige onderwerpen. Ook al beheersen ze de wiskundetaal wellicht minder goed, de manier waarop leerlingen onder elkaar en naar de leerkracht informatie over hun denkproces overdragen, zou begrijpbaar moeten zijn. Ook in de wiskundelessen is het hanteren van een verzorgde en behoorlijke taal belangrijk.

Van leerlingen van de derde graad mag verwacht worden, dat ze een vorm van *zelfstandig leren en werken* opbouwen. De opbouw van het leerproces moet er op gericht zijn dat leerlingen actief deelnemen aan de wiskundelessen. Die moeten zo ingericht worden dat leerlingen zelf een deel van het werk aanpakken, weliswaar binnen hun wiskundig kunnen. Door goed gekozen, progressief opgebouwde opdrachten moeten leerlingen vertrouwd gemaakt worden met het opnemen van verantwoordelijkheid voor het eigen leren en werken.

WISKUNDE EN ICT

In onze maatschappij groeit de informatie- en communicatietechnologie (ICT) uit tot een veralgemeend hulpmiddel. De leerlingen moeten er in het onderwijs al mee vertrouwd worden. Door de vele mogelijkheden biedt de wiskundevorming een weg tot het verwerven van inzicht in een aantal computertoepassingen (rekenwerk, grafische mogelijkheden, dataverwerking, onderzoeksopdrachten, informatieverzameling). Wiskunde moet deze algemene vormingsopdracht opnemen. Daartoe kan men leerlijnen ontwikkelen voor verwerving en integratie, op niveau van de individuele aanpak door de leraar, maar ook in overleg met de vakgroep wiskunde, met de vakgroepen van vakken die de wiskundetoepassingen gebruiken, bijv. wetenschappen, en op schoolniveau, bijv. wat betreft beschikbaarheid, organisatie computerinfrastructuur (werkblok in wiskundeklassen).

Heel wat *routinerekenwerk* wordt in de praktijk niet meer manueel uitgevoerd. Ook in de wiskundeles kan het gebruik van moderne rekenapparatuur zoals rekenmachine en computer tijdbesparend werken, zeker bij situaties waar het handmatig rekenwerk veel tijd in beslag zou nemen. Routinerekenvaardigheden blijven weliswaar belangrijk voor een snelle schatting, bijv. na afronding van de getallen. Maar men kan niet voorbij aan de consequentie dat aan de inoefening van rekenvaardigheden minder tijd besteed wordt. Uiteraard moet misbruik van de rekenmachine voorkomen worden.

Wat het *algebraïsch rekenwerk* (formules, letterrekenen, vergelijkingen oplossen) betreft, beschikken de computer en rekenmachines over heel wat mogelijkheden. De leerlingen kunnen voor het rekenwerk ruim gebruik maken van een grafische rekenmachine of van software (freeware, software met goedkope leerlingenlicenties, applets). Toch is het zinvol een aantal manuele technieken te onderhouden. Daarbij is de aard van de oefeningen niet gericht op complexiteit, maar op de versterking van het inzicht in de methode, en zonder daarbij in extreme oefeningen te vervallen. Een basisniveau voor de routinerekenvaardigheden blijft zinvol. Zo zullen leerlingen bijvoorbeeld het voorschrift van de afgeleide functie van een veelterm moeten kunnen berekenen. Bij toepassingen zoals extremumproblemen zal men sneller grijpen naar ICT. Hierbij heeft het inzicht in het oplossingsproces van het probleem prioriteit op het rekentechnische aspect. Het manuele rekenwerk moet niet uitgebannen worden, maar in de praktijk zal men vlotter naar een hulpmiddel grijpen. Anderzijds behoren toepassingen met realistische gegevens meer tot de mogelijkheden, omdat de moeilijkheid van de berekeningen kan opgevangen worden.

Het leren gebruiken van ICT is binnen wiskunde geen einddoel op zich. Maar ook de kale rekenvaardigheid is geen doel op zich. De leerling moet wel geleerd worden beide als hulpmiddel doeltreffend te gebruiken. Zo zal bij het oplossen van een probleem het uittekenen van de grafiek een hulpmiddel zijn om de situatie beter te vatten. Bij de doelstelling over het verloop van een functie vanuit het interpreteren van de afgeleide(n), is het uiteraard niet de bedoeling dat de leerlingen meteen de grafiek uittekenen met ICT. Zo heeft het ook geen zin de leerlingen buiten elke context een groot aantal afgeleiden te laten berekenen met ICT. Wel kan ICT gebruikt worden als controlemiddel om de juistheid van besluiten te verifiëren.

De computer en grafische rekenmachines zijn handige *didactische hulpmiddelen*, o.m. bij exploratieopdrachten. Door de snelheid waarmee leerlingen een antwoord kunnen bekomen, krijgen ze snel terugkoppeling over hun denk-, reken- of oplossingsproces. De bijsturing die volgt, kan het inzicht verhogen. Zo kunnen bijvoorbeeld de grafische mogelijkheden aangewend worden bij het onderzoek van functies en hun grafieken. Zo geeft in de statistiek het voorstellen van de gegevens een beter inzicht in de statistische verwerking ervan. De *visuele ondersteuning* die uitgaat van deze ‘wiskunde in beelden’ mag voor leerzwakke leerlingen niet onderschat worden. Al zal de computer in de wiskundeles niet noodzakelijk voor flitsende beelden zorgen en vraagt het gebruik van de leerling heel wat inzet, toch kan het moderne medium de *motivatie* van een aantal leerlingen verhogen.

Het gebruik van een rekenmachine of software brengt *nieuwe mogelijkheden en moeilijkheden* mee:

- dynamisch materiaal om nieuwe concepten in te leiden, waardoor beter kan gefocust worden op de betekenisgeving en de opbouw, en waardoor minder ruis ontstaat door problemen met handmatig rekenen;
- demonstratiemogelijkheden in de hand van de leraar bij nieuwe begrippen, maar ook aangepast leerlingenmateriaal voor onderzoeksopdrachten voor de leerlingen zelf, bijv. voor het ontwikkelen en formuleren van vermoedens;
- het gebruik van concepten wordt al mogelijk vanuit een intuïtieve visuele voorstelling en haalbare reken-

technische mogelijkheden, zonder dat het begrip eerst op een hoger verbaalalgebraïsch niveau moet geëxpliciteerd worden;
- het adequater voorstellen van grafieken en diagrammen, en een vlotte aanpassing van situaties in functie van het leerproces;
- het vlot wisselen tussen verschillende wiskundige representaties, bijv. tabel, grafiek, functievoorschrift;
- berekeningen met moeilijkere, meer realistische gegevens, die voordien niet manueel uitvoerbaar waren;
- het interpreteren van de randvoorwaarden van een probleem (bijv. de keuze van de dimensies van het grafisch scherm);
- het extrapoleren of interpoleren (bijv. vanuit een verband vastgesteld op een grafiek);
- het simuleren van bepaalde situaties, zoals bijv. kansexperimenten;
- het gebruik als controlemiddel op manueel uitgevoerde berekeningen;
- een controlemiddel bij het verifiëren van vermoedens, veronderstellingen en schattingen;
- de ontwikkeling van nieuwe controlevaardigheden (bijv. het maken van schattingen) om meteen een kritische houding tegenover de resultaten en de mogelijkheden van deze nieuwe technologie te verwerven;
- het opzoeken van (bijkomende) informatie voor gebruik bij het oplossen van problemen;
- het opzoeken van informatie op het internet, bijv. in verband met de historische ontwikkeling van wiskunde en de rol in de ontwikkeling van de cultuur.

ICT biedt ook nieuwe impulsen aan *het zelfstandig werken en leren* van de leerling in de wiskundevorming. Als de gebruikte software krachtig en nauwkeurig genoeg is kan dit voor de leerlingen een hulpmiddel zijn om meer zelfontdekkend aan het werk te gaan. Wel is het hierbij belangrijk dat leerlingen niet zo maar wat bezig zijn, maar dat zij gericht geleid worden in een exact denkproces. De klasgroepen mogen dan ook niet te groot zijn, en er moeten voldoende toestellen beschikbaar zijn.

Met sommige ICT-toepassingen hebben de leerlingen de mogelijkheid om oefeningen te maken, die meteen geëvalueerd worden (bijv. bij het bepalen van voorschriften van functies). Hierdoor kunnen zij individueel aan het werk en krijgen ze snel feedback op hun antwoorden. Op deze wijze leren ze omgaan met zelfevaluatie.

Voorbeelden van het gebruik van ICT in de derde graad.
- Verkenning, berekening, grafische controle van het begrip functie, symmetrieën, nulpunten, verband tussen de grafiek van een functie en zijn omgekeerde.
- Ondersteuning en oefening bij de grafieken van goniometrische, exponentiële en logaritmische functies.
- Onderzoek van de invloed van parameters op de grafiek van een functie.
- Ondersteuning van de begripsvorming, berekening en grafische controle bij limieten, afgeleiden, integralen en hun toepassingen.
- Ondersteuning en berekening bij extremumproblemen.
- Ondersteuning en rekenwerk bij het numeriek bepalen van nulpunten, van integralen.
- Matrixberekeningen en oplossen van stelsels.
- Ondersteuning bij meetkundige redeneringen.
- Gebruik van statistische functies in statistiek en kansberekening. Uitvoeren van kanssimulaties.
- Berekeningen bij het onderdeel financiële algebra.

WISKUNDE VOOR ELKE LEERLING

In de derde graad wordt wiskunde aangeboden met een verschillend aantal wekelijkse lestijden. De leerlingengroepen zijn meer homogeen samengesteld dan voordien. Toch moet er aandacht besteed worden aan een gedifferentieerde aanpak van de leerlingen. Dit kan betekenen dat bepaalde onderdelen en doelstellingen gedifferentieerd aangeboden worden.

RELATIE MET HET OPVOEDINGSPROJECT VAN DE SCHOOL

Een school wil haar leerlingen méér meegeven dan louter vakkennis. Haar intentieverklaring in dit verband is te vinden in het opvoedingsproject, waarin waardenopvoeding en christelijke duiding zijn opgenomen.

Een vakleerkracht in een school van het katholieke net zal geen andere wiskunde geven dan de collega's in een ander net. Wel heeft hij de taak om, waar de kans zich voordoet, naar het opvoedingsproject of een aspect daarvan te refereren. Als mededrager van het christelijk opvoedingsproject is elke leerkracht alert voor elke kans die het school- en klasgebeuren biedt om de diepere dimensie aan te reiken. Ook wiskundelessen bieden hiertoe de kans, niet het minst in de persoonlijke contacten tussen leerlingen en leerkracht. Hoe beter de leerkracht de leerlingen persoonlijk kent, hoe beter hij zal aanvoelen wanneer er openheid is om met de leerlingen door te stoten naar zins- en zijnsvragen.

4 MINIMALE MATERIËLE VEREISTEN

Leerkrachten wiskunde hebben de beschikking over behoorlijk en gemakkelijk toegankelijk materiaal voor het uitvoeren van tekeningen op het bord, m.n. *geodriehoek en passer*. Ze kunnen vlot beschikken over een *overheadprojector en ICT-hulpmiddelen voor demonstratie.*

Leerkrachten wiskunde kunnen vlot beschikken over een *geavanceerde grafische rekenmachine en wiskundige software* voor de didactische ondersteuning van hun lessen.

Voor de derde graad betekent dit o.m.:
- software voor exploratie van reële functies;
- software voor de verwerking van statistische gegevens (exploratie van grafische voorstellingen, berekeningen, voorstellen van gegevens in grafieken en diagrammen);
- software voor demonstratie en exploratie van meetkundige situaties;
- beschikbaarheid van het internet voor het gebruik van applets, informatieve sites, bijv. van banken.

De *leerlingen* beschikken over behoorlijk tekenmateriaal (*geodriehoek en passer*).

De leerlingen moeten doorheen het onderwijs, en in het bijzonder tijdens de wiskundelessen, ICT-hulpmiddelen leren gebruiken. De toepassingsmogelijkheden in wiskunde zijn uitgebreid (rekenapparaat, informatieverzameling, internet met applets). Daarom is het vanzelfsprekend dat de leerlingen zelf beschikken over een grafische rekenmachine of zo goed als permanent kunnen gebruik maken van een computer. Zo zou men een werkblok met computers kunnen voorzien in een wiskundeklas.

Alleszins moet het duidelijk gesteld worden dat, gezien de verplichting van het ICT-gebruik vanuit de eindtermen, dit leerplan niet in voldoende mate kan gerealiseerd worden als deze ICT-middelen onvoldoende beschikbaar zijn.

Opmerking in verband met de implementatie

Gezien het belang van het gebruik van ICT-middelen en een eventuele beperkte beschikbaarheid zal de leraar rekening houden met deze beperkingen bij het plannen van de didactische aanpak. Eventueel kan de jaarplanning aangepast worden.

De vakgroep wiskunde zal geregeld een evaluatie maken van het gebruik van en de vordering van de implementatie van ICT-hulpmiddelen, bijv. over de grenzen van de graden en de studierichtingen heen. Dit is een gelegenheid om ideeën en werkmateriaal uit te wisselen. Zo kan in de vakgroep afgesproken worden welke software de leerlingen effectief zelf leren gebruiken. Zo is het, gezien de tijdsinvestering voor het aanleren van een programma, aangewezen dat in tweede en derde graad dezelfde of analoge wiskundesoftware gebruikt wordt. In dit verband kan gezamenlijk materiaal ontwikkeld worden met toelichting voor het gebruik van de software, cf. werkkaarten of gebruiksvademecum.

Aanvullend overleg is wenselijk met de vakwerkgroepen wetenschappen, technische vakken en informatica, o.m. om het wiskundig gebruik van de ICT-hulpmiddelen in die vakken aan te moedigen of toe te lichten.

Het komt de didactische verwerking in de klas ten goede als de leerlingen over eenzelfde rekenmachine beschikken. Als gevolg van de doorstroming van leerlingen naar de derde graad kan echter een situatie ontstaan waarin verschillende toestellen gehanteerd worden in de klas. Het is niet zinvol om leerlingen nog andere (dure) toestellen te laten aanschaffen. Om een continuïteit in het gebruik van rekenmachines te waarborgen doorheen de studieloopbaan van de leerlingen is het wenselijk dat hierover afspraken gemaakt worden op het niveau van de scholengemeenschap.

Tenslotte moet voorzien worden dat leerlingen uit een sociaal minder begoed midden geen probleem ervaren met de beschikbaarheid van deze hulpmiddelen. Zo kan er niet van worden uitgegaan dat elke leerling thuis al over een computer kan beschikken. Dat impliceert wellicht dat in de school oefenmogelijkheden moeten worden voorzien.

5 LEERPLANDOELSTELLINGEN - LEERINHOUDEN PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerplandoelstellingen zijn opgemaakt op basis van *de eindtermen wiskunde van de derde graad* voor het kunst secundair onderwijs en het technisch secundair onderwijs. Bij een aantal doelstellingen is in de laatste kolom een *verwijzing naar de eindtermen* opgenomen. Bij sommige doelstellingen staan meer verwijzingen, als gelijktijdig aan het realiseren van meer dan een eindterm gewerkt worden. Dit betekent niet dat deze eindtermen uitsluitend hier aan bod komen. want anderzijds kunnen verschillende doelstellingen verwijzen naar dezelfde eindterm. In hoofdstuk 7 is een concordantietabel opgenomen. Omdat het aantal lestijden hoger is dan het minimum pakket waarvoor de eindtermen bedoeld zijn, is het leerplan uiteraard uitgebreider.

De doelstellingen voor *vaardigheden en attitudes* zijn doelstellingen die doorheen de gehele wiskundevorming aan bod moeten komen. Het zijn doelstellingen die eerder permanente aandacht vragen in het onderwijsleerproces, dan wel specifieke lessen om ze aan te leren. De doelstellingen bouwen voort op gelijkaardige doelstellingen uit de eerste en de tweede graad. Omwille van hun brede formulering en hun ruim toepassingsgebied kunnen ze op verschillende niveaus en verschillende wijzen gerealiseerd worden. Het gaat daarbij meer om het verwerven van een wiskundige dispositie en methode, dan wel om concreet specifieke doelen.

In verband met de controle geldt de opmerking dat attitudes altijd na te streven zijn en dat de effecten ervan op de leerlingen geen deel uitmaken van een inspectieonderzoek.

De *leerinhoudelijke* doelstellingen voor zes lestijden worden samengebracht in een aantal onderdelen op basis van samenhangende leerinhouden. De onderdelen *Analyse, Algebra, Meetkunde* en *Statistiek* behoren tot het verplichte gedeelte.

Verder is onderwerp *Mathematiseren en oplossen van problemen* voorzien. Dit biedt de mogelijkheid intentioneel te werken aan de zo belangrijke en transferabele probleemoplossende vaardigheden. Meteen bestaat de mogelijkheid om hierin bepaalde problemen aangereikt vanuit de technische vakken te verwerken. Het is zinvol hierover in een gemeenschappelijke vakvergadering afspraken te maken.

Daarnaast zijn een aantal keuzeonderwerpen aangegeven waarvoor binnen de resterende tijd moet gekozen worden. Voor maximaal 20 lestijden kan de leerkracht zelf een eigen onderwerp inbrengen. Gezien het aantal resterende lestijden en de aanbevelingen voor het aantal lestijden bij de keuzeonderwerpen ligt een keuze voor twee of drie onderwerpen voor de hand.

In sommige klassen kan het leerlingenpotentieel erg divers zijn samengesteld. Het antwoord hierop is een gedifferentieerde aanpak. Enerzijds is belangrijk dat leerlingen hun keuze voor wiskunde kunnen realiseren, vandaar dat een eventuele remediërende opvang zinvol kan zijn, bijv. als eigen keuzeonderwerp van de leraar. Anderzijds moeten de leerlingen, die intrinsiek de mogelijkheden hebben voor een vervolgopleiding in het hoger onderwijs met een sterke wiskundecomponent, ook aan hun trekken komen. Daarom kan men voor hen in de vrije keuze extra leerinhouden aanbieden, waarbij meer ingegaan wordt op de overgang naar het hoger onderwijs. In beide gevallen kan men leerlingen, bijvoorbeeld via begeleid zelfstandig leren, aan eigen gerichte opdrachten laten werken.

Met de inhoudelijke groepering wil het leerplan niet opleggen op welke wijze de leerinhouden moeten aangebracht worden. Ook de volgorde, waarin de verschillende leerstofonderdelen in het leerplan zijn weergegeven, is niet noodzakelijk de volgorde waarin ze in de klas moeten worden behandeld. Zo is bijvoorbeeld een integratie tussen verschillende onderdelen mogelijk. Voor elk leerplan wordt een aanbeveling gedaan over het aantal te besteden lestijden. Deze getallen zijn slechts *richtinggevend*.

In de studierichting ***Industriële wetenschappen*** kan het aantal wekelijkse lestijden uitgebreid worden met **twee lestijden** uit het complementair gedeelte. De onderwerpen *Rijen, Iteratie, Regressie, Differentiaalvergelijkingen* en *Elementaire kegelsneden* worden dan **verplichte** leerinhouden.

OVERZICHT LEERPLAN A

STUDIERICHTINGEN

Architecturale vorming,
Biotechnische wetenschappen,
Techniek-wetenschappen,
Industriële wetenschappen (met 6 lestijden)

1 Vaardigheden en attitudes (5.1)

Worden geïntegreerd in de verwerking van de leerinhoudelijke doelstellingen.

			Aantal voorziene lestijden
2 Verplichte leerinhoudelijke doelstellingen			**255**
– Analyse (5.2.1)		130	
– – Reële functies: basisbegrippen (5.2.1.1)	50		
– – – Veeltermfuncties, rationale en irrationale functies			
– – – Exponentiële en logaritmische functies			
– – – Goniometrische en cyclometrische functies			
– – Afgeleiden en integralen (5.2.1.2)	80		
– Algebra			
– – Matrices en stelsels (5.2.2)		20	
– Meetkunde (5.2.3)		60	
– – Vlakke analytische meetkunde	25		
– – Ruimtemeetkunde	35		
– Statistiek (5.2.4)		25	
– Mathematiseren van problemen (5.2.5)		20	
3 Uitbreiding en keuzeonderwerpen			**45**
– Rijen (5.3.1)		10	
– Iteratie (5.3.2)		10	
– Convergentie van een reeks (5.3.3)		10	
– Numerieke methoden (5.3.4)		15	
– Differentiaalvergelijkingen (5.3.5)		15	
– Elementaire kegelsneden (5.3.6)		20	
– Krommen (5.3.7)		30	
– Financiële algebra (5.3.8)		25	
– Regressie (5.3.9)		15	
– Telproblemen en kansrekenen (5.3.10)		25	
– Eigen keuzeonderwerp	max.	20	

STUDIERICHTING

Industriële wetenschappen (met 6 + 2 lestijden)

1 Vaardigheden en attitudes (5.1)

Worden geïntegreerd in de verwerking van de leerinhoudelijke doelstellingen.

			Aantal voorziene lestijden
2 Verplichte leerinhoudelijke doelstellingen			**350**
– Analyse (5.2.1)		130	
– Reële functies: basisbegrippen (5.2.1.1)	50		
– Veeltermfuncties, rationale en irrationale functies			
– Exponentiële en logaritmische functies			
– Goniometrische en cyclometrische functies			
– Afgeleiden en integralen (5.2.1.2)	80		
– Rijen (5.3.1)		10	
– Iteratie (5.3.2)		10	
– Differentiaalvergelijkingen (5.3.5)		15	
– Algebra			
– Matrices en stelsels (5.2.2)		20	
– Meetkunde (5.2.3)		80	
– Vlakke analytische meetkunde	25		
– Ruimtemeetkunde	35		
– Elementaire kegelsneden (5.3.6)	20		
– Statistiek en kansrekening			
– Statistiek (5.2.4)		25	
– Regressie (5.3.9)		15	
– Telproblemen en kansrekenen (5.3.10)		25	
– Mathematiseren van problemen (5.2.5)		20	
3 Uitbreiding en keuzeonderwerpen			**50**
– Convergentie van een reeks (5.3.3)		10	
– Numerieke methoden (5.3.4)		15	
– Krommen (5.3.7)		30	
– Financiële algebra (5.3.8)		25	
– Eigen keuzeonderwerp		max. 20	

5.1 VAARDIGHEDEN EN ATTITUDES

5.1.1 Vaardigheden

LEERPLANDOELSTELLINGEN

De leerlingen ontwikkelen (binnen het gekende wiskundig instrumentarium)

1	rekenvaardigheid, o.m. - het vlot rekenen met getallen - het rekenen met formules, algebraïsche vormen en matrices; - het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden, stelsels, …; - het voorspellen en inschatten van de grootteorde van een resultaat; - het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het uitvoeren van bewerkingen.	2 3 5
2	meet- en tekenvaardigheid, o.m. - het analyseren en opbouwen van een figuur bij een redenering; - ruimtelijk voorstellingsvermogen; - het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het opbouwen van figuren en grafieken.	1 2 3 5 6
3	wiskundige taalvaardigheid, o.m. - het begrijpen van wiskundige uitdrukkingen (zowel mondeling als schriftelijk); - het lezen van figuren, tekeningen, grafieken en diagrammen; - het verwoorden van hun gedachten en hun inzichten (zowel mondeling als schriftelijk).	1 2 6
4	denk- en redeneervaardigheden, o.m. - het onderscheid maken tussen hoofd- en bijzaken, gegeven en gevraagde, gegeven en te bewijzen; - het begrijpen van een redenering of argumentering bij een eigenschap; - het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het opbouwen van een redenering; - het opbouwen van een redenering ter verklaring van een eigenschap of de oplossing van een probleem; dit houdt onder meer in: o een hypothese (vermoeden) formuleren en argumenteren; o een eigenschap formuleren op basis van een onderzoek op een aantal voorbeelden, een inductieve redenering; - een gegeven redenering op haar geldigheid onderzoeken.	1 3 4 6
5	probleemoplossende vaardigheden, zoals - een probleem leren ontdekken en behoorlijk leren stellen; - probleemoplossende vaardigheden (i.h.b. heuristische methoden) toepassen bij het werken aan problemen, zowel over alledaagse als over wiskundige situaties; bijv. een opgave herformuleren, een goede schets of een aangepast schema maken, notaties invoeren, onbekenden kiezen, voorbeelden analyseren; - reflecteren op de keuzen voor representatie, oplossingstechnieken en resultaten; - resultaten controleren op hun betrouwbaarheid en volledigheid; - ICT-hulpmiddelen gebruiken om wiskundige informatie te verwerken en wiskundige problemen te onderzoeken.	1 3 4 5 6 8 9
6	onderzoeksvaardigheden, o. m. - de onderzoeksopdracht formuleren en afbakenen; - een aanpak plannen en zo nodig opsplitsen in deeltaken; - informatie verwerven en op relevantie selecteren, o.m. - de waarde van informatie beoordelen in functie van de opdracht;	

	- relatie tussen gegevens en beweringen opzoeken en interpreteren;
	- een doelmatig wiskundig model selecteren of opstellen, o.m.
	  - een onderdeel van een opdracht herkennen als een wiskundig of een statistisch probleem;
	  - vaststellen of een model voldoet en het eventueel bijsturen;
	  - zo nodig bijkomende informatie verzamelen om het aangewezen model te kunnen hanteren;
	- een bij het model passende oplossingsmethode correct uitvoeren;
	- de resultaten binnen de context betekenis geven en ze daarin kritisch evalueren;
	- reflecteren op het gehele proces, i.h.b. op de gemaakte keuzen voor representatie en werkwijze;
	- het resultaat van het onderzoek zinvol presenteren, het standpunt argumenteren en verslag uitbrengen van het proces.	

7	leervaardigheden, o. m. - het verwerken van losse gegevens; - het verwerken van samenhangende informatie; - het raadplegen van informatiebronnen; - het plannen van de studietijd; - het sturen van het eigen leerproces.	9

8	reflectievaardigheden, o. m. over
	- de aanpak van hun werk, hun leren;
	- hun leerproces en hun inzet;
	  o bijv. leiden ze tot het bereiken van de doelstelling?
	- de effectiviteit bij het werken, het leren;
	- de sterke en zwakke elementen in de uitvoering van hun opdracht;
	- het concretiseren in een plan tot verbetering;
	  o bijv. welke elementen worden gebruikt om het leren en werken te verbeteren?
		9

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerlingen moeten bij hun wiskundevorming een aantal vaardigheden ontwikkelen. Voor de duidelijkheid werden ze gescheiden geformuleerd. Dit betekent echter niet dat ze altijd zo gescheiden voorkomen. In een wiskundig leerproces wisselen ze voortdurend af.

Het is belangrijk te beseffen dat vaardigheden maar bereikt worden doorheen een proces van langere duur. Een aantal vaardigheden werden aangezet in het basisonderwijs en in de eerste en de tweede graad. Ze moeten verder uitgewerkt worden in de derde graad.

Vaardigheden worden niet automatisch gegenereerd door de ermee verwante leerinhouden. Er moet bewust aandacht aan besteed worden. Dit betekent niet noodzakelijk dat ze in afzonderlijke lessen gepresenteerd moeten worden. Ze moeten precies meermaals bij het spontaan gebruik geëxpliciteerd worden.

Een aantal vaardigheden winnen aan belangrijkheid in functie van de vervolgopleiding van de leerlingen of van hun latere beroepsloopbaan.

1 REKENVAARDIGHEID

In de derde graad moeten een aantal rekenvaardigheden paraat beschikbaar blijven, bijv. het rekenen met formules, het rekenen met functievoorschriften en bij gebruik in de statistiek. Daarnaast zijn rekenprocedures vereist voor het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels. Of het nu gaat over effectief rekenen of rekenprocedures, wiskunde kan daartoe niet gereduceerd worden. Ze zijn slechts *middelen* om problemen op te lossen. En precies daarbinnen krijgen ze hun juiste betekenis. Aan het langdurig oefenen van rekenprocedures in geïsoleerde situaties werd in de vooropleiding weinig aandacht besteed en dat blijft ook zo in de derde graad.

Met de opgang van geavanceerde rekenmachines en gemakkelijk toegankelijke en adequate software kan de aandacht voor het automatiseren van deze technieken en procedures beperkt worden. Het is nu al duidelijk dat wie later nog rekenprocedures nodig heeft, in de praktijk veelal zal gebruik maken van moderne informatie- en communicatietechnologie. Weliswaar is inzicht nodig in de precieze werking van de gebruikte procedures. Het gebruik van een rekenmachine of een computer mag het inzicht in de noodzakelijke basisvaardigheden dus niet verminderen. Maar er zal minder aandacht besteed worden aan de manuele beheersing ervan. Ook de kritische houding ten aanzien van wat op het scherm van een toestel verschijnt moet verworven worden.

Anderzijds bieden rekenmachines nieuwe mogelijkheden. Praktische problemen die tot nu toe niet binnen het bereik van het secundair onderwijs lagen, omdat de berekeningen (bijv. bij het oplossen van vergelijkingen) te ingewikkeld of te moeilijk waren, kunnen nu wel behandeld worden.

2 MEET- EN TEKENVAARDIGHEID

In het onderdeel meetkunde worden de leerlingen geconfronteerd met meetkundeproblemen. Ze maken daarbij best een voorstelling of een schets. Zo kan nog gewerkt worden aan de ontwikkeling van ruimtelijk inzicht en ruimtelijk voorstellingsvermogen.

Ook het lezen en interpreteren van informatie uit grafieken en diagrammen kan onderhouden worden bij het oplossen van problemen, o.m. in het onderdeel statistiek, door die aan te bieden in allerlei presentaties. Bij de studie van reële functies krijgt het begrip grafiek meer wiskundig gehalte. Leerlingen moeten vaardig worden in het lezen van de informatie die hierin verstrekt wordt. Ze moeten probleem, grafiek en voorschrift met elkaar kunnen verbinden.

Grafische rekenmachines en wiskundige software bieden de mogelijkheid om van bij de aanvang van de studie van functies de grafiek er bij te betrekken. Leerlingen kunnen de invloed van parameters op het verloop zelf onderzoeken. Grafische rekenmachines kunnen als een veredelde pen een meerwaarde brengen aan de behandelde leerinhoud, zonder dat ze een aantal basisvaardigheden overbodig maken. Zo dienen leerlingen toch kritisch om te springen met de getoonde resultaten, bijvoorbeeld de begrensdheid inzien van het uitleesvenster of een snelle controle uitvoeren (cf. het schatten bij het rekenen) aan de hand van een nulpunt of van enkele specifieke punten, het stijgen en dalen van de grafiek, eventueel het asymptotisch gedrag.

3 WISKUNDIGE TAALVAARDIGHEID

Wiskunde is uitgegroeid tot een wetenschap waarin begrippen en eigenschappen welomschreven moeten worden. Daartoe wordt de omgangstaal vaak verengd tot een meer *specifieke vaktaal* met eigen regels.

Begrippen, eigenschappen, procedures en wiskundige verbanden worden erin omschreven met behulp van typische *vaktermen* (bijv. vierkantswortel, evenredig, richtingscoëfficiënt, stelsel, evenwijdig met, middelloodlijn, ligt op gelijke afstand van, histogram, ...). Soms moet een onderscheid gemaakt worden tussen de wiskundige en de dagelijkse betekenis van een term, waarbij de wiskundige betekenis meestal minder vaag omschreven wordt. In de omschrijving van de begrippen en de formulering van eigenschappen worden naast vaktermen specifieke *kernwoorden* gebruikt, die wijzen op het veralgemeningsproces, verbanden, samenhang, ... (bijv. gelijk aan, als ... dan, daaruit volgt, alle, sommige, ...). De wiskundetaal kent vanuit haar voorgeschiedenis een sterke *formalisering* en *symbolisering* die snelle communicatie en universalisering mogelijk maakt, maar die wiskunde voor sommige leerlingen precies zo moeilijk toegankelijk maakt. De eisen die gesteld worden aan deze formalisering zullen uiteraard toenemen naarmate de leerling voor een hoger aantal wekelijkse lestijden wiskunde kiest. Naast de verbale taal is in wiskunde de specifieke *visuele taal* van tekeningen en wiskundige voorstellingen van belang. Een bijzondere vorm van visueel geordend aanbieden van informatie is die in tabelvorm.

Buiten de vaktaal waarmee wiskunde opgebouwd wordt, moeten leerlingen de *beschrijvende taal* blijven hanteren waarin over het wiskundig handelen gesproken wordt (met termen zoals definitie, eigenschap, kenmerk, verklaar ..., bereken..., los op ..., construeer ..., vraagstuk).

Tenslotte, reële problemen worden meestal niet rechtstreeks in de wiskundetaal gesteld. Een belangrijke vaardigheid is het omzetten, het *vertalen* van de omgangstaal naar de wiskundige vaktaal.
In een actief leerproces krijgen de leerlingen heel wat kansen om de verschillende communicatieve vaardigheden (zowel lezen, luisteren, spreken als schrijven) te hanteren en ze toe te passen op wiskundige situaties. In communicatie met andere leerlingen kunnen voorbeelden en tegenvoorbeelden van begrippen en eigenschappen besproken worden, wat de begripsvorming ondersteunt. Speciale aandacht kan gaan naar de betekenis van de wiskundige vaktermen en kernwoorden. De leerlingen moeten leren de geëigende vaktermen voldoende correct te gebruiken. Ze moeten vertrouwd geraken met strengere eisen die aan wiskundige wendingen worden gesteld, zonder dat dit hier een minder zware didactische aanpak in de weg staat. Leerlingen moeten leren hun ervaringen, bevindingen, vermoedens, besluiten en oplossingen te verwoorden. Precies in het verwoorden van hun gedachten en hun inzicht kunnen ze beter de tekortkomingen ervan ervaren en daardoor hun inzicht verdiepen.

Omdat wiskundige informatie visueel kan overgebracht worden, moet aandacht besteed worden aan het lezen en interpreteren van visuele informatie (bijv. op tekeningen in de meetkunde of informatie op een grafiek of een diagram in de statistiek). Het hanteren van een schets of een nauwkeurige tekening als middel tot communicatie moet aangemoedigd worden. Het maken van een meer abstracte of formele redenering zal ondersteund worden door het redeneren op figuren.

Bijzondere aandacht moet besteed worden aan het verwerven van de leesvaardigheid bij het lezen van de tekst van opgaven, problemen en vraagstukken. Vaak is deze moeilijkheid voor de leerlingen groter dan het uitvoeren van gekende rekentechnieken. Aan deze belangrijke stap, noodzakelijk bij het analyseren van problemen en het formuleren van vermoedens, moet bijzondere aandacht besteed worden.

4 DENK- EN REDENEERVAARDIGHEDEN

Met denk- en redeneervaardigheden worden onder meer bedoeld: abstraheren (bij de begripsvorming), een vermoeden formuleren, veralgemenen (ontdekken van een eigenschap), analyseren, synthetiseren, structureren, ordenen, analoog werken, argumenteren, bewijzen. Het gaat om meer dan het kunnen bewijzen van eigenschappen.

Vanuit het actief onderzoeken van relaties tussen begrippen worden leerlingen geconfronteerd met vele vormen van beweringen en vermoedens. Niet elk intuïtief vermoeden leidt tot een 'eigenschap', niet elke bewering zal blijken juist te zijn, veralgemeenbaar, ... Daarom is het zinvol bij de besluitvorming aandacht te besteden aan de argumenten die ervoor kunnen gegeven worden. Ook bij het actief oplossen van problemen zullen de leerlingen hun oplossing of hun redenering op een of andere wijze moeten argumenteren.

Het verwerven van deze redeneervaardigheid vraagt een geleidelijke en geduldige aanpak. Het is zinvol aandacht te besteden aan de verschillende fasen van het opbouwen van een redenering of een bewijs, o.m. het redeneren op een tekening, het argumenteren van delen van een redenering (bijv. het expliciteren van gegeven en vraag), het inzien van en/of zelf ontdekken van de kernidee uit een redenering, het maken van redeneringen in analoge situaties, het zelf uitschrijven van een behoorlijk geordende verklaring.

5 PROBLEEMOPLOSSENDE VAARDIGHEDEN

Leerlingen moeten vaardigheid verwerven in het zelfstandig oplossen van problemen. Het bevorderen van dit probleemoplossend denken is een van de voornaamste opdrachten van leerkrachten wiskunde. De transferwaarde van deze vaardigheden naar andere vakken kan zeer groot zijn. Probleemoplossende vaardigheden zijn een essentiële troef in de studie- en beroepsloopbaan van leerlingen.

De meest zinvolle aanpak lijkt die van een volgehouden *integratie* ervan *in het normale lesgebeuren*. Leerlingen zullen deze vaardigheden maar verwerven doorheen een actief proces van zich vragen stellen, patronen ontdekken, antwoorden zoeken en onderzoeken, voorbeelden en tegenvoorbeelden opzoeken, vraagstelling vereenvoudigen, voorstellen analyseren, testen en bijsturen, vermoedens argumenteren, ...

Belangrijk is dat de leerlingen aantrekkelijke, haalbare problemen aangeboden krijgen. Vooral succeservaring zal leerlingen aanzetten om nieuwe en moeilijkere problemen aan te pakken. Leerlingen moeten evenwel problemen leren ‘zien’. Daarom zullen geregeld open problemen, weliswaar haalbaar op het niveau van de leerlingen, aangeboden worden. Problemen moeten niet noodzakelijk altijd buiten de wiskunde gezocht worden. Ook wiskundige situaties kunnen als aantrekkelijke problemen gepresenteerd worden.

Het verwerven van probleemoplossende vaardigheden is een lang en arbeidsintensief proces. Daarom moet de aanpak in de derde graad aansluiten op de inspanningen die al in de eerste en de tweede graad werden gedaan. Zo kan men terugvallen op verschillende stappen die voor leerlingen misschien al vertrouwd zijn.
In de eerste plaats zal aandacht besteed worden aan een goede *probleemstelling*. Het probleem moet voor de leerlingen duidelijk zijn (dit kan bijvoorbeeld door de leerlingen het probleem in eigen woorden te laten stellen). Als het gaat om het onderzoeken van verbanden of eigenschappen moet dit leiden tot een duidelijke formulering van een vermoeden of hypothese.

Daarop volgt het *analyseren* en/of het *mathematiseren*. Dit betekent dat de leerlingen de wiskundige probleemstelling kunnen herkennen in het gestelde probleem of in de opgave (bijv. het gaat er om het maximum van een functie te bepalen in een interval). Dit betekent onder meer dat ze bij een situatie gegeven en gevraagde kunnen bepalen, kwantificeerbare elementen kunnen opzoeken en wiskundig vertolken, relaties tussen elementen (gegevens onderling, gegevens en gevraagde) kunnen leggen en wiskundig vertolken, uit te voeren bewerking(en) kunnen bepalen. In deze fase worden vaak *zoekstrategieën* of *heuristische methoden* gebruikt. In een leerproces van probleemoplossende vaardigheden is het belangrijk deze te expliciteren. Bij een complexer probleem is het zinvol in deze fase een planmatige aanpak te voorzien en de uitvoering van het plan verderop te bewaken.
Daarop volgt het *uitschrijven van een oplossing, het berekenen van het resultaat of het uitschrijven van een verklaring*, het maken van een *(reken)proef*, het maken van een *realiteitsproef* (kan dit resultaat in deze context) en het formuleren van een *antwoord* op het gestelde probleem.

Heuristische methoden
Voorbeelden van veel gebruikte heuristische methoden zijn:
- gegeven en gevraagde wiskundig expliciteren;
- bij een gegeven situatie een schets of een tekening maken;
- bij een gegeven situatie een voorbeeld of een tegenvoorbeeld geven;
- bij een situatie bijzondere gevallen onderzoeken;
- gebruik maken van analogie, symmetrie, …;
- een eenvoudigere probleemstelling onderzoeken;
- een of meer veranderlijken in het probleem constant houden;
- een gestelde voorwaarde laten vallen.

Heuristische methoden worden veelvuldig gebruikt. Belangrijk is ze bewust te laten ervaren en te expliciteren op het ogenblik dat ze spontaan gebruikt worden. Een actieve aanpak van het leerproces laat toe dat leerlingen hierover onderling en met de leerkracht informatie uitwisselen. Met het oog op het verwerven van een hogere graad van zelfwerkzaamheid bij de leerlingen kan een aantal complexere oefeningen aangeboden worden waarbij doelbewust het inzicht in het gebruik van heuristische methoden wordt nagestreefd.

Bij het oplossen van problemen worden de leerlingen geconfronteerd met het toepassen van hun kennis in diverse situaties. Het is belangrijk te beseffen dat probleemoplossende vaardigheden en heuristische methoden maar effectief zullen werken, als de leerlingen over een efficiënte kennisorganisatie beschikken. Het oplossen van problemen kan leerlingen precies motiveren deze kennisorganisatie te onderhouden.

De *rol van de leerkracht* kan erin bestaan leerlingen individueel tot nadenken aan te zetten, discussie over oplossingen uit te lokken en hierbij een kritische houding aan te bevelen. De leerkracht kan verkiezen minder inhoudelijke hulp aan te reiken, maar eerder te verwijzen naar het gebruik van heuristische methoden en de beschikbare kennisorganisatie (niet naar specifieke kennis). De leerkracht zou dezelfde werkwijze kunnen hanteren bij het klassikaal opstellen van bewijzen van eigenschappen en het opbouwen van redeneringen. Ook is het zinvol dat de leraar aan het eind van een oplossingsproces of redenering de denkstappen eens controlerend overloopt en de gebruikte heuristische methoden eens expliciet laat formuleren of bevragen.

Het verdient aanbeveling dat voldoende differentiatie in de opdrachten wordt nagestreefd, omdat in de verwerving van probleemoplossende vaardigheden het verschil tussen de leerlingen erg groot kan zijn. Voor wiskundig sterke leerlingen kan men bijv. vlugger naar open problemen grijpen.

6 ONDERZOEKSVAARDIGHEDEN

De leerlingen worden geconfronteerd met onderzoeksopdrachten (bijvoorbeeld in het kader van de geïntegreerde proef) die ze zelfstandig of in groep moeten verwerken. Een aantal vaardigheden die ze daarbij kunnen hanteren zijn al gedeeltelijk aan bod gekomen bij het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden. Nu komen er uitdrukkelijker de regulerende en de reflectieve onderdelen bij.

Een onderzoeksopdracht begint met het uitklaren van de onderzoeksvraag. Belangrijk voor de haalbaarheid, zeker in de beginfase, is deze voldoende te beperken en af te bakenen, anders riskeren de leerlingen in een te groot project verloren te lopen. Dat kan door de onderzoeksopdracht op te splitsen in deelvragen (wie, wat, waar, wanneer, waarom, hoe, welke, waarmee, waartoe, …).

Interessant is dat leerlingen ook gevoeligheid ontwikkelen voor de soort vraag die ze onderzoeken, bijv.

- beschrijven of exploreren van een situatie,
- vergelijken en ordenen van situaties,
- onderzoek gericht op verklaring of het theoretisch organiseren,
- evaluatie- of toetsingsonderzoek,
- onderzoek gericht op voorspellingen
- en onderzoek met het doel een concreet probleem op te lossen.

Afhankelijk van het soort onderzoek zal men vaak ook een andere planning volgen en op een andere wijze gegevens verzamelen, beoordelen of interpreteren. Vaak hanteert men ook andere denkmethoden, bijv.

- reproductief denken,
- abstraherend denken,
- inductief denken,
- reductief denken
- of deductief denken.

Leerlingen zullen in deze beginfase allicht maar met de meest eenvoudige vormen van dit uitgebreid palet van onderzoeksmogelijkheden geconfronteerd worden.

Na het formuleren van een vermoeden of sterker een hypothese zal men de vraag meestal analyserend uiteenrafelen, gegevens verzamelen in functie van de vraag, om te komen tot verificatie. Daarbij kunnen allerlei zoeksystemen gehanteerd worden (bibliotheek, media, internet).

Het is niet alleen belangrijk te weten wat onderzocht zal worden, men zal er ook een concrete werkorganisatie voor opzetten. Een dergelijk plan van aanpak bestaat uit een onderzoeksplan en een tijdplan. In het onderzoeksplan staan de deelvragen die men geselecteerd heeft, de vermoedens en hypothesen, de methoden, de bronnen en hulpmiddelen. Een tijdplan is zinvol om de concrete organisatie op te volgen wat betreft de beschikbaarheid van materiaal en hulpmiddelen, verwerkingstermijnen, eventuele taakverdeling en afspraken.

Belangrijk is ook het proces af te sluiten met een reflectiefase, waarin de leerling zelf terugkijkt op het verloop van het proces en er zijn leerervaringen bij formuleert en eventueel een werkplan opstelt om moeilijkheden en tekorten op te vangen.

7 LEERVAARDIGHEDEN

Aan het verwerven van leervaardigheden moet in de derde graad nog steeds bewust gewerkt worden. Daarbij moet steeds meer aandacht gaan naar het zelfstandig leren van de leerlingen. Belangrijk is dat de bijdrage van wiskunde kadert in een bredere aanpak van de problematiek leren leren in de school en de groei naar een zelfverantwoord leren. Omdat het 'de leerling' is die adequate technieken moet verwerven, zal over de vakken heen toch een zekere eenvormigheid nagestreefd worden. Algemene technieken worden uiteraard vakspecifiek vertaald.

Bij het verwerven van wiskunde worden een aantal *leervaardigheden* geactiveerd.
Voorbeelden zijn
- het inprenten (notaties, symbolen, formules, noodzakelijke basiskennis, bijv. begrippen en eigenschappen);
- het gebruik van de vormkenmerken van een tekst (titels, subtitels, afbeeldingen, schikking kaders, lettertype, tekstmarkeringen);
- de aandacht voor het begrijpen en analyseren van het geleerde;
- het opnieuw opzoeken en zo nodig inoefenen van voorkennis (het aanleggen of gebruiken van een vademecum kan hierbij ondersteunend werken);
- het verdiepen van de leertekst in leerboeken of notities (zich vragen stellen bij de leerinhoud, de tekst structureren bijv. met tekstmarkeringen, kleur, ..., het synthetiseren van de kennis, o.m. het bijhouden van een kennisschema);
- het gebruiken van 'informatiebronnen' (een inhoudstafel, een register, een samenvatting van de leerinhouden in het leerboek, een vademecum, een handleiding van de rekenmachine);
- het zichzelf sturen bij het leren, bijv.
  - de keuze van het verwerkingsproces eigen aan de wiskundige leerinhoud,
  - het oordeelkundig gebruiken van een antwoordblad, een correctiesleutel,
  - het plannen van de studietijd,
  - het onderzoeken van de gemaakte fouten (bijv. door de eigen werkwijze te vergelijken met die van anderen, aangeven waarom iets fout gegaan is) en hoe die kunnen vermeden worden.

Belangrijk is te beseffen dat *tijdens het leerproces* zelf al sterk kan bijgedragen worden tot het realiseren van leervaardigheden. Zo kan een leerproces waarin de leerling actief betrokken wordt bij het bevragen van de leerinhouden, die leerling leren 'vragen stellen'. Het 'analyseren' van een definitie of eigenschap in de klas ondersteunt het analyseren tijdens het instuderen. Het gebruik van een ordelijk bordschema met het geëxpliciteerd (niet automatisch) gebruik van verdiepingstechnieken (kleur, kaders, structuur) zal leerlingen aanzetten dit te doen. Het vergelijken van het bordschema met de neerslag van de leerstof in het leerboek (veel meer dan het aanduiden van de leerstof) en het wijzen op de vormkenmerken ervan ondersteunt het leren. Het hernemen van de structuur bij de aanknopingsfase van de les, het laten raadplegen van overzichten van leerinhouden (bijv. samenvatting in het leerboek en/of in een beschikbaar of eigenhandig aangelegd vademecum) zal hen telkens opnieuw confronteren met structurering en synthese van hun kennis en hen meteen leren hun voorkennis zelfstandig op te zoeken en aan te vullen. De wijze waarop de leerkracht omgaat met fouten en deze aangrijpt als leerkansen, kan leerlingen de waarde leren van het onderzoeken van hun fouten. De wijze waarop leerlingen betrokken worden bij het leerproces kan hun zelfwerkzaamheid en hun verantwoordelijkheid voor het eigen leren versterken.

8 REFLECTIEVAARDIGHEDEN

Leerlingen moeten leren systematisch reflectie in te bouwen bij het uitvoeren van opdrachten en i.h.b. bij het leren. Niet alleen het verwerven van nieuwe kennis en inzichten, het vinden van de oplossing van een probleem of het uitvoeren van een leertaak zijn belangrijk, maar ook de wijze waarop het proces verlopen is, biedt belangrijke leerkansen. Leerlingen moeten dus leren stilstaan bij het proces zelf. Na het handelen, volgt het terugblikken op dat handelen, waarbij men zich bewust wordt van de essentiële elementen ervan, de goede ervaringen en de problemen die zijn opgetreden. Daarbij zal de leerling, eventueel gecoacht door de leraar, alternatieven formuleren en selecteren vanuit bezinning en overleg, om ze in een nieuwe situatie uit te proberen.

Voorbeelden van reflectieve vragen zijn:

- Wat was het doel, wat wilde ik bereiken?
- Hoe is het proces concreet verlopen?
    - Hoe kijk ik zelf terug op het proces?
- Welke problemen deden zich effectief voor en hoe kan ik dit positief omschrijven?
- Welke oplossingen, alternatieven zijn er?
    - Welke voordelen en nadelen zie ik al?
- Hoe stuur ik mijn leervaardigheden bij vanuit deze ervaring?

Het is evident dat dergelijke inzichten niet vanzelfsprekend automatisch worden voortgebracht. Ze kunnen bijvoorbeeld als werkwijze aan bod komen bij meer klassikaal verwerkte opdrachten of zelfs na een klassikale les. Er kan dan klassikaal gereflecteerd worden, bijvoorbeeld aan de hand van voornoemde vragen. Toch lijkt een individuele aanpak met een meer persoonlijke feedback van de leraar zinvoller. Dat veronderstelt weliswaar een van nabij opvolgen van het leerproces van de (individuele) leerling, bijv. vanuit een observatieschema. De rol van de leraar verschuift hierbij dus van die van alwetende informatiebron naar begeleider en ondersteuner van het leerproces.

5.1.2 Attitudes en opvattingen

LEERPLANDOELSTELLINGEN

De leerlingen ontwikkelen

7	zin voor nauwkeurigheid en orde, o.m. - een houding van gecontroleerd uitwerken en terugkijken op uitgevoerde opdrachten.	
8	zin voor helderheid, bondigheid, volledigheid, eenvoud en doelmatigheid van de gebruikte wiskundetaal, o.m. - de ervaring dat gegevens uit een probleemstelling toegankelijker worden door ze doelmatig weer te geven in een geschikte wiskundige representatie.	
9	kritische zin, o.m. - een kritische houding tegenover de eigen berekeningen, beweringen, handelingen, ...; - een reflectieve houding ten aanzien van gemaakte keuzen voor representatie en oplossingstechnieken, bijv. het gebruik van ICT; - een kritische houding tegenover de mogelijkheden en de beperkingen van het gebruik van wiskunde - i.h.b. kritisch staan tegenover het gebruik van statistiek in de media..	5 6 8 9 17
10	zelfvertrouwen, zelfstandigheid, doorzettingsvermogen en doelmatigheid bij het aanpakken van problemen en opdrachten.	9
11	zelfregulatie, o.m. - een onderzoeksgerichte houding ten aanzien van feiten, opgaven en problemen; - het oriënteren, plannen, uitvoeren en bewaken van een oplossingsproces.	1 9
12	zin voor samenwerking en overleg, o.m. - de ervaring dat ze hun mogelijkheden kunnen vergroten door samenwerking met anderen; - appreciatie voor een andere oplossing of aanpak.	
13	waardering voor wiskunde door inzicht in de bijdrage ervan in de culturele, historische en wetenschappelijke ontwikkeling, o.m. - voorbeelden geven van het gebruik van wiskunde in andere vakgebieden en in de maatschappij; - zin voor verwondering en bewondering voor de elegantie van een redenering of een oplossing.	7

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Doorheen de wiskundevorming kunnen leerlingen een aantal attitudes en in het bijzonder leerattitudes verwerven. Omdat zoals bij leervaardigheden het de leerling is die attitudes moet verwerven, zal over de vakken heen een zekere eenvormigheid nagestreefd worden en moet de bijdrage van wiskunde *kaderen in een bredere attitudevorming in de school*.

Het is belangrijk te beseffen dat attitudes maar bereikt worden doorheen een *proces van langere duur*. Daarom zullen attitudes ook in de derde graad nog nagestreefd worden.

9 ZIN VOOR NAUWKEURIGHEID EN ORDE

Zin voor nauwkeurigheid en orde kan nagestreefd worden bij de ontwikkeling van reken-, meet- en tekenvaardigheid. De leerlingen moeten beschikken over de gewoonte op hun uitvoeringsproces terug te kijken als een vorm van *controle*. Ze kunnen zo vlugger tot nauwkeurige resultaten komen.

Omdat de graad van complexiteit van de wiskunde en de opdrachten toeneemt, moet nauwkeurigheid nagestreefd worden bij het gebruik van notaties en symbolen, bij het verwoorden van definities en eigenschappen (zowel schriftelijk als mondeling). Het leerproces in de klas moet voldoende kansen bevatten om terugkoppeling te geven over antwoorden en oplossingen van leerlingen zelf. Het is precies in het toetsen van hun onvolmaakte antwoord dat de leerlingen de kans krijgen het te corrigeren.

Ordelijk en systematisch werken is een belangrijke leerhouding. Ze kan bijvoorbeeld bijgebracht worden bij het noteren, het maken van oefeningen en het aanpakken van problemen.

10 ZIN VOOR KWALITEIT VAN DE WISKUNDIGE REPRESENTATIE

Leerlingen moeten hun gedachten en hun inzicht behoorlijk leren verwoorden. Het leerproces in de klas moet daartoe voldoende kansen bieden. Vanuit de vaak intuïtieve verwoording in de fase van de begripsvorming of het vermoeden van een eigenschap moeten de leerlingen geleidelijk aan een correcte wiskundetaal hanteren. Een wiskundige formulering is vaak helder, bondig en van alle ballast ontdaan. De leerlingen kunnen hierbij ervaren dat het gebruik van dergelijke formuleringen vaak het denkproces helder doet verlopen. Ligt de beknoptheid van symbolische formuleringen voor de hand, dan is een behoorlijke verwoording ervan vaak een probleem. Dit vraagt bijzondere aandacht.

Omdat een zoekproces soms met vraag en antwoord, met gissen en missen en dus niet rechtlijnig ontwikkeld wordt, zal eens het doel bereikt, de uiteindelijke redenering synthetiserend overlopen worden, om een helder inzicht te bekomen. Voor leerzwakke leerlingen biedt dit vaak de gelegenheid terug aan te pikken. Ook bij het oplossen van problemen zal aandacht besteed worden aan het overhouden van een duidelijke synthese. Een heldere oplossing zal meestal overzichtelijk zijn en gemakkelijker te begrijpen. Zowel bij het leerproces van de wiskundige inhouden zelf, als bij het oplossen van problemen zal men bij het synthetiserend overlopen aandacht besteden aan de doelmatigheid van een aanpak door de voor- en nadelen van bepaalde werkwijzen te bespreken.

11 KRITISCHE ZIN

Wiskundevorming moet leiden tot een bevragende, onderzoekende, controlerende, verifiërende houding. Dit wil zeggen dat berekeningen (zowel bij hoofdrekenen en schriftelijk rekenen als bij het gebruik van een rekenmachine), beweringen, argumenten en redeneringen niet zomaar worden aanvaard en overgenomen. Dit slaat op vermoedens, oplossingstechnieken, redeneringen door leerlingen in de klasgroep gebracht ter bespreking. Dit slaat op de zelf gekozen modellen of representaties en op de eigen berekeningen, oplossingen en redeneringen. Bij de keuze van een model of bij een berekening, een redenering, een oplossing van een probleem zijn zowel het proces als het eindproduct van belang. Oog krijgen voor de oplossingsmethode kan leiden tot het leren waarderen van andere oplossingen. Zo kunnen de leerlingen een werkwijze of methode leren waarderen omdat ze eenvoudiger is, minder tijd vraagt, wiskundig helder geformuleerd is, sneller veralgemening toelaat.

Omwille van de plaats die wiskunde inneemt in de vorming (basisvorming versus fundamentele vorming) is het evident dat de verwachtingen ten aanzien van leerlingen hoger mogen liggen, naarmate ze een groter aantal lestijden wiskunde per week hebben. Naarmate men doordringt in de wiskundekennis moet ook de bevragende, onderzoekende, controlerende, verifiërende houding groeien. Ze is onmisbaar bij de verdere ontwikkeling van wiskunde. Gelukkig doen zich ook meer kansen voor om ze te ontwikkelen.

Belangrijk is dat deze onderzoekende houding herkenbaar is in het didactisch optreden van de leerkracht. Zowel de aanbreng van nieuwe leerinhouden als het toepassen van kennis en het oplossen van problemen bieden kansen tot stimulerende klassengesprekken. Leerlingen zullen maar oog krijgen voor het oplossings'proces', als hieraan ook tijdens het onderwijsleerproces voldoende aandacht besteed wordt en als ze bijvoorbeeld gestimuleerd worden verschillende oplossingen of antwoorden te vergelijken.

Doorheen het ontwikkelen van een dergelijke kritische houding worden leerlingen geconfronteerd met de mogelijkheden en de beperkingen van het gebruik van wiskunde in de praktijk. Dat is een belangrijke houding voor wiskundegebruikers, die de meeste leerlingen in de toekomst zullen zijn. Een gezonde relativering naast de verwondering over de mogelijkheden van de wiskunde kan bij leerlingen leiden tot een gemotiveerde, evenwichtige opvatting over wiskunde.

12 ZELFVERTROUWEN EN ZELFSTANDIGHEID

Bij vaardigheden werd uitvoerig ingegaan op het aanpakken van problemen. Het is niet moeilijk in te zien dat het verwerven van probleemoplossende vaardigheden een uitgelezen kans biedt om zelfwerkzaamheid en doorzettingsvermogen te verwerven.

Een goede aanpak voor deze leerprocessen zal de leerlingen een solide basis geven waarop zijn kunnen terugvallen. Succeservaring zal daarbij het zelfvertrouwen en de motivatie van leerlingen onderbouwen. Leerlingen geraken vlug ontmoedigd als ze geen succes kennen. Daarom moeten ze aangemoedigd worden om eenzelfde stap meermaals te hernemen. In een gedifferentieerde aanpak kunnen oefeningen zo aangeboden worden dat voor de ene leerling de stappen niet te groot zijn en dat voor een andere leerling kan geopteerd worden voor een meer open vorm van aanbieden, zodat hij leert een probleem te ontdekken en te stellen.

Het is evident dat leerlingen fouten zullen maken. Het is belangrijk in te zien dat fouten maken inherent deel uitmaakt van het leerproces. Een goede leerkracht zal deze aanwenden als belangrijke leerkansen. Een aanmoedigende en respectvolle benadering zal leerlingen zeker stimuleren en uiteindelijk leiden tot betere resultaten.

13 ZELFREGULATIE

Bij het oplossen van problemen moeten de leerlingen over een goede kennisorganisatie beschikken en zoekstrategieën kunnen hanteren. Daarnaast moeten ze hun zoeken en werken gecontroleerd uitvoeren. Dit betekent dat ze zelf hun werk kunnen 'reguleren'. Dit houdt onder meer in dat ze hun resultaat toetsen (bijv. bij een rekenresultaat zowel op juistheid als op realiteitswaarde). Het is echter niet alleen aan het einde van het proces dat 'controle' nodig is. Die kan van bij de aanvang in het oplossingsproces opgenomen worden. Van bij de verkenning van het probleem (de oriëntatie), bij het opmaken van een uitvoeringsplan en bij de uitvoering zelf kan stapsgewijze gewerkt worden en kan elke stap gecontroleerd worden. Zo leidt het aanpakken van problemen tot een onderzoeksgerichte houding en tot methodisch, planmatig en gecontroleerd werken. Bij het opzetten van een redenering, bij het verklaren van een eigenschap kunnen dezelfde regulatietechnieken gevolgd worden.

Het is evident dat leerlingen deze houding maar geleidelijk aan zullen verwerven en dat dit gemakkelijker zal gaan, naarmate deze houding tijdens de leerprocessen in de klas aan bod komt in de werkwijze van de leerkracht.

Met het ontwikkelen van een dergelijke onderzoeksgerichte houding kan wiskunde bijdragen tot een meer algemene vorming. Ze kan overgedragen worden op het aanpakken van andere dan wiskundige problemen. Zo kan ze onder meer leiden tot de leerhouding van methodisch, planmatig en gecontroleerd werken. Op deze wijze kan wiskunde bijdragen tot het verwerven van een kritische houding ten aanzien van het globale eigen denken en handelen.

14 ZIN VOOR SAMENWERKING EN OVERLEG

Een onderwijsleerproces waaraan de leerlingen volwaardig en actief kunnen deelnemen, waarin ze hun bevindingen en hun oplossingen kunnen vergelijken en toetsen aan die van anderen, kan hen een positieve waardering bijbrengen voor samenwerking en overleg. Bij het bespreken van oplossingsmethoden, bij het kritisch onderzoeken van elkaars oplossing kan waardering voor elkaars mening aangeleerd worden en daardoor waardering voor de persoon van de andere zelf.

Bij het uitvoeren van een aantal opdrachten, bijv. het oplossen van bepaalde (ruimer gestelde) problemen, het opzoeken van allerlei historische gegevens, het opzoeken op het internet over wiskundigen, belangrijke wiskundige stellingen, wiskundige illustraties of toepassingssituaties kan de samenwerking gestimuleerd worden door de opdrachten in groep te laten afwerken. Zo kunnen leerlingen aangezet worden tot samenwerking en overleg.

15 WAARDERING VOOR WISKUNDE

Wiskundevorming staat niet los van die van de andere vakken. Wiskunde zelf is doorheen de eeuwen ontwikkeld precies in samenhang met de opvattingen en de problemen van die tijd. Een aantal historische contexten bieden vandaag nog een zinvolle instap om bepaalde wiskundeproblemen en leeronderdelen aan te pakken. Daarom zal die historische context geïntegreerd worden in de aanpak.

Een meer realistische aanbreng en voldoende concrete toepassingen moeten er borg voor staan dat de ontwikkeling van wiskunde bij de leerlingen niet los staat van de wereld rondom hen. Anderzijds biedt wiskunde zelf heel wat kansen om door te dringen tot de essentie van bepaalde problemen en situaties. Door een beter begrijpen kan de verwondering en de bewondering voor de context groeien. De elegante wijze waarop met behulp van wiskunde problemen beschreven en opgelost worden kan op zich al verwondering wekken.

5.2 INHOUDELIJKE DOELSTELLINGEN

5.2.1 Analyse

In de didactische opbouw van de analyse kunnen we zoals aangegeven in *3 Algemeen pedagogisch-didactische wenken* vier kerngedachten onderscheiden: de *betekenis* van de begrippen, de *berekeningen*, de *fundamenten* en de *toepassingen*.

- Het is belangrijk dat de leerlingen een goed inzicht krijgen van de betekenis van de begrippen functie, afgeleide en integraal. Een wiskundig begrip staat voor een geabstraheerd model van een of meerdere (verwante) situaties.
  - Het begrip functie duidt op het verband dat bestaat tussen twee grootheden, tussen twee veranderlijken. Dit verband kan naargelang de situatie beschreven worden door verschillende voorstellingswijzen: beschrijving, tabel, grafiek en voorschrift.

    In de tweede graad werden een aantal functies onderzocht en een begrippenkader aangebracht. Zowel de soorten functies als het begrippenkader worden nu uitgebreid. Daarvoor wordt het best aangesloten bij de didactische aanpak zoals in de vooropleiding. Naarmate de beschreven situatie echter (wiskundig) complexer wordt, zal het rechtstreekse gebruik van de grafiek of het beschrijven vanuit het functievoorschrift toenemen. De leerlingen zijn vertrouwd met een aantal begrippen zoals nulpunt, domein, tekenverloop, extremum, stijgen en dalen. Deze worden verder gebruikt bij de nieuwe functiecategorieën en uitgebreid met begrippen als limiet, asymptoot, afgeleide en integraal. In een eerste benadering zal de klemtoon liggen op een verkenning van de belangrijkste begrippen en het interpreteren van karakteristieken van functies eerder dan op de algebraïsche rekenvaardigheid. Nadien worden deze begrippen meer nauwgezet en formeler omschreven. De technologische hulpmiddelen beïnvloeden niet alleen het didactisch verloop van het leerproces, maar ook de klemtonen die binnen de opbouw gelegd worden.
  - De afgeleide is een maat voor de verandering van een functie op een bepaald ogenblik. In contexten verschijnt de afgeleide onder verschillende gedaanten: afgeleide als helling van een grafiek in een punt, afgeleide als snelheid, afgeleide als marginale grootheid, … Op deze manier krijgt het begrip een grafische, fysische, economische, … betekenis. De fundamentele rol die afgeleiden vervullen bij extremumproblemen, veranderingsprocessen en lineaire benaderingen versterken de betekenis van het begrip.
  - De essentie van het begrip (bepaalde) integraal is ‘oppervlakte onder een grafiek’. Volumes, gemiddelden, arbeid, … kunnen herleid worden tot het berekenen van dergelijke oppervlakten.
- Bij het werken met de wiskundige concepten moeten vaak *berekeningen* uitgevoerd worden. Deze berekeningen kunnen manueel gebeuren of door middel van ICT, waarbij het manuele rekenwerk bewust beperkt wordt tot haalbare en zinvolle gevallen. Zo kan men de vraag stellen of er nog intensief moet geïnvesteerd worden in het verwerven van het manueel manipuleren van ingewikkelde uitdrukkingen. De zo nagestreefde automatismen zullen in de praktijk maar zelden effectief gebruikt worden.
- Eens de begrippen voldoende vertrouwd zijn, wordt binnen deze wiskundevorming aandacht besteed aan de studie van de *fundamenten* en de theoretische preciseringen. Het gaat hier om al de aspecten die nodig zijn om de begrippen in te passen in een samenhangende wiskundige theorie.
- Deze concepten worden *toegepast* om bepaalde situaties te modelleren, te mathematiseren waarbij een betekenisvolle weg gevolgd wordt.
  - Bij mathematiseren speelt de betekenis van de begrippen een belangrijke rol, bijvoorbeeld inzien dat een antwoord op een gestelde vraag kan gevonden worden door een integraal te berekenen.
  - Binnen het gestelde model worden dan wiskundige bewerkingen uitgevoerd.
  - Daarna volgt een interpretatie van het resultaat, waarbij uiteraard weer de betekenis van de gehanteerde concepten optreedt (demathematiseren).

5.2.1.1 Reële functies: basisbegrippen

Aanbevelingen lestijden: **ca. 50 lestijden**

BEGINSITUATIE

De volgende leerinhouden in verband met functies werden in het leerplan a voor de tweede graad behandeld.

- Expliciteren en interpreteren van algebraïsche verbanden tussen grootheden, als die gegeven worden met behulp van een tabel, een grafiek, een formule (o.m. waarden aflezen, extreme waarden aflezen, het globale verloop bespreken).
- Onderzoeken van functies van de eerste graad en de tweede graad in één veranderlijke (grafiek, nulpunt, tekenverandering) met inbegrip van het oplossen van vraagstukken met vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste en de tweede graad in één onbekende en stelsels van vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.
- Onderzoeken van enkele elementaire functies met voorschriften zoals $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$ en $f(x) = \frac{1}{x}$ en het effect van transformaties op de grafiek van deze functies.
- Onderzoek van de functie $f(x) = a.\sin[b(x + c)] + d$.

1 VEELTERMFUNCTIES, RATIONALE EN IRRATIONALE FUNCTIES

BASISDOELSTELLINGEN

AN1	Uit de grafiek van een functie - symmetrieën - nulpunten - tekenverloop - het stijgen en dalen of constant zijn binnen een interval - extrema afleiden.	10
AN2	Vragen beantwoorden i.v.m. probleemsituaties waarvan het functioneel verband gegeven is.	13
AN3	Het domein bepalen van een elementaire rationale en van een elementaire irrationale functie.	
AN4	De nulpunten van een veeltermfunctie, van een elementaire rationale functie en van een elementaire irrationale functie op een verantwoorde wijze bepalen met behulp van rekentechnieken of met ICT.	
AN5	Het tekenverloop bepalen van een veeltermfunctie en van een elementaire rationale functie.	10
AN6	Ongelijkheden op een verantwoorde wijze oplossen met behulp van rekentechnieken of met ICT.	
AN7	De samenstelling van algebraïsche functies onderzoeken.	

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Bij deze inleidende studie van functies speelt het gebruik van ICT een nuttige en begripsverruimende rol.

- Het begrip *'functie'* kan van bij de aanvang een ruimere invulling krijgen: minder uitsluitend nadruk op de formule (vergelijking, voorschrift) maar ook aandacht voor de grafiek en tabellen (koppels functiewaarden). De drie aspecten van het functiebegrip formule of voorschrift (vergelijking), tabel of koppels en grafiek zijn sneller beschikbaar.
- Als een grafiek of tabel sneller ter beschikking is kunnen bepaalde vragen over het verloop veel vroeger aan bod komen; bijvoorbeeld de vraag naar het maximum bij een functie binnen een bepaald interval hoeft niet tot de studie van de afgeleide functie te wachten.

- Het maken van een grafiek of tabel met de hand vraagt veel tijd. Als leerlingen ICT-middelen bij de hand hebben is het beter haalbaar om een grafiek of een tabel te maken. Een verantwoorde keuze van de vensterinstellingen is fundamenteel.
- Bij praktische problemen wordt er vaak met een beperkt domein en bereik gewerkt hoewel dit niet altijd geëxpliciteerd wordt. Het inzien van deze beperkingen is belangrijk voor het bepalen van de instellingen van het venster en het interpreteren van de grafiek.
- Technieken voor het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden komen in een ander daglicht te staan. Het aanleren van deze technieken is geen doel meer op zich. De noodzaak ervan is afhankelijk van de probleemsituaties die men bestudeert.
- Vaardigheden zoals schattend rekenen, lezen van grafieken, schetsen van grafieken, grafisch benaderen van nulpunten, grafisch benaderen van snijpunten, van extreme waarden, … winnen aan belang.
- Dat men snelle feedback kan krijgen van de ICT-middelen is een belangrijk aspect van het gebruik. ICT kan frequent als controlemiddel ingeschakeld worden. Toch moet men voldoende oog hebben voor en rekening houden met de beperkingen van de gebruikte software.

Het onderzoek van probleemsituaties kan op verschillende niveaus behandeld worden, afhankelijk van de aard of de moeilijkheidsgraad van de toepassingen.

- Men formuleert het vraagstuk, waarbij de vergelijking mee geëxpliciteerd wordt. De leerlingen moeten de vergelijking oplossen, een antwoord formuleren en dat antwoord interpreteren in de gegeven situatie.
- Men formuleert het vraagstuk en aan de leerlingen wordt gevraagd zelf de bijbehorende vergelijking op te stellen of het functievoorschrift te bepalen.
- Men formuleert het vraagstuk en geeft de bijbehorende functie en grafiek (al of niet met behulp van ICT). De leerlingen moeten allerlei vraagjes beantwoorden in verband met de context.
- Men formuleert het vraagstuk en de leerlingen moeten zelf de veranderlijke of onbekende kiezen, de vergelijking opstellen, deze vergelijking oplossen en het antwoord formuleren en interpreteren.

Met elementaire rationale en irrationale functies worden rationale functies bedoeld, waarvan de graad van teller en noemer hoogstens drie is en irrationale functies met wortelexponent drie en waarvan de graad van de vorm onder het wortelteken hoogstens drie is. Het begrip nde machtswortel wordt gezien als onderbouw bij exponentiele functies. Bij het bespreken van contexten of het oplossen van vraagstukken kan het voorkomen dat de bijbehorende functie geen elementaire rationale of irrationale functie is. Het rekenwerk kan dan opgevangen worden door het gebruik van beschikbare ICT-middelen.

Met extreme waarden worden niet alleen deze bedoeld waarbij de raaklijn aan de kromme horizontaal loopt. Binnen een interval kunnen andere vormen van extreme waarden zich voordoen, bijvoorbeeld een maximum aan de rand van het interval.

Bijzondere waarden die niet duidelijk af te lezen zijn, kunnen benaderd worden met behulp van ICT.

De voornaamste symmetrieën die onderzocht worden zijn deze t.o.v. de y-as en de oorsprong. De begrippen even en oneven functie kunnen hieraan verbonden worden.

Bij het bepalen van het domein, de nulpunten en het tekenverloop van functies is het gebruik van ICT aan te bevelen, als het algebraïsch rekenen niet tot een snelle oplossing leidt of niet tot een oplossing leidt. Bij veeltermfuncties moeten de leerlingen beseffen dat maar bij een beperkt aantal de nulpunten kunnen gevonden worden steunend op de reststelling en de regel van Horner. Ook moeten de leerlingen goed inzien wanneer het voorschrift van een rationale functie al of niet kan of mag vereenvoudigd worden (cf. domein).

In hoofdzaak wordt het samenstellen van een eerstegraadsfunctie met functies van de vorm $f(x) = x^n$, $f(x) = \sqrt{x}$ en $f(x) = \frac{1}{x}$ onderzocht. Men legt hierbij het verband tussen de kenmerken van de samengestelde functie en deze van de functies waaruit ze is samengesteld.

UITBREIDINGSDOELSTELLINGEN

AN8	De invloed op het functievoorschrift onderzoeken bij het verschuiven van een assenstelsel.	
AN9	Bewerkingen uitvoeren op voorschriften van rationale functies.	
AN10	Irrationale vergelijkingen oplossen die gevormd worden door een som van een eerstegraadsvorm en een elementaire irrationale vorm.	

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de wiskunde tracht men het voorschrift van een functie in zijn meest eenvoudige vorm te noteren. Verschuiven van assenstelsels is hierbij een hulpmiddel. Zo kan men aantonen dat elke eerstegraadsfunctie kan herleid worden naar de vorm $f(x) = ax$, elke tweedegraadsfunctie naar de vorm $f(x) = ax^2$, elke homografische functie naar de vorm $f(x)=\frac{a}{x}$ en elke functie van de vorm $f(x)=\sqrt{ax+b}$ naar de vorm $f(x)=\sqrt{ax}$. Het verband met het verschuiven van een assenstelsel ligt hier voor de hand.

Bij het gebruik van ICT kan het voorkomen dat het voorschrift van een rationale functie niet in zijn meest eenvoudige vorm wordt weergegeven. Daarom is het nodig dat leerlingen zulke voorschriften leren manipuleren. Er moet wel over gewaakt worden dat dit rekenwerk zinvol blijft en dat men niet vervalt in onverantwoord en onnuttig rekenwerk.

Bij het oplossen van irrationale vergelijkingen vormen de bestaans- en de kwadrateringsvoorwaarden een belangrijke inperking van de oplossingen. Uit deze voorwaarden wordt het interval afgeleid waarin de oplossingen moeten voorkomen. Een mogelijkheid is ook dat de irrationale vergelijking wordt opgelost zonder stil te staan bij de nodige voorwaarden. Er moet dan nagegaan worden of de bekomen oplossingen voldoen aan de gegeven vergelijking. Wanneer een oplossing niet voldoet aan de gegeven vergelijking is het wel belangrijk dat de vraag gesteld wordt naar de oorzaak, naar het waarom.

2 EXPONENTIËLE EN LOGARITMISCHE FUNCTIES

AN11	De begrippen nde machtswortel en rationale exponent definiëren.	
AN12	Concrete problemen in verband met exponentiële groei oplossen met betrekking tot beginwaarde, groeifactor en groeipercentage.	13
AN13	De grafiek van de functie $f(x) = p.a^x$ tekenen en domein, bereik, stijgen en dalen en asymptotisch gedrag aflezen.	10 11
AN14	Het begrip ${}^{a}\log b$ definiëren.	
AN15	Eigenschappen bewijzen i.v.m. de bewerkingen met logaritmen.	
AN16	Het verband onderzoeken tussen de functies $f(x) = a^x$ en $g(x) = {}^{a}\log x$ door middel van grafieken en tabellen.	
AN17	De grafiek tekenen van de functie $f(x) = {}^{a}\log x$ en domein, bereik, stijgen en dalen en asymptotisch gedrag aflezen.	10 11
AN18	Exponentiële en logaritmische vergelijkingen op een verantwoorde wijze oplossen met behulp van rekentechnieken of met behulp van ICT.	
AN19	Problemen oplossen en bespreken in verband met exponentiële en logaritmische functies.	

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Voorafgaandelijk aan de studie van exponentiële en logaritmische functies moeten de leerlingen enige kennis hebben over de begrippen nde machtswortel en rationale exponent. Bij nde machtswortel is het voldoende dat het begrip gedefinieerd wordt. Dit kan o.a. gebeuren door het verband te onderzoeken tussen de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^3$ en $g(x) = \sqrt[3]{x}$ en naar analogie tussen de functies $f(x) = x^n$ en $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Uit dit onderzoek kan afgeleid worden dat voor even machtswortels het domein moet beperkt worden en dat de grafiek van een functie en de grafiek van de inverse elkaars spiegelbeeld zijn t.o.v. de bissectrice van de eerste coördinatenhoek.

Nadat men de uitdrukking a^b met $a > 0$ en b rationaal heeft gedefinieerd aanvaardt men dat de rekenregels, die gelden voor gehele exponenten, behouden blijven. Als *uitbreiding* kan men het behoud van enkele van deze rekenregels bewijzen. Het aantal oefeningen i.v.m. deze regels wordt zeer beperkt gehouden.

Lineaire groei werd al bestudeerd ter gelegenheid van de studie van recht evenredige grootheden en van eerstegraadsfuncties. Een korte herhaling kan volstaan. Voorbeelden van exponentiële groeiprocessen zijn o.a. bevolkingsaangroei, kapitaalsvorming bij samengestelde intrest, afname van radioactieve massa, bacteriecultuur, demping van geluid, vrijgekomen energie bij een aardschok, opladen en ontladen van een condensator, …

In verband met exponentiële groei is het aangeraden enig idee te geven over groeifactor en groeipercentage. Bij een toename van p % per tijdseenheid hoort de groeifactor $g = 1 + \frac{p}{100}$. Zo hoort bij een toename van 15 % de groeifactor 1,15 en omgekeerd. Als een hoeveelheid per dag 45 % toeneemt, dan is de groeifactor 1,45. Per week is de groeifactor $1{,}45^7$ of ongeveer 13,48. Dit is een toename van 1248 % $(1348 - 100)$. De groeifactor per uur is $1{,}45^{\frac{1}{24}}$. Dit is ongeveer 1,016. De toename is dus 1,6 %. Bij een afname van p % per tijdseenheid hoort de groeifactor $g = 1 - \frac{p}{100}$. Zo hoort bij een afname van 15 % de groeifactor 0,85 en omgekeerd. Als een hoeveelheid per dag 45 % afneemt, dan is de groeifactor 0,55. Per week is de groeifactor $0{,}55^7$ of ongeveer 0,015. Dit is een afname van 98,5 % $(100 - 0{,}015)$. De groeifactor per uur is $0{,}55^{\frac{1}{24}}$. Dit is ongeveer 0,975. De afname is dan 2,5 %.

Uit de constructie van de grafieken van verschillende functies van de vorm $f(x) = p.a^x$ kan men de voornaamste eigenschappen afleiden. Hierbij is het gebruik van ICT een aanbevolen hulpmiddel.

Het begrip logaritme wordt gedefinieerd als de inverse van een macht die toelaat de exponent te berekenen, als het grondtal en het resultaat van de machtsverheffing gegeven is. Steunend op deze definitie zijn de bewijzen van de eigenschappen niet zo moeilijk. Een aantal eigenschappen worden als basis aangebracht: logaritme van een product (en daarmee samenhangend quotiënt en macht) en de verandering van grondtal. In een context komt de hoofdeigenschap van logaritmische functies vaak op een natuurlijke manier naar voor: bij een exponentiële groei komt de som van de tijden die nodig zijn om een grootheid achtereenvolgens te verviervoudigen en te vervijfvoudigen overeen met de tijd nodig om die grootheid te vertwintigvoudigen: ${}^a\log 4 + {}^a\log 5 = {}^a\log 20$.

Bij het oplossen van concrete problemen in verband met exponentiële groei wordt men geconfronteerd met het oplossen van vergelijkingen. Om vergelijkingen van de vorm $a^{f(x)} = b$ op te lossen maakt men meestal gebruik van logaritmen. Men zal echter niet nalaten aan te tonen dat sommige van deze vergelijkingen op te lossen zijn door te steunen op het begrip exponent. Men kan ook exponentiële vergelijkingen oplossen die herleidbaar zijn tot een tweedegraadsvergelijking.

De logaritmische functie wordt gedefinieerd als de inverse functie van de exponentiële functie. De eigenschappen kunnen afgeleid worden uit de constructie van een aantal welgekozen voorbeelden. Ook hier is het gebruik van ICT aanbevolen. Men zal niet nalaten de nadruk te leggen op de symmetrie t.o.v. de bissectrice van de eerste coördinatenhoek tussen de grafiek van een logaritmische functie en de grafiek van de verwante exponentiële functie. In verband met het oplossen van logaritmische vergelijkingen beperkt men zich tot vergelijkingen die oplosbaar zijn door, steunend op de eigenschappen, alle logaritmen tot hetzelfde grondtal te herleiden. Andere vormen van logaritmische vergelijkingen kunnen besproken worden naargelang ze in contexten voorkomen.

UITBREIDINGSDOELSTELLING

AN20	Logaritmische schalen en logaritmisch papier gebruiken.	

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In wetenschappen en technische toepassingen wordt soms met *logaritmische schalen* en logaritmisch papier gewerkt. Logaritmische schalen worden gebruikt als de verhoudingen van wat men op een as uitzet belangrijk zijn. Logaritmisch papier speelt een belangrijke rol bij het opstellen van het voorschrift van een functie als model voor een tabel cijfergegevens. Blijken de uitgezette punten bij benadering op een rechte te liggen, dan past bij deze gegevens een exponentieel, logaritmisch of machtsfunctiemodel, naargelang van het soort papier.

3 GONIOMETRISCHE EN CYCLOMETRISCHE FUNCTIES

AN21	De formules voor de dubbele hoek en de formules van Simpson opstellen.	
AN22	Periodieke verschijnselen onderzoeken.	
AN23	Het verloop onderzoeken van $f(x) = \cos x$ en $f(x) = \tan x$ op basis van de goniometrische cirkel.	
AN24	Elementaire goniometrische ongelijkheden oplossen.	
AN25	Problemen oplossen en bespreken in verband met goniometrische functies.	13
AN26	De elementaire cyclometrische functies $f(x) = \text{Arc}\sin x$, $f(x) = \text{Arc}\cos x$ en $f(x) = \text{Arc}\tan x$ definiëren.	
AN27	De grafiek van een elementaire cyclometrische functie tekenen en het verloop ervan beschrijven.	

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de tweede graad werden de som- en verschilformules reeds onderzocht. Deze formules kunnen in het kort herhaald worden. De formules voor de dubbele hoek en de formules van Simpson worden dan uit de som- en verschilformules afgeleid. Voor het gebruik van de formules in toepassingen kunnen de leerlingen best gebruik maken van een *formularium* (zie algemene doelstellingen over vaardigheden, o.m. leervaardigheden). Van een beperkt aantal formules kan afgesproken worden dat ze gememoriseerd worden. Gezien de verschuiving van klemtonen naar een meer toepassingsgerichte opvatting van goniometrische functies zal minder aandacht besteed worden aan het aantonen van goniometrische identiteiten. Deze formules kunnen in verband gebracht worden met concrete contexten zoals het samenstellen van trillingen, afbrekende en opbouwende interferentie van golven, knopen en buiken bij staande golven, …

Er zal voldoende aandacht gaan naar allerlei periodieke verschijnselen zoals eb en vloed, in- en uitademen, zaagtand, prooi-roofdiercyclus, reuzenrad, schroefbeweging, afgelegde weg ten opzichte van het beginpunt bij een cirkelvormige beweging, harmonische trilling, dierenpopulatie, elektrocardiogram, bioritme, getalperioden, … Het onderzoek van deze verschijnselen gebeurt bij voorkeur vanuit de grafische voorstelling. Ook kunnen verbanden gelegd worden met bepaalde periodieke verschijnselen die voorkomen in de technische vakken, bijvoorbeeld het op- en neergaan van de zuiger van een motor, de slingerbeweging, ...

In de tweede graad werd de algemene sinusfunctie reeds bestudeerd. De leerlingen maakten daarbij kennis met de begrippen amplitude, periode en verschuiving. Men herhaalt, in het kort, deze begrippen en breidt ze uit naar de cosinus- en de tangensfunctie. Het is aan te raden de grafiek van deze functies ook manueel te tekenen waarbij voldoende functiewaarden worden berekend om een goed inzicht op de golvende lijn te verkrijgen. Uiteraard zal het beeld van de grafiek op het scherm van een computer of een grafische rekenmachine tot een volwaardig beeld bij de leerlingen bijdragen.

In verband met goniometrische ongelijkheden beperkt men zich tot het oplossen van elementaire ongelijkheden zoals bijvoorbeeld $\sin(ax + b) < c$. Het oplossen van deze ongelijkheden wordt grafisch ondersteund door de goniometrische cirkel of door de grafiek.

Bijzondere zorg moet worden besteed aan de inverse relaties van de goniometrische functies die zelf geen functies zijn. Door het domein van de goniometrische functies evenwel te beperken zal men laten inzien dat de inverse relaties van die beperkte functies wel functies zijn. Het is wenselijk hierbij de grafiek van cyclometrische functies uit deze van de rechtstreekse functies af te leiden gebruikmakend van het verband dat er bestaat tussen de grafieken van twee inverse functies in een orthonormaal assenstelsel.

UITBREIDINGSDOELSTELLINGEN

AN28	Niet-elementaire goniometrische vergelijkingen oplossen.
AN29	Het samenstellen van een goniometrische functie na een cyclometrische functie onderzoeken.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de tweede graad heeft men vergelijkingen opgelost van de vorm $\sin(ax + b) = 0$. Buiten het oplossen van deze goniometrische basisvergelijkingen kan men ook vergelijkingen oplossen die herleidbaar zijn tot algebraïsche vergelijkingen, die herleidbaar zijn tot producten of die homogeen zijn in $\sin x$ en $\cos x$. Het is aangewezen de vergelijkingen eerst op te lossen in een bepaalde periode. Daarna kan de oplossing ruimer geïnterpreteerd worden. De grafieken van de bijhorende functies kunnen als hulpmiddel dienst doen. De grafische oplossing zal de interpretatie van een berekend resultaat merkelijk vereenvoudigen. Het gebruik van ICT is hierbij aanbevolen.

Binnen de studie van afgeleiden en integralen kan het voorkomen dat de samenstelling van een goniometrische functie na een cyclometrische functie moet worden vereenvoudigd.

5.2.1.2 Afgeleiden en integralen

Een eerste mogelijkheid van didactische aanpak en volgorde is de begrippen per functieklasse te bespreken. Men bestudeert dan in de eerste fase zowel afgeleide als integraal van een veeltermfunctie. Nadien kan men achtereenvolgens de gekende begrippen onderzoeken voor exponentiële en logaritmische functies, goniometrische functies, rationale en irrationale functies.

De voordelen van deze aanpak zijn o.a.
- in de beginfase zijn de berekeningen nog eenvoudig en toch kunnen allerlei toepassingen behandeld worden;
- de begrippen kunnen vlugger toegepast worden in een aantal technische vakken;
- in de beginfase is het niet noodzakelijk de toepassingen te beperken tot veeltermfuncties; als de leerlingen de afgeleide of de bepaalde integraal niet manueel kunnen berekenen, kunnen ze gebruik maken van ICT;
- meer ingewikkelde rekenregels komen pas aan bod bij die functies waar ze nuttig voor zijn;
- de begrippen keren meermaals terug in de loop van de derde graad.

Een tweede mogelijkheid is de begrippen afzonderlijk te behandelen voor de verschillende functieklassen m.a.w. eerst het begrip limiet onderzoeken binnen de verschillende functieklassen, dan het begrip afgeleide en tenslotte het begrip (bepaalde) integraal.

Aanbeveling lestijden: **ca. 80 lestijden**

BASISDOELSTELLINGEN

AN30	De limiet van een functie $y = f(x)$ onderzoeken voor x gaande naar a.
AN31	Het gedrag op oneindig van een functie onderzoeken.
AN32	Onderzoeken wanneer een functie continu is in een punt a of over een interval.
AN33	Het asymptotisch gedrag van een functie onderzoeken.

AN34	Differentiequotiënten gebruiken als maat voor verandering van de functiewaarde over een interval.	12
AN35	Ogenblikkelijke verandering mathematiseren tot het begrip afgeleide.	12
AN36	Met behulp van het intuïtief limietbegrip het verband leggen tussen het begrip afgeleide, het begrip differentiequotiënt en de richting van de raaklijn aan de grafiek.	12
AN37	De afgeleide functie van een functie op een verantwoorde wijze berekenen met behulp van rekentechnieken of met ICT.	
AN38	De afgeleide van een product van functies berekenen.	
AN39	De afgeleide van een macht van een functie berekenen.	
AN40	De vergelijking opstellen van een raaklijn in een punt aan de grafiek van een functie.	
AN41	De betekenis van de afgeleide functie gebruiken om te bepalen - in welke intervallen een functie stijgt of daalt, - voor welke voorwaarde(n) een functie een extremum bereikt.	
AN42	De betekenis van de tweede afgeleide functie gebruiken om te bepalen - in welke intervallen de grafiek van een functie hol of bol is, - voor welke waarde(n) de grafiek van een functie een buigpunt heeft.	
AN43	Problemen oplossen en bespreken waarbij het begrip afgeleide gebruikt wordt.	
AN44	Een primitieve functie van een functie op een verantwoorde wijze bepalen met behulp van rekentechnieken of met ICT.	
AN45	Het verband aantonen tussen het begrip bepaalde integraal van een functie en de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van die functie en de horizontale as.	
AN46	Het verband leggen tussen het berekenen van een bepaalde integraal van een functie en een primitieve functie van die functie.	
AN47	Het begrip bepaalde integraal gebruiken bij het bepalen van oppervlakten en inhouden.	
AN48	Problemen oplossen en bespreken waarbij het begrip integraal gebruikt wordt.	

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Het begrip limiet kan intuïtief aangebracht worden via tabellen en grafieken. Hierdoor leren de leerlingen grafisch en numeriek nadenken. Dit numeriek denken helpt bijvoorbeeld om in te zien dat bij het berekenen van limieten van veeltermfuncties in oneindig het voldoende is te kijken naar het gedrag van de hoogstegraadsterm. Door het opstellen van tabellen met stijgende x-waarden kan men aantonen dat bij het berekenen van limieten in oneindig van rationale functies enkel de hoogstegraadstermen van teller en noemer het eindresultaat bepalen. Ook bij het onderzoek van de onbepaalde vormen $\frac{a}{0}$ en $\frac{a}{\infty}$ kan men gebruik maken van tabellen. Voor het onderzoek van de vorm $\frac{0}{0}$ kan op de reststelling gesteund worden. Wanneer het rekenwerk voor het bepalen van de limiet van een functie te ingewikkeld wordt, is het aan te raden resoluut voor het gebruik van ICT te kiezen. Het begrip continuïteit in een element van het domein van een functie komt tot stand door de limiet van de functie in dat element te vergelijken met de functiewaarde. Hierdoor wordt de grafische betekenis van continu doorlopende grafiek mogelijk.

De voornaamste algemene doelstellingen bij de studie van het begrip afgeleide bij functies zijn:
- een betekenisvolle ontwikkeling van het begrip nastreven;
- dit begrip gebruiken bij de studie van de grafiek;
- het begrip toepassen om in een probleemstelling bijzondere waarden en veranderingen op te zoeken.

Het begrip afgeleide moet in essentie gekoppeld worden aan het beschrijven van verandering.
- Het begrip differentiequotiënt wordt gebruikt als maat voor de gemiddelde verandering over een interval.

- Door onbeperkt inkrimpen van het interval (met als uiterste grens 'tot een punt') ontstaat de idee van een maat van 'ogenblikkelijke' verandering in dat punt. De bekomen 'limietwaarde' is de afgeleide van de functie in dat punt.
- Bij dit proces kan gelijktijdig de meetkundige interpretatie uitgewerkt worden: de richtingscoëfficiënt van de snijlijn die de gemiddelde verandering aangeeft binnen een interval $[a, a+x]$ evolueert naar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $(a, f(a))$ van de kromme die de ogenblikkelijke verandering aangeeft. Daardoor is het verband gelegd tussen de afgeleide in een punt van een kromme en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt van de kromme.
- Tenslotte is het zinvol voor verder gebruik van dit definitieproces een synthese te geven in een 'algebraïsche uitdrukking'.

Er bestaan zeer bruikbare applets om bijvoorbeeld
- het verband tussen de grafiek van een functie en de afgeleide functie te illustreren;
- de betekenis van de tweede afgeleide uit te leggen;
- de afgeleide van basisfuncties te ontdekken.

Het is niet nodig alle formules en rekenregels voor het bepalen van de afgeleide functie te bewijzen.

Voor het bepalen van de afgeleide functie is het verantwoord gebruik van ICT aan te bevelen. Zo is het berekenen van de afgeleide functie van een veeltermfunctie zo eenvoudig dat het gebruik van ICT hierbij overbodig is. Ook voor het bepalen van de afgeleide van functies van de vorm $f(x) = (ax + b)^n$ met n rationaal, $f(x) = \sin(ax + b)$, $f(x) = e^{ax + b}$, e.d., is het gebruik van ICT niet aan te bevelen. Bij het inoefenen van de regels voor het bepalen van de afgeleide van een product, een macht of een quotiënt wordt onverantwoord en eindeloos rekenwerk vermeden.

De afgeleide van een functie wordt traditioneel verbonden met het onderzoeken van het verloop van de functie en het bepalen van haar grafiek. In een tijd waarin enkele toetsaanslagen volstaan om de grafiek te bekomen moet men zich afvragen of deze hele investering nog loont. Alleszins zullen enkele voorbeelden ontwikkeld worden om de leerlingen inzicht te laten verwerven in het verband tussen de functie en haar eerste afgeleide. Mogelijkheden hierbij zijn o.a.:
- bij een gegeven aantal grafieken die grafiek bepalen die passend is als grafiek van de afgeleide functie bij een gegeven grafiek van een functie en omgekeerd;
- het tekenverloop van de eerste afgeleide bepalen als de grafiek van de functie gegeven is;
- de grafiek van de afgeleide functie bij een gegeven grafiek ruw schetsen en omgekeerd;
- de grafiek schetsen aan de hand van het gegeven voorschrift en informatie over nulpunten, tekenverloop, afgeleiden, …

De resultaten kunnen steeds gecontroleerd worden met behulp van ICT.

Het is belangrijk heel wat vraagstukken op te lossen waarbij het begrip afgeleide gebruikt wordt. In een eerste fase kan bij de gestelde context het voorschrift gegeven zijn. In een tweede fase kan men ook vragen het functievoorschrift, dat bij de context hoort, op te stellen. Bij deze vraagstukken mag men zich niet beperken tot het bepalen van een extremum. Ook vragen naar stijgen, dalen, al of niet snel stijgen en dalen en het interval waarin het probleem zich situeert kunnen gesteld worden. Er moet aandacht gaan naar het praktische domein en naar de evaluatie van de berekende oplossing. Bij het gebruik van ICT is het bepalen van het praktische domein belangrijk in verband met de te kiezen instellingen voor het 'window'. ICT kan eveneens gebruikt worden om het probleem rekentechnisch op te lossen. Bij heel wat problemen zijn er voorstellingen te maken met behulp van een dynamisch meetkundeprogramma. Vaak helpt dit ook om een goede veranderlijke te kiezen, namelijk het punt dat verplaatst wordt.

Steunend op het begrip afgeleide kan nu het getal e gedefinieerd worden. Eerst wordt aangetoond dat er slechts één grondtal a bestaat waarvoor $(a^x)' = a^x$. Dit grondtal wordt het getal e genoemd. Men kan het getal e ook aanbrengen via convergentie van rijen.

De bepaalde integraal kan aangebracht worden als georiënteerde oppervlakte via limiet van onder- en bovensommen. De berekeningen voor groter wordend aantal deelintervallen kunnen met behulp van ICT gebeuren. Dit kan de begripsvorming en het ontdekken van eigenschappen ondersteunen. De notatie van onder- en bovensommen is dan ook een verklaring voor het integraalsymbool. De hoofdstelling van de integraalrekening koppelt het begrip bepaalde integraal aan afgeleide. De nodige nadruk moet gelegd worden op het feit dat de begrippen oppervlakte en bepaalde integraal niet identiek zijn. Om die reden moet men bij het bepalen van de oppervlakte van een gebied dat begrensd wordt door de grafiek van een functie en de x-as nagaan welke nulpunten van die functie behoren tot het beoogde integratie-interval. Ook bij het bepalen van de oppervlakte tussen twee krommen moet men nagaan of de twee krommen elkaar snijden binnen het beoogde interval.

Voor het bepalen van een primitieve functie is het verantwoord gebruik van ICT aan te bevelen. Zo is bij het berekenen van de primitieve functie van een veeltermfunctie of van functies van de vorm $f(x) = (ax + b)^n$ met n rationaal, $f(x) = \sin(ax + b)$, $f(x) = e^{ax+b}$, e.d., het gebruik van ICT niet aangewezen. Bepaalde eenvoudige integralen kunnen ook manueel berekend worden door substitutie (bijvoorbeeld $\int k.f'(x).\left[f(x)\right]^n dx$ met n rationaal, door gebruik te maken van goniometrische formules (bijvoorbeeld $\int \sin^2 x\, dx$) of door partiële integratie (bijvoorbeeld $\int \ln x\, dx$). Het zware rekenwerk wordt vermeden. Hiervoor bestaan voldoende ICT-middelen.

Als *uitbreiding* kunnen integralen onderzocht worden van rationale functies waarvan de noemer een drieterm van de tweede graad is of van integralen van vormen zoals $\int \frac{k.f'(x)}{\sqrt{a-b[f(x)]^2}} dx$ en $\int \frac{k.f'(x)}{a+b[f(x)]^2} dx$ waarbij a en b strikt positieve getallen zijn.

Als toepassingen kan men de oppervlakte bepalen van een ellips (en een cirkel), de inhoud van een kegel, een afgeknotte kegel en van een bol en zijn delen. Bij een aantal van deze toepassingen kan men de goniometrische substitutie vermijden door gebruik te maken van parametervergelijkingen.

Andere mogelijke toepassingen zijn: eenparige beweging, arbeid, snelheid en versnelling, de gemiddelde stroomsterkte van een wisselstroom, de cirkelvormige beweging, deviatie van de lichtstralen door een prisma, verschuiving van de lichtstralen door een planparallelle doorzichtige plaat, effectieve stroomsterkte en spanning van een wisselstroom, lading, ontlading en energie van een condensator, de halveringstijd bij radioactiviteit, de gemiddelde leeftijd van een radioactief atoom, reactiesnelheid bij omkeerbare chemische reacties in gesloten en open systemen, geremde groei, ...

UITBREIDINGSDOELSTELLINGEN

AN49	De middelwaardestellingen van Rolle en Lagrange illustreren en toepassen.
AN50	De regel van de l'Hospital toepassen bij het bepalen van limieten.
AN51	Het begrip integraal gebruiken bij het bepalen van manteloppervlakten en booglengten.
AN52	De oppervlakte bepalen van een gebied begrensd door een kromme, de y-as en twee horizontalen.
AN53	De inhoud bepalen van een omwentelingslichaam bij wenteling rond de y-as.
AN54	Een numerieke methode bespreken.
AN55	Het begrip 'oneigenlijke integraal' illustreren en toepassen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De middelwaardestellingen van Rolle en Lagrange geven een dieper inzicht in het begrip afgeleide. Het volstaat deze stellingen aan de hand van voorbeelden te illustreren maar men kan deze stellingen ook bewijzen. Zij vinden o.a. hun toepassing in het opstellen van de formules voor het bepalen van een booglengte, het bepalen van de manteloppervlakte bij een omwentelingslichaam en voor het bewijs van de regel van de l'Hospital. De regel van de l'Hospital is een handig middel voor het berekenen van limieten bij sommige onbepaaldheden. De belangrijkheid van deze regel is echter binnen de ICT-mogelijkheden sterk afgezwakt.

In sommige toepassingen kan het interessanter zijn de kromme te wentelen rond de y-as in plaats van rond de x-as of de oppervlakte te bepalen tussen de kromme en de y-as.

Mogelijke numerieke methoden die men kan bespreken zijn de methode van de intervalmiddens, de regula falsi, de methode van Newton-Raphson, de trapeziumregel of de regel van Simpson. Het gebruik van ICT is hierbij aangewezen. In de rubriek 'numerieke methoden' wordt uitvoerig op dit onderwerp ingegaan.

Bij een aantal problemen heeft men te maken met integralen waarbij minstens één van de grenzen oneindig is of waarbij de integrand oneindig wordt in het integratie-interval. In dat geval spreekt men van een oneigenlijke integraal. Ze wordt berekend met behulp van een limiet. Als deze limiet eindig is, dan spreekt men van een convergente oneigenlijke integraal. In het andere geval spreekt men van een divergente oneigenlijke integraal.

5.2.2 Matrices en stelsels

ALGEMENE INLEIDING

De didactische opbouw van de algebra kunnen we zoals aangegeven in *3 Algemene pedagogisch-didactische wenken* ordenen rond vier kerngedachten: de *betekenis* van de begrippen, de *berekeningen*, de *fundamenten* en de *toepassingen*.

Als begrippen wordt vooral aandacht besteed aan matrix en determinant.

- Bij het *matrixbegrip* gaat het om geordende blokken getallen die als geheel worden beschouwd, en waarmee ook in hun geheel bewerkingen kunnen worden uitgevoerd.
- Het begrip determinant wordt ingevoerd om bepaalde voorwaarden gemakkelijker te schrijven (reguliere matrix, oplosbaarheid stelsel). Het is niet de bedoeling een uitgebreide studie van determinanten te maken.

Met matrices kunnen *berekeningen* uitgevoerd worden. De berekeningen kunnen manueel gebeuren of door middel van ICT. Hierbij moet aandacht besteed worden aan de definities van de bewerkingen zelf en aan de rekenregels. Er bestaat weliswaar een verregaande analogie met deze bij reële getallen, maar voor het eerst worden leerlingen toch geconfronteerd met niet-evidente werkwijzen (bijv. de vermenigvuldiging bij matrices) en het niet voldaan zijn aan vertrouwde eigenschappen zoals de commutativiteit van de vermenigvuldiging.

Deze vaststellingen kunnen er toe leiden dat aandacht besteed wordt aan een meer fundamentele studie van de bewerkingen en theoretische precisering van het kader van de rekenregels. Leerlingen moeten inzien dat het mogelijk is met matrices te rekenen als met meer abstracte wiskundige objecten. Dat kan onder meer door vergelijking van een aantal fundamentele eigenschappen van bewerkingen en die te ordenen om een beter inzicht te verwerven in de samenhang.

De concepten worden *toegepast* om bepaalde situaties te modelleren en/of te mathematiseren, waarbij een betekenisvolle weg gevolgd wordt.

INLEIDING

Bij de klassieke aanpak van de studie van matrices is het oplossen van stelsels vaak de enige toepassing. Nochtans geven tal van problemen, zowel binnen als buiten de wiskunde, aanleiding tot het werken met matrices bij het mathematiseren. De matrix is dan, zoals bij stelsels, een handige wiskundige notatie voor een tabel met numerieke gegevens. Passende bewerkingen met deze matrices kunnen dan leiden tot de oplossing van het probleem.

Het verwerken van een probleem met matrices wordt met de beschikbaarheid van ICT heel wat gebruiksvriendelijker. Voor tijdrovende (manuele) berekeningen, bijv. bij bewerkingen met matrices en bij het oplossen van stelsels, levert het gebruik immers heel wat tijdswinst op.

Aanbeveling lestijden: **ca. 20 lestijden**

BASISDOELSTELLINGEN

AL1	Met behulp van matrices een concreet probleem modelleren.
AL2	Binnen een probleem bewerkingen met matrices uitvoeren: - matrices optellen en aftrekken,

	- een matrix met een getal vermenigvuldigen, - een matrix transponeren, - matrices vermenigvuldigen, - machten van matrices berekenen.
AL3	Eigenschappen van de bewerkingen van matrices formuleren en gebruiken bij het rekenen met matrices.
AL4	Evoluties van blokken gegevens beschrijven met matrices.
AL5	De methode van het rijherleiden verklaren en gebruiken voor het oplossen van $m \times n$ -stelsels van de eerste graad.
AL6	Vraagstukken oplossen die te herleiden zijn tot het oplossen van een $m \times n$ -stelsel van de eerste graad.
AL7	Een $m \times n$ -stelsel met één parameter bespreken.
AL8	De voorwaarde opstellen waarvoor een matrix een inverse matrix heeft.
AL9	De inverse matrix van een reguliere matrix berekenen en de werkwijze gebruiken bij het oplossen van stelsels.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Matrices en bewerkingen met matrices worden ingevoerd vanuit toepassingen. De matrix wordt aangezien als een handige opslagplaats voor een blok gegevens. De bewerkingen beschrijven de samenhang tussen de getalgegevens.

De werkwijzen voor optellen van matrices en het product van een reëel getal met een matrix liggen voor de hand. De werkwijze voor het vermenigvuldigen van matrices is niet zo vanzelfsprekend maar kan vanuit gepaste voorbeelden geïllustreerd worden, bijv. uit een gegeven productiematrix van verschillende producten per regio en een gegeven matrix met de winst per product, de totale winst per regio berekenen.

Mogelijke eigenschappen van de bewerkingen komen vanzelfsprekend aan bod vanuit het rekenen met matrices in een context. De meeste eigenschappen kunnen ook vanzelfsprekend vanuit ‘theoretisch standpunt’ overgedragen worden van het rekenen met getallen op het rekenen met matrices. Bijv. eens duidelijk is hoe je twee matrices optelt, is het evident dat eigenschappen als commutativiteit en associativiteit ‘element per element’ overgedragen worden. Dat ligt moeilijker bij het vermenigvuldigen van matrices. De associativiteit van het matrixproduct verdient bijzondere aandacht. Omdat het matrixproduct die eigenschap bezit, kan men een eenduidige betekenis geven aan machten van matrices. Bij het onderzoek van de commutativiteit stuiten leerlingen wellicht voor het eerst op een bewerking die de eigenschap niet heeft. Ze worden er ook mee geconfronteerd dat eventuele voorbeelden niet opwegen tegen de tegenvoorbeelden en dat de eigenschap maar geldig is, als ze voor elk matrixproduct opgaat.

Men kan hier al aandacht besteden aan het begrip inverse van een matrix. Enkele voorbeelden geven aanleiding tot de begrippen eenheidsmatrix en inverse matrix. Een paar goed gekozen (tegen)voorbeelden moeten leerlingen ervan overtuigen dat niet elke matrix een inverse matrix bezit.

De evolutie van blokken gegevens is een interessante toepassing op de klassieke matrixvermenigvuldiging waarvan er veel in een vereenvoudigde vorm in de klas aan bod kunnen komen. Hierbij ligt de klemtoon op het mathematiseren: het vertalen van het concreet probleem en het zoeken naar de juiste wiskundige voorstelling en nodige bewerkingen om het probleem op te lossen. In een aantal gevallen kan een matrix gemakkelijker worden opgesteld nadat het probleem geschematiseerd en gevisualiseerd is met behulp van een pijlenschema of een graaf.

Mogelijke toepassingen op deze evoluties van blokken zijn: de evolutie van het koopgedrag bij een groep consumenten (Markovketens), de evolutie van een populatie dieren (Lesliematrices), het migratiepatroon van de bevolking in een bepaalde regio (migratiematrices) of het aantal wegen tussen bepaalde grootsteden (verbindingsmatrices).

Een andere toepassing van matrices is het oplossen van stelsels. Vooraleer een oplossingsmethode te behandelen, is het nuttig zich de vraag te stellen welke bewerkingen op een gegeven stelsel mogen worden uitgevoerd. De begrippen oplossingenverzameling, gelijkwaardige stelsels en elementaire rijoperatoren worden verklaard.

Nadien kan de methode van rijherleiden worden aangeleerd voor het oplossen van een m x n-stelsel. Het is logisch dat onnodig zwaar rekenwerk met de huidige ICT-mogelijkheden wordt gemeden.

Bij het oplossen van vraagstukken ligt de nadruk op het opstellen van het stelsel en het interpreteren van het gevonden resultaat. Het oplossen van het stelsel gebeurt met behulp van ICT.

Het bespreken van stelsels kan beperkt worden tot stelsels met één parameter. Het verwerven van het inzicht staat hier centraal o.a. de vraag: wanneer zijn er geen oplossingen, wanneer één, wanneer meerdere. Mogelijke concrete toepassingen vindt men terug in de ruimtemeetkunde of bij eliminatieproblemen.

De deling van matrices is niet gedefinieerd. Wel is het mogelijk in bepaalde gevallen de inverse matrix te berekenen. De methode van het rijherleiden laat ons toe om deze inverse matrix, als hij bestaat, te berekenen. Hieruit zijn ook de voorwaarden voor het bestaan af te leiden.

Met behulp van de inverse matrix kan de oplossing van het stelsel AX=B ook geschreven worden als $X=A^{-1}\cdot B$.

UITBREIDINGSDOELSTELLING

AL10	Een determinant behorend bij een vierkante matrix definiëren en gebruiken in meetkundige toepassingen.
AL11	De formules van Cramer gebruiken voor het oplossen van reguliere n x n-stelsels van de eerste graad.
AL12	De eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van een reguliere matrix berekenen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Een vierkante matrix kan gekarakteriseerd worden aan de hand van één getal: zijn determinant. Dit getal laat ons o.a. toe na te gaan of een vierkante matrix al dan niet regulier is.

Toepassingen op determinanten vindt men voornamelijk terug in de meetkunde: voorwaarde voor het concurrent zijn van drie rechten, voorwaarde voor het collineair zijn van drie punten, oppervlakte van een driehoek, vergelijking van een vlak, …

De formules van Cramer zijn een toepassing op determinanten voor het oplossen van een regulier stelsel. Tevens kunnen deze formules gebruikt worden bij het bespreken van (n x n)-stelsels met één parameter.

Wanneer een evolutie kan beschreven worden aan de hand van matrices, kunnen we ons de vraag stellen: treedt er stabilisatie op? In plaats van de limiet van het evolutieproces te berekenen kunnen we op zoek gaan naar de oplossing van de matrixvergelijking: A.X = X. Deze stabiele situatie X is niets anders dan de eigenvector die hoort bij de eigenwaarde 1.

Een tweede mogelijke toepassing op eigenwaarden en eigenvectoren is het diagonaliseren van een matrix, een techniek die gebruikt wordt om snel de nde macht van een matrix te berekenen.

5.2.3 Meetkunde

ALGEMENE INLEIDING

Het verplichte onderdeel van de meetkunde bouwt enerzijds verder op de vlakke analytische meetkunde en anderzijds op de ruimtemeetkunde.

De (analytische) vergelijking van rechten in het vlak bleek een handig middel om ze te beschrijven en om de evenwijdigheid van rechten te bespreken. Dit wordt nu verder uitgebreid tot de loodrechte stand van rechten en hoeken van rechten. In dat verband is het zinvol de begrippen vector, vectoriële vergelijking en scalair product van vectoren in te voeren. Dit is meteen een stap naar de uitbreiding van de analytische meetkunde naar de (driedimensionale) ruimte.

Voor de ruimtemeetkunde is in de eerste en de tweede graad een solide basis gelegd, door het voorstellen en onderzoeken van ruimtelijke situaties en het formuleren van eigenschappen die daaruit werden afgeleid. In de derde graad worden een aantal nieuwe middelen aangebracht (vectoren en coördinaten), zodat de leerlingen wezenlijk over drie fundamentele werkwijzen beschikken: een synthetische aanpak, een analytische aanpak en een werkwijze met vectoriële middelen. Door ervaring moeten de leerlingen leren welke aanpak geëigend is in welke situatie.

Zoals in de tweede graad zal de vlakke meetkunde geregeld aan bod komen in ruimtelijke toepassingen, maar ook bij het onderzoeken van mogelijke veralgemeningen van vlakke naar ruimtelijke situaties.

Bij didactische opbouw van de meetkunde kan weer uitgegaan worden van de vier kernideeën: de *concepten*, de *berekeningen*, de *fundamenten* en de *toepassingen*.

- Als *begrippen* wordt vooral aandacht besteed aan
  - vectoren en coördinaatgetallen (in het vlak en in de ruimte) voor het bepalen van punten en het beschrijven van situaties;
  - de onderlinge ligging van rechten in het vlak, van rechten, van rechten en vlakken en vlakken in de ruimte, met i.h.b. de loodrechte stand;
  - de vergelijkingen van rechten en vlakken als beschrijvingsmiddel;
  - de begrippen afstand en hoek.
- Met de nieuwe concepten vector en coördinaatgetallen (in de ruimte) worden maar *berekeningen* uitgevoerd in functie van het beschrijven van situaties en oplossen van problemen. Berekeningen op zich hebben hier niet veel zin. Het beschikbare rekenapparaat wordt op evidente wijze ingeschakeld bij het berekenen van afstanden, hoeken, het oplossen van vergelijkingen, stelsels, …

  Binnen dit deeltje techniciteit hoort het hanteren van goede voorstellingen, zowel in het vlak als in de ruimte. Hieraan is in de vooropleiding al heel wat aandacht besteed. Dit kan hier uiteraard van dienst zijn, maar deze vaardigheid moet ook degelijk onderhouden worden. Voor de ruimtelijke voorstelling kunnen ICT-hulpmiddelen gebruikt worden.
- Wat de *fundamenten* betreft is vanuit de tweede graad al de zogenaamde gereedschapskist beschikbaar, waarin belangrijke eigenschappen werden opgenomen in functie van hun gebruik bij het oplossen van meetkundige problemen. Deze reeks eigenschappen kan goedgeordend verder aan bod komen en eventueel aangevuld worden met nieuwe eigenschappen.
- De concepten worden *toegepast* om ruimtelijke situaties te onderzoeken en te modelleren. Ook in de derde graad ligt de klemtoon op het oplossen van meetkundige problemen, o.m. in verband met afstanden, hoeken en loodrechte stand. De leerling beschikt hiervoor over een meer synthetische manier van redeneren, die gebruik maakt van de gereedschapskist, of over de nieuwe werkmiddelen, die gebruik maken van vectoren en coördinaten, o.m. vergelijkingen van rechten en vlakken, uitdrukkingen voor afstanden en voor hoeken en voorwaarden voor loodrechte stand.

  De leerlingen beschikken over drie verschillende werkwijzen om bepaalde problemen aan te pakken. Zelf een keuze maken voor de methode vraagt heel wat ervaring. Daarom zal men vele opdrachten uitvoeren, waarbij bij aanvang misschien een wat strakkere leiding zinvol is.

1 VLAKKE ANALYTISCHE MEETKUNDE

De beginsituatie is voor de verschillende studierichtingen die dit leerplan volgen verschillend. In de studierichting *Industriële wetenschappen* werd in het eerste leerjaar van de tweede graad het vectorbegrip al aangebracht in de wiskundelessen. In andere studierichtingen kwam dit in de wiskundelessen nog niet voor. (Het betreft concreet de doelstellingen ME1, ME2 en ME3 die al of niet behandeld werden.) Sommige leerlingen kennen het begrip vector echter vanuit toepassingen in wetenschappen of technische vakken. In alle gevallen moeten de leerlingen van de derde graad in wiskunde een volwaardig inzicht krijgen in dit begrip. Dit leidt tot een hernieuwd inzicht in coördinaten in het vlak en de al gekende analytische meetkunde (vergelijkingen van rechten, voorwaarde evenwijdigheid), en verder tot de vectoriële vergelijking van een rechte, het wiskundig omschrijven van begrippen als loodrechte stand en hoek.

Als alle leerlingen al voldoende vertrouwd zijn met de volgende doelstellingen, kan dit onderdeel verwerkt worden door een aantal gerichte opdrachten met aandacht voor de zelfwerkzaamheid van de leerlingen en een aantal herhalings- en syntheseoefeningen.

Aanbeveling lestijden: **ca. 25 lestijden**

BASISDOELSTELLINGEN

ME1	Het begrip vector definiëren.
ME2	Een vector ontbinden volgens de assen van een assenstelsel en associëren met een koppel coördinaatgetallen.
ME3	De som van twee vectoren en het product van een vector met een getal definiëren en voorstellen.
ME4	De vectoriële vergelijking van een rechte opstellen en de onderlinge ligging van rechten bespreken.
ME5	Het scalair product van twee vectoren analytisch vertolken.
ME6	De orthogonaliteit van twee vectoren uitdrukken door middel van het scalair product.
ME7	De voorwaarde voor de loodrechte stand van twee rechten opstellen.
ME8	Een vergelijking van de loodlijn uit een punt op een rechte opstellen.
ME9	De afstand berekenen van een punt tot een rechte.
ME10	Een vergelijking opstellen van de raaklijn in een punt van een cirkel.
ME11	Meetkundige problemen i.v.m afstand, loodrechte stand en hoeken analytisch oplossen.
ME12	Eigenschappen analytisch bewijzen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Voortbouwend op het begrip verschuiving dat de leerlingen in de eerste graad hebben gezien, kan het begrip vector relatief eenvoudig worden aangebracht. Ook een meer realistische benadering vanuit de fysische of technische toepassingen (grootheid met grootte, richting, zin) kan relatief eenvoudig gekoppeld worden aan het begrip verschuiving. (Zie leerplan eerste graad 'verschuiven gebeurt intuïtief over een bepaalde afstand volgens een bepaalde richting en zin'.)

Belangrijk is dat bij de leerlingen een duidelijk vectorbegrip ontstaat dat efficiënt en functioneel kan gebruikt worden in de verschillende toepassingen. Het is niet de bedoeling met vectoren te rekenen buiten toepassingssituaties.

Het is zinvol het begrip vector vrij snel te verbinden aan een stel coördinaatgetallen. Dit verband kan gebruikt worden bij het analytisch beschrijven van rechten. Men zal het verband illustreren tussen de analytische vergelijking van een rechte en de vectoriële vergelijking.

Een meetkundige definitie van het scalair product van twee vectoren maakt gebruik van afstanden en hoeken. Een uitgangspunt kan hier de correctieterm zijn in de cosinusregel, als men die vergelijkt met de stelling van Pythagoras. De analytische uitdrukking voor dit scalair product is met behulp van de cosinusregel te vinden.

Het scalair product kan gebruikt worden bij de beschrijving van het begrip *orthogonaliteit* van vectoren en rechten. De voorwaarde voor de loodrechte stand van twee rechten kan evenwel op verschillende wijzen opgesteld worden, bijvoorbeeld door gebruik te maken van de driehoeksmeting, van gelijkvormige driehoeken (middelevenredige), van de stelling van Pythagoras of van het scalair product. Als men over voldoende tijd beschikt zal men de verbanden tussen twee of meer argumenteringen bespreken.

De afstand van een punt tot een rechte werd in de eerste graad al ingevoerd. Met de vergelijking van de loodlijn op een rechte door een punt beschikken de leerlingen over het ontbrekende middel om (zelf) die afstand analytisch te berekenen.

Een vergelijking opstellen van de raaklijn in een punt van een cirkel kan op verschillende wijzen (loodlijn op de middellijn door het punt, rechte door dat punt met juist een snijpunt met de cirkel). De leerlingen kunnen hier het plezier ervaren van het spelen met wiskundige mogelijkheden.

Een aantal problemen kan als toepassing analytisch aangepakt worden, bijv. met het gebruik van de vergelijkingen van loodlijnen. Bij de toepassingen kunnen de leerlingen eventueel ervaren welke voor- en/of nadelen het gebruik van vectoren en coördinaten heeft (bijv. elegantie van een modellering, van een verklaring, …). Enige aandacht wordt besteed aan een goede keuze van het assenstelsel.

Voorbeelden van problemen uit de meetkunde die analytisch kunnen aangepakt worden:

- de voorwaarde voor collineariteit;
- de voorwaarde voor het midden van een lijnstuk;
- eigenschappen in een driehoek (bijv. zwaartepunt);
- eigenschappen in een parallellogram (bijv. diagonalen);
- de concurrentie van de zwaartelijnen, de hoogtelijnen en de middelloodlijnen van een driehoek;
- de normaalvergelijking van een rechte opstellen;
- een vergelijking opstellen van de bissectrices van een rechtenpaar;
- een parabool interpreteren als meetkundige plaats van punten;
- de hoek tussen twee rechten bepalen;
- de snijpunten bepalen van een cirkel en een rechte en van twee cirkels.

De leerlingen zijn evenwel nog niet geconfronteerd geweest met deze vorm van mathematiseren. Er zal dus veel zorg besteed worden aan de geleidelijkheid van de werkwijze, bijv. de keuze van het assenstelsel om het rekenwerk te vereenvoudigen. De leerkracht zal er zich van bewust zijn dat het verwerven van dergelijke ervaring een meer dan occasionele behandeling van dit onderdeel vergt. Zo zal van leerlingen in het begin nog niet verwacht kunnen worden, dat ze al zelf in alle gevallen een geschikte keuze voor het assenstelsel kunnen maken. Deze werkwijze biedt tevens een zinvol alternatief voor het louter technisch uitvoeren van oefeningen op algebraïsch rekenen en het rekenen met veranderlijken.

Bepaalde software laat toe problemen analytisch aan te pakken zonder de meer voordelige keuze voor assenstelsel, coördinaten, … te maken. Ze beschikken immers over de mogelijkheid rechten door punten te tekenen, de vergelijking op te vragen, en coördinaten van snijpunten te berekenen. Toch is het zinvol voldoende aandacht te besteden aan de manuele weg, omdat die het inzicht in de problematiek en de aanpak ervan kan versterken. Software kan dan nog gebruikt worden voor de berekeningen (bijv. oplossing stelsel).

Exemplarisch moet getoond worden dat de analytische aanpak in bepaalde situaties voordelen biedt, maar ook dat soms precies het tegenovergestelde geldt. Vandaar dat de leerlingen moeten leren hun methodiek te kiezen in functie van een probleem. Dit is echter een ervaring die maar zeer langzaam groeit vanuit vele oefeningen. Zo kan van leerlingen niet verwacht worden dat ze al in alle gevallen zelf de meest efficiënte werkwijze kunnen kiezen.

Zoals al eerder aangegeven kan, nadat de wiskundige vertaling is gemaakt, bij het oplossen van de concrete vergelijkingen, stelsels, … gebruik gemaakt worden van ICT.

2 RUIMTEMEETKUNDE

BEGINSITUATIE.

In de eerste en tweede graad hebben de leerlingen de onderlinge ligging van rechten en vlakken in concrete ruimtelijke situaties onderzocht en voorgesteld. De eigenschappen werden opgenomen in een ‘gereedschapskist’ en gebruikt om meetkundige problemen op te lossen.

Aanbeveling lestijden: **ca. 35 lestijden**

BASISDOELSTELLINGEN

ME13	Vectoren en coördinaatgetallen gebruiken om punten te bepalen in de ruimte.
ME14	Vectoren en coördinaatgetallen en de bewerkingen ervan gebruiken om problemen in ruimtelijke situaties op te lossen.
ME15	Eigenschappen over de ligging van rechten en vlakken in de ruimte onderzoeken en formuleren, in het bijzonder - de loodrechte stand van rechten, van een rechte en een vlak en van vlakken - hoeken tussen rechten en tussen vlakken.
ME16	Rechten en vlakken door vergelijkingen voorstellen en hun onderlinge ligging bespreken.
ME17	Afstanden tussen punten, rechten en vlakken berekenen.
ME18	Hoeken tussen rechten, tussen rechten en vlakken en tussen vlakken berekenen.
ME19	Meetkundige problemen met diverse hulpmiddelen voorstellen en oplossen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Het vectorbegrip kan nu in de ruimte gedefinieerd worden en opnieuw verbonden worden aan een stel coördinaatgetallen. Het rekenen met deze vectoren en met coördinaatgetallen is analoog als met vectoren en coördinaatgetallen uit de vlakke meetkunde.

Vectoren en coördinaatgetallen zijn nu handige bijkomende middelen om problemen in de ruimte aan te pakken, waarbij begrippen als afstand (nieuwe analoge afstandsformule in de ruimte), loodrechte stand (scalair product) en hoek voorkomen. Door het onderzoeken van deze problemen stuiten de leerlingen op een aantal bijkomende eigenschappen, die kunnen opgenomen worden in de gereedschapskist meetkunde.

Naar analogie met de behandeling van de eigenschappen over evenwijdigheid van rechten en vlakken in de tweede graad, wordt hier aandacht besteed aan een duidelijke verwoording, aan een adequate voorstelling zowel in een ruimtelijke situatie als op een tekening en aan het gebruik ervan in toepassingen. In het kader van het ontwikkelen van redeneervaardigheden kunnen een aantal eigenschappen i.v.m. loodrechte stand bewezen worden.

Rechten en vlakken kunnen met hun vectoriële-, hun parameter- en hun cartesiaanse vergelijkingen beschreven worden. Hierin wordt, zoals in de vlakke meetkunde, een analytische methode aangereikt om een meetkundig probleem op te lossen. Omdat rechten en vlakken ondubbelzinnig bepaald worden door vergelijkingen van de eerste graad, zullen een aantal thema’s uit de matrixrekening, zoals het oplossen van stelsels, het al of niet bestaan van oplossingen en eliminatie, een meetkundige toepassing krijgen. Als men determinant heeft aangebracht (uitbreiding bij matrices) kan de determinantenvergelijking van een vlak opgesteld worden.

Mogelijke toepassingen van de analytische aanpak zijn o.m.:
- de loodrechte stand van rechten, van vlakken en van rechten en vlakken;
- de gemeenschappelijke loodlijn van twee kruisende rechten;
- de hoek van rechten, van vlakken en van rechten en vlakken;
- het scalair product in de ruimte als alternatief voor het onderzoek van de loodrechte stand.

Het berekenen van allerlei afstanden gebeurt analytisch door gebruik te maken van vergelijkingen van rechten en vlakken en van coördinaten van punten. Ook voor het uitdrukken van de loodrechte stand van rechten en het berekenen van hoeken wordt een analytische werkwijze aangebracht.

De leerlingen ervaren snel de kracht van de analytische methode. Ze moeten echter inzien dat ook deze methode haar beperkingen heeft, en dat de ‘oude’ synthetische aanpak soms een meer aangewezen werkwijze is. Goed gekozen voorbeelden zullen de leerlingen laten inzien dat deze synthetische aanpak een sterk hulpmiddel blijft bij het argumenteren van een bewering. Bij het oplossen van een meetkundig probleem maken de leerlingen dus gebruik van analytische hulpmiddelen, van meetkundige redeneringen en van een schets (al of niet met ICT-hulp) die deze redeneringen en berekeningen ondersteunt.

Didactisch zijn hier zeker mogelijkheden tot groepswerk en kansen voor het verwerven van probleemoplossende vaardigheden. Ook kunnen de leerlingen geconfronteerd worden met diverse oplossingen van eenzelfde probleem en geraken ze zo betrokken bij het leren evalueren van verschillende strategieën.

5.2.4 Statistiek

INLEIDING

Statistiek is de wetenschap van het verzamelen, ordenen en interpreteren van gegevens. Ze biedt middelen om met behulp van gegevens inzicht te krijgen in reële en maatschappelijke problemen en er conclusies uit te trekken met een zekere betrouwbaarheid. Ook de wijze van verzamelen van gegevens, o.m het trekken van een steekproef, is onderwerp van kritische reflectie.

In het secundair onderwijs is de hoofdbedoeling van het onderdeel statistiek de leerlingen te leren nadenken en redeneren over statistische gegevens, statistische voorstellingen en statistische uitspraken. Het statistisch redeneren is niet eenvoudig en valt niet zomaar samen met wiskundig redeneren. Het is anders dan het rekenen met kansen. Statistiek biedt een eigen taal binnen de modellen die ze aanreikt. Het vraagt dus enige tijd om de leerlingen vertrouwd te maken met deze aanpak. Vandaar dat de lestijden voorzien voor statistiek best volledig besteed worden aan de eigenheid van dit onderwerp: het verwerven van dit statistisch redeneren.

Bij de didactische verwerking van statistiek kunnen we uitgaan van de vier kerngedachten: betekenis, berekeningen, fundamenten, toepassingen (zie *3 Algemene pedagogisch-didactische wenken)*.

Het aanbrengen van de *concepten* en het doorgronden van hun *betekenis* neemt hier het grootste aandeel van de lestijden in. Begrippen die bijzondere aandacht krijgen: steekproef versus populatie, daaraan gekoppeld de betrouwbaarheid van steekproeven; centrum- en spreidingsmaten, i.h.b. gemiddelde en standaardafwijking, dichtheidsfunctie als model, met i.h.b. de normale verdeling, de betrouwbaarheid van berekende resultaten en conclusies. Vermits het statistisch redeneren niet eenvoudig is, wordt best gewerkt vanuit realistische voorbeelden en toepassingssituaties.

De term *berekeningen* kan hier beter vertaald worden als ‘technische behandeling’, omdat hier vaak ook heel wat grafische output wordt gemaakt, die het redeneren ondersteunt. Wiskundige berekeningen en voorstellingen zijn hier niet echt nieuwe leerinhoud, maar meestal de drager van de statistische informatie, waar het in essentie om gaat. Berekeningen zijn dus ondergeschikt aan het redeneren en interpreteren zelf. Vandaar dat waar mogelijk en zinvol het reken- en tekenwerk uitgevoerd wordt met ICT.

Statistiek is geen eenvoudige wetenschap en de benadering in het secundair onderwijs kan dan ook niet ingaan op de reële *fundamenten* ervan. Toch kan men leerlingen een aantal fundamentele opvattingen meegeven die aan de basis moeten liggen van statistisch onderzoek. Statistiek biedt net zoals wiskunde modellen voor het beschrijven van een werkelijkheid. Doel daarvan is die zo ideaal mogelijk te beschrijven. Maar de werkelijkheid is zelden te vatten in een exacte wiskundige relatie. Zo is de normale verdeling maar een ‘ideaal model’. Een beschrijving is dus nooit perfect. Verder is in statistiek de context belangrijk. Het is dus niet zinvol leerlingen met statistiek te confronteren buiten zinvolle en realistische situaties.

Uit het voorgaande is al duidelijk dat het deel *toepassingen* bij statistiek een belangrijk onderdeel is. Precies doorheen het gebruiken van de statistische inzichten zal geleerd worden hoe ermee om te gaan. Vandaar dat vele open problemen zullen aangeboden worden met gebruik van reële gegevens. Telkens zal commentaar gaan naar de context van de situatie, naar de wijze van verzamelen van de gegevens en naar de verwerking en interpretatie ervan. Nog meer dan elders moet de context betrokken worden bij de ontwikkelingen en de uiteindelijke bespreking van de resultaten.

De contextsituaties voor statistiek liggen altijd in andere disciplines dan de statistiek zelf. Daarom liggen hierin heel wat kansen om vakoverschrijdend te werken Het is zinvol om hier samen te werken met andere vakken.

Zo leren leerlingen overigens meteen dat in verschillende wetenschappen vaak zowel wetenschappelijke als statistische argumenten gebruikt kunnen worden. Wat het inzicht in de toepasbaarheid versterkt, maar ook het belang van het statistisch redeneren onderstreept.

BEGINSITUATIE

De leerlingen hebben al geleerd in beperkte omstandigheden statistische gegevens te verwerken (frequenties, centrum- en spreidingsmaten), voor te stellen en te interpreteren.
Ze leerden in eenvoudige situaties kansen te berekenen en het verband te leggen tussen kansen en relatieve frequenties.

Aanbeveling lestijden: **ca. 25 lestijden**

BASISDOELSTELLINGEN

SK1	Statistische gegevens, centrum- en spreidingsmaten en grafische voorstellingen van statistische gegevens interpreteren.	14
SK2	Met behulp van ICT het rekenkundig gemiddelde en de standaardafwijking berekenen van statistische gegevens.	15
SK3	Aan de hand van concrete voorbeelden aangeven dat men enkel op basis van aselecte steekproeven uitspraken kan doen over de ganse populatie en dat bij elk statistisch experiment toeval een rol speelt.	14
SK4	In betekenisvolle situaties, gebruik maken van een normale verdeling als continu model bij data met een klokvormige frequentieverdeling en het gemiddelde en de standaardafwijking van de gegeven data gebruiken als schatting voor de parameters van deze normale verdeling.	16
SK5	Het gemiddelde en de standaardafwijking van een normale verdeling grafisch interpreteren en grafisch het verband leggen tussen een normale verdeling en de standaardnormale verdeling.	16
SK6	Bij een normale verdeling de relatieve frequentie van een verzameling gegevens met waarden - tussen twee gegeven grenzen, - met waarden groter dan een gegeven grens, - of met waarden kleiner dan een gegeven grens, interpreteren als de oppervlakte van bijbehorende gebied onder de normale verdeling.	16

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Aan de hand van goed gekozen voorbeelden wordt in de derde graad het interpreteren van statistische gegevens, de centrum- en spreidingsmaten van deze gegevens en voorstellingen verder uitgediept. Het kunnen interpreteren van (en kritisch kijken naar) statistische gegevens, maten en voorstellingen is een belangrijke doelstelling. Zo zal gewezen worden op het belang van de vorm van een grafische voorstelling (symmetrisch, niet-symmetrisch, …) en naar eventuele extreme meetwaarden, die een grote invloed kunnen hebben op het gemiddelde en de standaardafwijking. Bij de interpretatie zal men conclusies terug in de context plaatsen. Het is nuttig om in de klas bij bepaalde gegevens met leerlingen te discussiëren over zinvolle grafische voorstellingen, informatie die verloren gaat, welke centrummaat aangewezen is, hoe de gegevens verzameld zijn, …

Alhoewel dit op zich een moeilijk probleem is, zal men aandacht besteden aan de wijze waarop steekproeven tot stand zijn gekomen en de wijze waarop conclusies getrokken worden (statistische term: inferentie). Daartoe worden de volgende twee aspecten onderzocht: de betrouwbaarheid van de steekproef (vertekende of onvertekende steekproeven) en de variabiliteit van steekproefresultaten bij het onderzoek naar proporties.

- Steekproeven waarbij mensen vrijwillig beslissen om mee te doen (televoting, …) en opportunistische steekproeven (de eenheden zijn gemakkelijk of goedkoop te bereiken, bijv. een enquête in een winkelstraat) leveren meestal onbetrouwbare informatie op met betrekking tot de hele populatie. Men noemt ze vertekend. De leerlingen moeten bij concrete voorbeelden kunnen aangeven of een steekproef mogelijk vertekend is en wat het effect daarvan is op een statistische uitspraak op basis van die steekproef.
- Maar ook goede steekproeven uit eenzelfde populatie leveren verschillende resultaten op. Dit fenomeen noemt men steekproefvariabiliteit. Variabiliteit heeft voor gevolg dat je uit een steekproefresultaat nooit met 100 % zekerheid besluiten kunt trekken over de hele populatie. Dit is niet hetzelfde als zeggen ‘met statistiek kan je alles bewijzen’. De bedoeling is juist deze variabiliteit te kunnen inschatten. Bij het realiseren van

doelstelling SK6 kan hierop uitvoeriger ingegaan worden. De leerlingen hebben dan al een aantal voorbeelden uitvoeriger behandeld.

Centrum- en spreidingsmaten zijn parameters om gegevens cijfermatig samen te vatten. Een andere manier om statistische gegevens samen te vatten, te modelleren bestaat erin de verdeling te beschrijven door een functie. Een veel voorkomende verdeling is de normale verdeling. De hoofdbedoeling van dit onderdeel is dat de leerlingen inzien dat in bepaalde gevallen statistische gegevens kunnen voorgesteld worden met behulp van het model van de normale verdeling en dat ze bij normaalverdeelde gegevens de grafiek van de normale verdeling kunnen gebruiken om statistische problemen op te lossen.

De overgang naar een dichtheidsfunctie kan gebeuren door over te gaan op relatieve frequenties per eenheid (de relatieve frequentie gedeeld door de breedte van elk interval) en een vloeiende kromme te tekenen door het histogram. Alle gegevens worden zo samengevat in de grafiek van een functie. Heel wat histogrammen zijn symmetrisch en klokvormig (de lichaamslengte, het exacte gewicht van pakken suiker van 1 kilo, …). Op die manier kan de normale verdeling ingevoerd worden als model voor klokvormige frequentieverdeling. Om de benaderingsgraad te visualiseren kan men een klokvormig histogram overdekken met de bijbehorende normaalverdeling. De leerlingen berekenen met rekenmachine of software het gemiddelde $\overline{x}$ en de standaardafwijking s van de meetwaarden. Daarna laten we ze de dichtheidsfunctie van de normaalverdeling tekenen, waarbij de verwachtingswaarde μ de waarde krijgt van $\overline{x}$ en de standaarddeviatie σ de waarde van s. Als het getal e nog niet aan bod gekomen is de precieze kennis van het functievoorschrift van een algemene normaalverdeling hier nog niet nodig. Bij de studie van exponentiële functies kan deze functie terug aan bod komen. Belangrijk is wel op te merken dat de oppervlakte onder de dichtheidsfunctie 1 is.

Deze benadering van het histogram van de frequentieverdeling door de normale verdeling kan ook gebruikt worden om het verband tussen de vorm van de grafiek en gemiddelde en standaardafwijking te leggen. De grafische betekenis van het gemiddelde van een normale verdeling is de x-coördinaat van de top van de verdelingsfunctie. Voor de standaardafwijking geldt de vuistregel: 68 % van de waarden die de variabele kan aannemen, liggen tussen de grenzen $\mu-\sigma$ en $\mu+\sigma$ en ook 68 % van de oppervlakte tussen de grafiek van de normale verdeling en de x-as ligt tussen $\mu-\sigma$ en $\mu+\sigma$. Deze regel kan aan de hand van de discrete verdeling intuïtief geïllustreerd worden of met ICT nagerekend worden.

Het omzetten van een willekeurige normale verdeling naar de standaardnormale verdeling is bij gebruik van statistische software niet echt nodig om concrete problemen op te lossen. De standaardnormale verdeling kan dan ook enkel gezien worden als een speciaal voorbeeld van een normale verdeling ($\mu = 0$ en $\sigma = 1$). Wil men werken met tabellen, dan is die overgang wel nodig. Ook om vergelijkingen te maken tussen verschillende verdelingen wordt gebruik gemaakt van de standaardnormale verdeling (z-scores).

Met ICT kunnen de relatieve frequenties bij een normale verdeling bepaald worden en tegelijkertijd geïllustreerd worden als oppervlakte. Bij een gegeven gemiddelde en standaardafwijking kunnen bijv. de volgende concrete vragen aan bod komen: ‘Hoeveel procent van de volwassen mannen is kleiner dan 170 cm, heeft een lengte tussen 180 en 190 cm, is groter dan 195 cm?’ en ‘Bepaal de lengte zodat 75 % van de mannen kleiner is dan deze lengte.’ Daarbij zijn de gemiddelde waarde en de standaardafwijking gekend. De leerlingen moeten uiteraard wel inzien dat het hierbij om een model gaat, dat slechts benaderende oplossingen biedt. De leerlingen kunnen hierbij zelf een schets maken om de vraag te beredeneren. De vragen moeten mogelijk omgevormd worden tot een vraag van een bepaald model, bijvoorbeeld in functie van het gebruikte ICT-hulpmiddel.

De leerlingen moeten aan de hand van voorbeelden ook begrijpen dat niet alle data normaal verdeeld zijn of benaderd kunnen worden door een normale verdeling: bijv. de snelheid van geflitste wagens in de bebouwde kom, het begintijdstip van een telefoongesprek vanuit een bepaald kantoor, het inkomen van alle werknemers van een groot bedrijf, … Nagaan of statistische gegevens eventueel normaal verdeeld zijn, gebeurt in eerste instantie door te redeneren over de data en te onderzoeken of een histogram van deze gegevens klokvormig is. Daarnaast kan men dan nagaan of aan de 68-95-99,7-regel voldaan is. In de klas kan men zich hiertoe beperken. Een correctere analyse gebeurt door de relatieve cumulatieve frequenties uit te zetten in een assenstelsel van ‘normaal waarschijnlijkheidspapier’. Deze schaalverdeling is ook voorhanden op de grafische rekenmachine en statistische software, zonder dat de cumulatieve frequenties moeten uitgerekend worden.

Met behulp van de normale verdeling kunnen nu bijv. ook statistische gegevens met verschillend gemiddelde en standaardafwijking vergeleken worden. Stel bijv. dat je weet dat twee grote groepen schooluitslagen normaal verdeeld zijn en je wilt een uitslag van de ene groep vergelijken met een uitslag van een andere groep: bijv. is 8 bij een verdeling met gemiddeld 7 en standaardafwijking 1,3 ‘beter’ dan 15 bij een verdeling met gemiddelde 13,5 en standaardafwijking 1,8? Dit probleem kan aangepakt worden door na te gaan hoeveel procent van de uitslagen in beide gevallen hoger of lager liggen dan de te vergelijken waarden of door afwijkingen van het gemiddelde in beide gevallen uit te drukken in aantal standaardafwijkingen en deze getallen te vergelijken (z-scores).

UITBREIDINGSDOELSTELLING

SK7	Bij een concreet steekproefresultaat i.v.m. proporties een correcte statistische uitspraak formuleren, gebruik makend van een foutenmarge en het bijbehorende betrouwbaarheidsniveau.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Als men op basis van een steekproef een besluit wil trekken over de hele populatie moet men rekening houden met de steekproefvariabiliteit. Men kan die steekproefvariabiliteit aangeven door het steekproefresultaat te voorzien van een foutenmarge. Dergelijke foutenmarge is gekoppeld aan een betrouwbaarheidsniveau, bijv. 95 %. Dat betekent dat er een kans van 95 % is dat het interval bepaald door 'steekproefresultaat - foutenmarge' en 'steekproefresultaat + foutenmarge' de gezochte populatiewaarde bevat. Een dergelijk interval noemt men een betrouwbaarheidsinterval. Leerlingen moeten in staat zijn om statistische uitspraken, die gebruik maken van foutenmarges en betrouwbaarheidsniveaus, correct te interpreteren.

Onvertekende steekproeven van gelijke grootte, getrokken uit eenzelfde populatie, zullen meestal lichtjes verschillende resultaten opleveren. Men spreekt van steekproefvariabiliteit. Stel bijv. dat we weten dat in een bepaalde populatie een proportie van 0,3 of 30 % aan een zekere ziekte lijdt. Twee onvertekende steekproeven van 1000 personen zouden dan bijv. een proportie 0,293 en 0,331 van mensen met die ziekte kunnen aantreffen.

Via computersimulaties kan onderzocht worden hoe groot die steekproefvariabiliteit kan zijn, in functie van de steekproefgrootte. Daarbij maken leerlingen kennis met een belangrijke redenering in de statistiek: om de kwaliteit van een procedure te achterhalen, dien je die procedure een groot aantal keer uit te voeren, bijv. via een simulatie. Zo krijg je een zicht op de eventuele vertekening van de procedure (zijn de proporties steevast hoger of lager dan in de populatie?) en op de variabiliteit (hoe sterk kunnen de steekproefproporties afwijken van de populatieproportie?).

Gezien het toevallige karakter van een steekproefproportie is het onmogelijk te voorspellen wat de maximale en minimale waarden kunnen zijn. In principe zijn alle waarden tussen 0 en 1 immers mogelijk. Wel kan men uit een simulatie vaststellen dat het gros van de steekproefproporties (bijv. 95 %) niet meer dan een bepaalde waarde (bijv. 0,026 of 2,6 %) afwijken van de populatieproportie. Men noemt die 0,026 de foutenmarge en die 95 % het bijbehorend betrouwbaarheidsniveau.

Stel dat een steekproef een proportie van 0,317 opleverde, dan noemt men $[0{,}317 - 0{,}026;\ 0{,}317 + 0{,}026]$ een betrouwbaarheidsinterval bij een betrouwbaarheidsniveau van 95 %. De betekenis ervan is: dit interval heeft een kans van 95 % om de gezochte proportie te bevatten. De leerlingen moeten bij concrete statistische uitspraken waarin gebruik wordt gemaakt van foutenmarges en het bijbehorend betrouwbaarheidsniveau, de betekenis van beide begrippen duidelijk kunnen uitleggen.

Op basis van simulaties bij verschillende steekproefgroottes n en verschillende populatieproporties p, kan een tabel opgesteld worden met foutenmarges, bij een betrouwbaarheidsniveau van bijv. 95 %. Op die manier kan bij elke steekproefproportie snel een foutenmarge opgezocht worden.

In plaats van met een tabel, gebaseerd op simulaties, kunnen betrouwbaarheidsintervallen ook op andere manieren bepaald worden. Zo kunnen grafische rekenmachines deze ook opstellen voor elk gewenst betrouwbaarheidsniveau. De klemtoon moet liggen op het inzicht in de begrippen, niet op de berekeningen.

Men kan ook aantonen dat, bij het vaak herhalen van een steekproefneming, de gevonden steekproefproporties normaal verdeeld zijn. Bovendien zijn er eenvoudige formules voor μ en σ, op basis van de steekproefproportie.

De kennis van en het inzicht in de normale verdeling kan op die manier gebruikt worden om betrouwbaarheidsintervallen op te stellen in te interpreteren. Belangrijk hierbij is rekening te houden met de beperkingen die gelden om de normale verdeling en de formules voor μ en σ te mogen toepassen. Te weinig aandacht hieraan in de aanvangsfase kan er toe leiden dat leerlingen deze formules ten onrechte toepassen in alle situaties.

5.2.5 Mathematiseren en oplossen van problemen

ALGEMENE INLEIDING

De leerlingen worden binnen en buiten de context van de wiskundevorming geconfronteerd met allerlei problemen, die soms relatief ingewikkeld kunnen zijn. Door hun wiskundekennis adequaat aan te wenden kan deze complexiteit vereenvoudigd worden. Daartoe moeten ze het probleem vlot kunnen onderzoeken of analyseren en er de wiskundige elementen van herkennen en onderscheiden. Door het probleem met een wiskundig model te beschrijven kan het verhelderd worden. Vaak komt het er op neer op zoek te gaan naar de juiste gegevens, de vraag correct en helder te formuleren, de relaties die de context aanreikt in wiskundige termen uit te drukken. Het resultaat is een vergelijking, een stelsel, een meetkundige situatie, …. Met behulp van de beschikbare wiskundekennis kan dan het (verwiskundigd) probleem aangepakt worden met vertrouwde oplossingsmethoden. Het resultaat moet uiteraard geïnterpreteerd worden in de context om te onderzoeken of het daar betekenisvol is.

Bij de probleemstelling gebruiken de leerlingen heuristiek die vaak transfereerbaar is naar andere probleemsituaties. De wiskundige inhouden zijn hier slechts ondersteunend voor het ontwikkelen van deze probleemoplossende vaardigheden.
Zo kunnen leerlingen onder meer leren

- een goede voorstelling van een probleem te maken, o.m. herkenbaarheid van een probleem, herkenbaarheid van wiskundekennis;
- de relaties binnen het probleem te analyseren, bijv. noodzakelijke en overbodige informatie onderscheiden, bijkomende informatie zoeken;
- een oplossingsplan op te stellen indien nodig, bijv. het probleem opsplitsen in deelproblemen, een restrictie maken op de probleemstelling (i.c. het beperken van onderdelen om een wiskundige beschrijving mogelijk te maken), een vermoeden formuleren en toetsen;
- adequaat hulpmiddelen in te schakelen, bijv. vakspecifieke informatie, vademecum, aanwending van ICT;
- oog te hebben voor de interpretatie van resultaten;
- een gecontroleerde houding te ontwikkelen van terugkijken zowel op de fase van het stellen en/of het analyseren van het probleem, als die van het effectief oplossen;
- na te denken over de gevolgde oplossingsweg en hieruit conclusies te trekken naar de aanpak van een volgend probleem, bijv. hun wiskundekennis verhogen of beter structureren, bepaalde vaardigheden oefenen, betere kennisschema's uitwerken, onderdelen herhalen.

Het verwerken van problemen met behulp van wiskunde kan bij de leerlingen opvattingen en houdingen ontwikkelen over wiskunde. Zo zullen ze zich realiseren dat wiskunde meer is dan een stel regels, maar effectief kan ingezet worden om problemen uit het reële leven op te lossen of ten minste om er inzicht in te verwerven.
Ze kunnen inzien dat de vaardigheden verworven bij de aanpak van problemen binnen de wiskundevorming ook ingezet kunnen worden bij het oplossen van andere problemen. Zo kan een onderzoekende houding aangewend worden in elk probleemproces (bijv. verzamelen, aanvullen van informatie, opzoeken of herhalen van kennis, kritische houding ten aanzien van informatie). Zo ontwikkelt een wiskundige probleemaanpak vaak het doorzettingsvermogen en de zin voor nauwkeurigheid. Een houding van systematisch reflecterend terugkijken op een oplossingsproces kan hen leren fouten te vermijden en bij te sturen. Daardoor zal de tevredenheid over de uitvoering van een opdracht toenemen, en van daaruit kan het geloof in de eigen capaciteiten en hun zelfvertrouwen groeien.

Deze houdingen zijn ook van fundamenteel belang bij het leren zelf, i.c. een onderzoekende houding, doorzettingsvermogen, geloof in eigen kunnen, gecontroleerd uitvoeren van een plan, reflecterende feedback, ….

Aanbeveling lestijden: **ca. 20 lestijden**

BASISDOELSTELLINGEN

MA1	Problemen herkennen, analyseren en de probleemstelling verhelderen met behulp van hun wiskundekennis.
MA2	Heuristische methodes gebruiken om een probleem aan te pakken.
MA3	Resultaten interpreteren binnen de context van het gestelde probleem.
MA4	Een reflecterende houding verwerven door gecontroleerd terugkijken op de oplossingsweg en de uitgevoerde berekeningen.
MA5	Vertrouwen verwerven door hun wiskundekennis zinvol in te schakelen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de praktijk kunnen allerlei situaties aanleiding zijn tot interessante probleemstellingen.

- Problemen onderzoeken die worden aangereikt vanuit andere vakken, i.h.b. de technische vakken.
- Het ondersteunen van het wiskundig begrijpen van toepassingen binnen andere vakken, bijv.
    - het gebruik van het ruimtelijk inzicht bij het afstellen van CNC-machines en het verklaren van de werkwijze,
    - het gebruik van verschillende coördinatenstelsels (toestel, voorwerp) bij machinegebruik, bijv. gradatie van patronen, freesmachines, …
- Het ondersteunen van een wiskundig gedeelte van de geïntegreerde proef.
- Maatschappelijke problemen en situaties:
    - statistische informatie, enquêtes;
    - problemen en enquêtes binnen de schoolcontext;
    - maatschappelijke gedragingen (rijgedrag, rookgedrag, drugs, besteding inkomen, …);
    - milieuproblematiek;
    - samenlevingsproblemen;
    - verkiezingen;
    - verwerking en kritische bevraging van informatie in televisie, kranten en tijdschriften.

Ook de leerinhouden die de leerlingen verwerken vanuit het leerplan bevatten allerlei situaties om deze methodiek van probleemaanpak in de praktijk te brengen.

Het wiskundig instrumentarium van de leerlingen is niet zo uitgebreid en waarschijnlijk ook niet erg flexibel in het gebruik. Men zal dus de leerlingen voldoende begeleiden op de weg van probleemaanpak, die zeker niet eenvoudig is voor deze leerlingen vanuit zelfstandig werken met wiskunde. Sommige leerlingen hebben wellicht het meeste leerkansen als de leraar zijn aanpak voldoende transparant kan maken.
Bij dergelijk zelfstandig verwerken van een opdracht zal men de opdracht en de leerlingen gericht opvolgen om ze voldoende succeservaring te bieden. Zo is het zinvol verschillende wegen om tot een oplossing te komen zichtbaar te maken en te waarderen. Alleszins moeten de leerlingen terugkoppeling verwerven op het eigen proces van aanpakken.

Een aantal opdrachten kunnen individueel gegeven worden. Maar het lijkt ook zinvol ruimere probleemstellingen te behandelen in de vorm van groepstaken. Hierbij zullen leerlingen, weliswaar op hun niveau, over wiskunde en probleemaanpak moeten communiceren. Hiermee zal hun (wiskundige) taalvaardigheid aangescherpt worden (bijv. nauwkeurigheid, correct gebruik wiskundige begrippen). En zoals bij elke vorm van groepswerk bestaat hier de kans op (verdere) ontwikkeling van de sociale vaardigheden (van onderlinge communicatie, spreken en luisteren, openheid, respecteren van afspraken, respecteren van elkaars persoon, aanbrengen van en/of aanvaarden van een andere mening).

Dit onderdeel moet uiteraard opgenomen worden binnen de evaluatie. Het zou van een te beperkte visie reflecteren als dit onderdeel alleen zou beoordeeld worden op de uiteindelijke oplossing van een probleem. Permanente evaluatie, begrepen als een permanente feedback op het oplossingsproces, is hier het meest aangewezen.

5.3 KEUZEONDERWERPEN

5.3.1 Rijen

Aanbeveling lestijden: **ca. 10 lestijden**
Voor de studierichting *Industriële wetenschappen* met *8 wekelijkse lestijden wiskunde* is dit onderwerp verplicht.

DOELSTELLINGEN

RIJ1	Van een rij vaststellen of het een rekenkundige of meetkundige rij is.
RIJ2	Bij een rekenkundige rij de formules voor de algemene term en voor de som van de eerste n termen afleiden.
RIJ3	Bij een meetkundige rij de formules voor de algemene term en voor de som van de eerste n termen afleiden.
RIJ4	Vraagstukken oplossen in verband met rekenkundige of meetkundige rijen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de eerste graad werden getallenrijen onderzocht op mogelijke regelmaat in de opbouw ervan. In een aantal rijen kan een getal op een willekeurige plaats afgeleid worden uit (het) vorige(n).

Hier worden twee bijzondere soorten rijen onderzocht: de rekenkundige rij en de meetkundige rij. Ze beschrijven op discrete wijze twee belangrijke groeiprocessen: de lineaire en de exponentiële groei. Anderzijds is het zinvol de leerlingen te wijzen op de relatieve beperktheid van beide ‘systemen’ om rijen op te bouwen. De leerlingen moeten geconfronteerd worden met andere soorten rijen, zoals de rij van Fibonacci.

Als de beschikbare tijd het toelaat kunnen nog andere voorbeelden gegeven worden, bijv. een harmonische rij, een rij bepaald in functie van het rangnummer van de term, een rij met een eenvoudige recursieve formule.

De leerlingen onderzoeken hoe ze een andere term van de rij kunnen bepalen als een aantal termen van een rekenkundige of meetkundige rij gegeven zijn. Uitgangspunt is allicht dat de eerste termen van de rij gegeven zijn, met de vraag de rij verder te zetten. Eens hierin inzicht verworven is, kan dit uitgebreid worden tot rijen gegeven met niet opeenvolgende termen. Dit proces leidt tot formules waarmee ze een willekeurige term kunnen berekenen. De formules worden bewezen.

Eenzelfde werkwijze wordt gevolgd voor de berekening van de som van de eerste n termen. Als toepassing kan de som van de eerste n natuurlijke getallen berekend worden. Gezien de tijd voor dit onderwerp beperkt is, is het niet de bedoeling allerlei ingewikkelde oefeningen op deze formules te maken. Wel worden de formules bewezen.

Rekenkundige rijen en meetkundige rijen kunnen in allerlei vraagstukken verwerkt worden. Voorbeelden: jaarlijkse groei met enkelvoudige intrest, groei van een salaris met constante jaarlijkse toename, stapelwijze van palen, jaarlijkse groei bij samengestelde intrest, aangroei bacteriepopulatie, afstand tot de grond van een botsende bal, omtrek en oppervlakte van een rij in elkaar ingebedde vierkanten (telkens vanuit de middens van de zijden), enz.

UITBREIDINGSDOELSTELLINGEN

RIJ5	De begrippen convergentie en divergentie illustreren met voorbeelden.
RIJ6	Het stijgend en dalend zijn van een rij onderzoeken.
RIJ7	Eigenschappen in verband met begrensde rijen gebruiken bij convergentieonderzoek.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerlingen moeten met voorbeelden van rijen de begrippen convergentie en divergentie duidelijk maken. In bepaalde gevallen kan ICT helpen bij de studie van de convergentie en divergentie van rijen. Dit kan langs grafische weg maar ook aan de hand van tabellen.

Men kan op zoek gaan naar een analytisch criterium om convergentie en divergentie aan te tonen. In eenvoudige gevallen kan men de convergentie of divergentie bewijzen.

Ook de laatste twee doelstellingen moeten in de context van het convergentieonderzoek gezien worden. Ook hier kunnen de eigenschappen op grafische manier aannemelijk gemaakt worden.

5.3.2 Iteratie

INLEIDING

Iteratie is een proces dat niet alleen in de wiskunde voorkomt. Ook in onze alledaagse handelingen kunnen we iteraties ontdekken: bijvoorbeeld het in vieren plooien van een brief. De filmwereld maakt soms gebruik van iteratie: bij een opname wordt een TV opgenomen, waarop de uitzending te zien is, zodat het TV-scherm wordt weergegeven in het TV-scherm van het TV-scherm enz.

Iteratie is een onderdeel dat aansluit bij rijen. Zo kunnen rijen met een recursief voorschrift opgebouwd worden door middel van iteratie.

Iteratie vindt zijn oorsprong in de studie van dynamische systemen. Zo'n systeem heeft een input en een output. Om de evolutie in de tijd van het systeem te onderzoeken en te bestuderen, zal de verkregen output als nieuwe input aan het systeem aangeboden worden en dit een aantal keren na elkaar. Dit is een iteratie.

Het systeem kan evolueren naar een stationaire toestand (dekpunt), kan springen tussen een aantal toestanden (periode) of kan uit zijn voegen barsten (blijven toenemen of afnemen). Een stationaire toestand kan nog twee verschijningsvormen kennen: aantrekkend of afstotend. Dit is te vergelijken met de fysische toestand 'evenwicht' waar men spreekt van stabiel (aantrekkend, terugkerend naar zijn oorspronkelijke toestand) en labiel (afstotend, niet terugkerend naar zijn oorspronkelijke toestand) evenwicht.

Toepassingen van iteratie kunnen in verschillende situaties voorkomen.
- Het herhaaldelijk verschalen van een figuur in de meetkunde.
- Het herhaaldelijk toepassen van dezelfde groep transformaties.
- Met een rekenmachine kan men bijvoorbeeld de vierkantswortel van een getal nemen en daarna de vierkantswortel van het resultaat en dat blijven herhalen.
- De studie van de evolutie van populaties.
- Benaderingsmethodes voor nulpunten van functies.
- Het bepalen van oplossingen voor vergelijkingen of stelsels van vergelijkingen.
- Meetkundige en rekenkundige rijen.
- De oplossing van het probleem van de toren van Hanoi.

Aanbeveling lestijden: **ca. 10 lestijden**
Voor de studierichting *Industriële wetenschappen* met *8 wekelijkse lestijden wiskunde* is dit onderwerp verplicht.

DOELSTELLINGEN

IT1	De begrippen baan en dekpunt illustreren bij eenvoudige voorbeelden.
IT2	De dekpunten van een iteratie bepalen.
IT3	Het belang van de startwaarde (beginwaarde) voor de baan bij een iteratie illustreren met een voorbeeld.
IT4	Soorten banen en dekpunten bij een iteratief proces onderscheiden met behulp van ICT-middelen.

IT5	Het verschil tussen een aantrekkend of afstotend karakter van een dekpunt illustreren.
IT6	De periodiciteit van een baan onderzoeken.
IT7	Vraagstukken in verband met iteraties oplossen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Het is de bedoeling dat de leerlingen in eenvoudige voorbeelden, zowel grafisch als algebraïsch, de eventuele dekpunten kunnen afleiden. De leerlingen moeten de baan van een iteratief proces kunnen aangeven.

De startwaarde van een iteratief proces is belangrijk voor het verdere verloop of gedrag van het iteratief proces. De baan en de dekpunten kunnen nogal verschillen. Dat wordt geïllustreerd door beginwaarden van het proces te veranderen en te kijken naar het verloop van het proces. Daartoe kan gebruik gemaakt worden van tabellen en grafieken.

Een webdiagram is een grafische voorstelling die veel gebruikt wordt bij het bestuderen van de soorten banen en ook voor het opsporen van dekpunten. Om een webdiagram te construeren, kan het best ICT gebruikt worden. Het is een eenvoudig maar belangrijk hulpinstrument. Het is leerrijk om het webdiagram van eenvoudige iteraties te bestuderen waarbij zoveel mogelijk verschillende situaties optreden.

Met behulp van tabellen en/of webdiagrammen kan besloten worden of een dekpunt aantrekkend of afstotend van karakter is. Daarbij worden zeer kleine afwijkingen genomen ten opzichte van het dekpunt en wordt de baan beschreven met die waarden als startwaarde. Komt de baan na enige iteraties terug op het dekpunt dan spreekt men van aantrekkend. Vlucht de baan weg van het dekpunt dan is het dekpunt afstotend.

De periodiciteit van een baan is het aantal iteraties dat moet uitgevoerd worden opdat een waarde op zichzelf wordt afgebeeld. De baan die zo ontstaat wordt een periodieke baan of cyclus genoemd.

Bij het maken van vraagstukken is het niet de bedoeling om alleen de nadruk te leggen bij het rekentechnisch aspect van iteraties. Er kunnen heel wat vragen gesteld worden rond grafieken en tabellen zonder dat er daarbij veel rekenwerk nodig is. In de praktijk komen in heel wat gebieden iteratieve processen voor. Iteraties in de wiskunde kunnen ook meetkundig van aard zijn, bijvoorbeeld het genereren van fractalen.

Het ligt voor de hand dat niet alle iteratieve processen aanleiding geven tot eenvoudige berekeningen. Bij meetkundige iteraties kunnen een aantal voorbeelden praktisch gerealiseerd worden door de leerlingen. Eventueel kunnen eenvoudige voorbeelden, onder begeleiding geprogrammeerd worden met behulp van ICT.

In het deel numerieke methoden wordt verwezen naar een aantal voorbeelden van een iteratief proces.

UITBREIDINGSDOELSTELLINGEN

IT8	Een analytisch criterium opstellen en gebruiken bij het onderzoek naar de stabiliteit van dekpunten

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Het is mogelijk om een analytisch criterium op te stellen waarmee onmiddellijk duidelijk is of het dekpunt afstotend of aantrekkend is. Dit maakt gebruik van afgeleiden.

5.3.3 Convergentie van een reeks

INLEIDING

De bedoeling van Taylor- en Maclaurinreeksen is om functies te benaderen door veeltermfuncties. Een concrete toepassing hiervan zijn computers en rekenmachines. Deze berekenen willekeurige functiewaarden, alhoewel zij in wezen enkel de elementaire bewerkingen optellen en vermenigvuldigen kennen. De reeksen van Taylor en Maclaurin zijn wel niet de methoden die bij deze toestellen gebruikt worden, maar een aanzet daartoe.

Dit onderwerp kan maar aan bod komen na het keuzeonderwerp *Rijen,* met inbegrip van de uitbreidingsdoelstellingen over convergentie van rijen.

Aanbeveling lestijden: **ca. 10 lestijden**

DOELSTELLINGEN

CR1	De convergentie van een reeks onderzoeken en gebruiken in toepassingen.
CR2	De formule van Taylor en Maclaurin gebruiken om een functie te benaderen door een veeltermfunctie.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerlingen zijn vertrouwd met ‘som van een eindig aantal termen’. Een situatie waarbij de som van een oneindig aantal termen berekend werd kwam bij een meetkundige rij voor.

Onmiddellijk rijst de vraag of deze ‘som‘ bestaat (cf. onderdeel rijen). Veralgemening hiervan leidt tot het begrip reeks, en gebruikmakend van de rij van partieelsommen, tot de convergentie. Het is niet de bedoeling systematisch de convergentie van reeksen te onderzoeken maar wel een bondig overzicht te geven van de convergentie van een aantal bekende reeksen (rekenkundige, meetkundige, harmonische, ...) door gebruikmaking van een beperkt aantal convergentiemethodes. Belangrijk is eerder deze resultaten toe te passen in een aantal vraagstukken die verbonden zijn aan (convergentie) van reeksen (lengte netwerk in een driehoek, in een vierkant, lengte kantige spiraal in een vierkant, verdelen papierstrook enz.).

Uitgaande van gepaste voorbeelden kan de stelling van Taylor plausibel gemaakt worden. De raaklijn aan de grafiek in een punt kan namelijk gebruikt worden om waarden te benaderen van de functie in een kleine omgeving van het punt. Immers, in deze omgeving zullen de functiewaarden en alsook de eerste afgeleide van de functie en van de raaklijnfunctie gelijk zijn. De vraag kan gesteld worden of het mogelijk is een benadering voor de functie van de tweede (…, nde) graad op te stellen, zodat de functiewaarde, de eerste, de tweede (…, de nde) afgeleide gelijk zijn. Met deze voorwaarden kunnen de formules van Taylor afgeleid worden (voor het specifieke geval van een benadering rond 0 is dit de formule van Maclaurin). De Maclaurinbenaderingen voor de gekende elementaire functies kunnen opgesteld worden. Hiermee kunnen benaderde waarden van functies in bepaalde punten berekend worden (bijvoorbeeld het getal e en het getal π). Ook kan het verband gelegd worden met de stelling van Lagrange i.v.m.afgeleiden. Het bestaan van de restterm wordt hierdoor geïllustreerd.

Met behulp van ICT is het mogelijk om de grafieken van de functies en haar opeenvolgende Maclaurinbenaderingen uit te tekenen. Zo zien we dat de intervallen waarvoor de benaderingen goed zijn voor de meeste elementaire functies groter worden bij grotere waarden van n. Voor $f(x) = \ln(1+x)$ blijkt de benadering slechts te convergeren in een beperkt interval.

Om het convergentiegebied van de reeksen te bepalen kan gebruik gemaakt worden van het convergentiekenmerk van d'Alembert. Dit kan bewezen worden of geïllustreerd worden met behulp van de convergentie van meetkundige reeksen. Om dit kenmerk toe te passen moet dan eerst de algemene term van de verschillende reeksen opgesteld worden. Hierna kunnen leerlingen dan het convergentiegebied van de verschillende reeksen berekenen. Bij $f(x) = \ln(1+x)$ zien ze dat dit inderdaad beperkt is tot het gebied waarvoor $|x| < 1$, hetgeen grafisch ook opgemerkt werd. Eventueel kan de reeks van $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$ berekend worden. Deze zal wel voor elke x van het domein convergeren en hiermee kan dan de neperiaanse logaritme berekend worden van een willekeurig getal.

Indien de leerlingen over enige programmeerervaring beschikken kunnen zij een programma schrijven dat de waarde van een functie benadert door gebruik te maken van de reeksontwikkeling.

Enkele numerieke berekeningen, zoals $\cos(1 + 10^{-24}) - \cos 1$, met ICT laten uitvoeren onderstrepen de begrensdheid van de rekenmachine en illustreren een oplossing hiervoor door gebruik te maken van de Taylor- en Maclaurinformule.

Andere mogelijke toepassingen zijn vergelijkingen zoals $\sin x - \frac{x^2}{2} = 0$ (benaderend) oplossen, door $\sin x$ te vervangen door een aantal termen van haar Maclaurinformule. Vergelijken met ICT-oplossingen blijft nodig.

5.3.4 Numerieke methoden

INLEIDING

In een tijdperk van computers en programmeerbare rekenmachines is het belangrijk te beschikken over een aantal numerieke methodes om een aantal wiskundige grootheden te berekenen. Het is daarom interessant om voor de leerlingen een tipje van de numerieke sluier op te lichten en ze te confronteren met een aantal numerieke mechanismen aangepast aan hun kunnen. Daarbij leren ze omgaan met nauwkeurigheid van resultaten als men de vraagstukken aan een concrete context bindt.

Een aantal numerieke methodes steunt op een iteratief proces om tot een oplossing te komen. Men start van een giswaarde en past herhaaldelijk dezelfde werkwijze toe, totdat de verkregen waarde de vooropgestelde nauwkeurigheid bereikt.

Naast de zuiver wiskundige aspecten van de methodes kan men aandacht besteden aan de programmatische aspecten van de methodes. Dit kan aanleiding geven tot een zelfstandig werk waarbij de leerlingen een bepaalde methode moeten programmeren.

Aanbeveling lestijden: **ca. 15 lestijden**

DOELSTELLINGEN

NM1	In concrete situaties, numerieke methodes toepassen om de oplossingen van vergelijkingen te vinden.
NM2	Stelsels van vergelijkingen, vanuit toepassingen numeriek oplossen.
NM3	In praktijkvoorbeelden de afgeleide in een punt numeriek bepalen.
NM4	In concrete situaties, toepassingen in verband met integralen numeriek berekenen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De klassieke methodes om een oplossing van een vergelijking te vinden zijn:
- de methode van de intervalmiddens,
- de methode van de regula falsi.
- de methode van Newton.

Er bestaat ook een zogenoemde methode van de dekpunten (iteratiemethode). Deze bestaat erin om de vergelijking zo te omvormen dat het zoeken van de oplossing herleid wordt tot het zoeken van het dekpunt van een iteratief proces. Bij deze methode kan de wijze van het omvormen van de vergelijking tot merkwaardige resultaten leiden.
Ook dient de aandacht gevestigd te worden op het feit dat deze methoden altijd maar een oplossing geven van de vergelijking terwijl er misschien meerdere zijn.
Het kan interessant zijn om de verschillende methodes op hetzelfde voorbeeld toe te passen. Daarmee kan men aangegeven dat de snelheid waarmee de verschillende methodes tot de oplossing convergeren nogal kan uiteen liggen. Het ligt zeker niet in de bedoeling om hier aan een streng wiskundig convergentieonderzoek te doen. Het is er hem om te doen dat de leerlingen beseffen dat de keuze van de methode nogal wat gevolgen kan hebben. Waakzaamheid blijft dus de boodschap.
De leerlingen moeten ook beseffen dat het hier niet gaat om wondermiddelen. Er kunnen zich situaties voordoen waarbij er door de gebruikte methode geen oplossingen gevonden worden terwijl de vergelijking wel duidelijk oplossingen heeft.

Het is hier niet de bedoeling om de oplossingswijze volgens de regel van Cramer of volgens de methode van Gauss-Jordan opnieuw te herhalen.

Als de regel van Cramer en de methode van Gauss-Jordan niet of moeilijk kunnen toegepast worden bestaan er toch nog methodes die de oplossing van het stelsel kunnen opleveren. Hier komen een tweetal methodes in aanmerking:

- de methode van Jacobi,
- de methode van Gauss-Siedel.

De tweede methode is een geperfectioneerde versie van de eerste. De convergentiesnelheid is over 't algemeen veel groter. Deze methodes zijn vooral bruikbaar wanneer de coëfficiëntenrij zeer kleine decimale getallen zijn.

Numerieke differentiatiemethodes zijn belangrijk wanneer we naar concrete situaties overgaan. Deze concrete situaties worden meestal beschreven vanuit discrete data (waarnemingsresultaten bijvoorbeeld) en niet onmiddellijk door een functievoorschrift.
Bijvoorbeeld: we gooien een voorwerp omhoog of we laten een voorwerp vallen dan kunnen we met een bepaalde eenvoud de hoogte bepalen op geregelde tijdstippen. Wanneer we nu beschikkend over deze data, een idee willen krijgen over de snelheid (en zijn evolutie in de tijd) dan komen we met de analytische methoden voor het berekenen van afgeleiden niet ver. We moeten dit op een andere manier aanpakken. Het kan ook zijn dat de analytische methode wel bestaat maar veel te omslachtig is om tot een oplossing te komen dan is de numerieke afgeleide de redder in nood.

Bij de numerieke methodes voor integratie vermelden we:

- de methode van de intervalmiddens,
- de trapeziumregel,
- de methode van Simpson.

Ook hier kan dezelfde opmerking, zoals bij de numerieke differentiatie, gemaakt worden. Met goed gekozen voorbeelden kunnen de voor- en de nadelen van de verschillende methodes aangegeven worden. Een praktische toepassing zou kunnen zijn: de leerlingen krijgen een willekeurig omwentelingslichaam en een schuifmaat. Er wordt gevraagd naar de inhoud van dat omwentelingslichaam. Daarna kan het bekomen resultaat proefondervindelijk gecontroleerd worden. Indien het mogelijk is, zou men ook kunnen proberen om een voorschrift van een functie te zoeken die door de door meten verkregen punten gaat en pogen ofwel manueel ofwel met behulp van ICT de integraal te berekenen. Hierdoor komen de leerlingen tot het besef dat er voldoende meetgegevens moeten zijn. Hoe meer meetgegevens hoe groter de nauwkeurigheid wordt.

5.3.5 Differentiaalvergelijkingen

Voor het oplossen van een probleem hebben de leerlingen vaak een beroep gedaan op functies die een wiskundig model weergeven van het – rechtstreeks - verband tussen de variabelen die in de context voorkomen. Uitgaande van enkele praktische probleemschetsen zal blijken dat de modelopbouw van een probleem ook een verband kan zijn tussen de verandering van een variabele en de in de context aanwezige variabelen. Oplossen van het vraagstuk betekent het vinden van deze grootheid wat betekent het oplossen van een differentiaalvergelijking.

Aanbeveling lestijden: **ca. 15 lestijden**
Voor de studierichting *Industriële wetenschappen* met *8 wekelijkse lestijden wiskunde* is dit onderwerp verplicht.

DOELSTELLINGEN

DV1	In een model, het verband tussen de verandering van een variabele en de optredende variabelen weergeven door een differentiaalvergelijking.
DV2	Eenvoudige differentiaalvergelijkingen oplossen.
DV3	Vraagstukken oplossen waarbij differentiaalvergelijkingen gebruikt worden.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerlingen hebben het begrip afgeleide gebruikt als maat voor een ogenblikkelijke verandering. Een aanknopingspunt kan de exponentiële groei vormen, waarbij de groei van de populatie evenredig is met de populatie zelf, wat leidt tot het opstellen van een zogenaamd dynamisch model voor de exponentiële groei van de populatie. Terloops kan het onderscheid aangegeven worden tussen continue en discrete dynamische modellen. Op deze wijze maken de leerlingen kennis met vergelijkingen van de vorm: $g(x, y', y'', ...) = 0$, die informatie geeft over de verandering van een grootheid. Vlug wordt duidelijk dat het vastleggen van de grootheid zelf met haar functievoorschrift prioritair is. Dat wordt oplossing van de differentiaalvergelijking genoemd.

Het hoofddoel van dit thema is praktische problemen oplossen met behulp van differentiaalvergelijkingen. Het volstaat enkele methodes voor te stellen voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen met beperking van orde en graad.
Onder eenvoudige differentiaalvergelijkingen kan verstaan worden:

- eerste orde differentiaalvergelijkingen die oplosbaar zijn door het scheiden van de variabelen, zoals $\frac{dy(x)}{dx}+py(x)=q$ met pen p reële getallen;
- tweede orde differentiaalvergelijkingen van de vorm $\frac{d^2y(x)}{dx^2}=p$, $\frac{d^2y(x)}{dx^2}+p\frac{dy(x)}{dx}=0$ en $\frac{d^2y(x)}{dx^2}+py(x)=0$ met p een reëel getal.

Er moet toch over gewaakt worden dat de differentiaalvergelijkingen zonder ingewikkelde theorieën kunnen opgelost worden. Aandacht zal besteed worden aan de soorten oplossingen zoals algemene, particuliere en singuliere oplossing. In praktische toepassingen zijn we meestal aan voorwaarden gebonden zoals de beginsituatie van waarnemingen, bijzondere waarden van de afhankelijke veranderlijke voor gegeven onafhankelijke veranderlijken. Door verrekening van deze randvoorwaarden kunnen een aantal integratieconstanten gevonden worden die toelaten die particuliere oplossing te bekomen die aan het probleem beantwoordt.

De techniek voor het vinden van een veld van lijnelementen is ook nuttig om de integraalkrommen van de differentiaalvergelijking te voorspellen, aangepaste software werkt hier zeer ondersteunend.

Voorbeelden van situaties die leiden tot de oplossing van een differentiaalvergelijking kunnen zijn:

- positiebepaling van een puntmassa die in het luchtledige valt van op een hoogte h;
- snelheid van een parachutist na het opengaan van zijn valscherm;
- berekening van de ontsnappingssnelheid van een verticaal afgeschoten projectiel van op de aarde;
- vraagstukken over exponentiële groei;
- ontlading van een condensator;
- berekening van de tijd die een afgevuurde kogel aflegt door een hoop zand indien de afremming van de kogel gelijk is aan de vierkantswortel van de indringsnelheid bij gegeven indringsnelheid;
- prooi- en roofdiermodel;
- absorptie van licht dat een glasplaat binnendringt;
- temperatuuraanpassing van een voorwerp aan de omgevingstemperatuur;
- radioactieve vervalwet.

5.3.6 Elementaire kegelsneden

Aanbeveling lestijden: **ca. 20 lestijden**
Voor de studierichting *Industriële wetenschappen* met *8 wekelijkse lestijden wiskunde* is dit onderwerp verplicht.

DOELSTELLINGEN

KS1	Een ellips, een hyperbool en een parabool definiëren als een verzameling van punten.
KS2	De canonieke vergelijking opstellen van een ellips, een hyperbool en een parabool.
KS3	De vergelijking opstellen van de raaklijn in een punt van een ellips, een hyperbool en een parabool.

KS4	De vergelijking opstellen van de normaal in een punt van een ellips, een hyperbool en een parabool.
KS5	De vergelijking opstellen van de middellijn toegevoegd aan een richting.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Vanuit de definitie en door gebruik te maken van de afstandsformule kan men de canonieke vergelijking van de verschillende elementaire kegelsneden opstellen. De grafieken worden getekend met behulp van ICT. Men kan het relatievoorschrift expliciteren als de unie van twee irrationale functies. Het is eveneens interessant in te gaan op de benaming 'kegelsnede': ellips, hyperbool en parabool zijn snijlijnen van een vlak met een kegel. Hun etymologische betekenis kan aangehaald worden en het gebruik van deze begrippen in de omgangstaal. Men wijst ook op het verband tussen ellips en cirkel.

Allerhande eigenschappen van de parabool, ellips en hyperbool i.v.m. raaklijnen, normaal, symmetrie, middelpunt, middellijnen, assen en toppen, brandpunten en richtlijnen, worden onderzocht. Het verwerven van deze eigenschappen is ondergeschikt aan het gebruik ervan in toepassingen. Men kan het aantal snijpunten bepalen van een rechte met een kegelsnede en van twee kegelsneden.

Bij het opstellen van de vergelijking van de raaklijn in een punt van de kegelsnede kan men het verband gebruiken tussen de afgeleide in dat punt en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn. Het is mogelijk om een algemene vergelijking op te stellen van de vergelijkingen van de raaklijnen met een gegeven richting aan de kegelsnede.

Het is niet nodig een algemene formule op te stellen van de normaal in een punt van een kegelsnede. Het is voldoende om vanuit de gegeven vergelijking van een kegelsnede en een gegeven punt op die kegelsnede de vergelijking van de normaal op te stellen, steunend op het verband tussen de richtingscoëfficiënten van loodrecht staande rechten. Men kan aandacht besteden aan de optische eigenschap (soms 'hoofdeigenschap' genoemd) van de parabool en ellips.

Aan de hand van voorbeelden wordt aangetoond dat de middens van alle evenwijdige koorden in een kegelsnede op één rechte (middellijn genoemd) liggen. Uitgaande van die voorbeelden is het mogelijk om de algemene vergelijking van de middellijn toegevoegd aan een richting op te stellen.

Als *uitbreiding* kan men de parametervergelijkingen opstellen evenals de invloed nagaan van het verschuiven van het assenstelsel (naar één van de toppen, naar een brandpunt, willekeurig) op de canonieke vergelijking van de kegelsnede.

Toepassingen zijn o.a. telescopen, schotelantennes, koplampen van auto's, de elliptische spiegel, de niersteenverbrijzelaar, de baan van een planeet rond de zon, het uitzenden van synchroon periodieke signalen door twee bronnen, druk en volume van ideale gassen bij constante temperatuur, …

5.3.7 Krommen

INLEIDING

Als toepassing op de vlakke analytische meetkunde kunnen de leerlingen enkele bijzondere krommen bestuderen door gebruik te maken van hulpmiddelen die de algebra en de analyse aanreiken. Als men ook het onderwerp *Kegelsneden* behandelt, dan kunnen deze onderwerpen uiteraard geïntegreerd aangeboden worden.

Aanbeveling lestijden: **ca. 30 lestijden**

DOELSTELLINGEN

AM1	Meetkundige voorwaarden analytisch vertolken.
AM2	De baan van een punt in het vlak beschrijven met een stel parametervergelijkingen.

AM3	Een kromme tekenen als de poolvergelijking gegeven is.
AM4	Een kromme gegeven in poolcoördinaten omzetten naar zijn cartesiaanse gedaante en omgekeerd.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In vele meetkundige problemen komt een veranderlijk punt P van het vlak voor. Meestal wordt dit punt één of meer meetkundige voorwaarden opgelegd, zodat P niet elke plaats in het vlak kan aannemen. De verzameling die gevormd wordt door alle punten waarmee het veranderlijke punt kan samenvallen, vormt een deelverzameling van het vlak. In vele gevallen is dit een kromme k, de meetkundige plaats van het veranderlijke punt P.

Om een vergelijking van deze meetkundige plaats op te stellen is een efficiënte keuze van het assenstelsel noodzakelijk. Een andere keuze van assenstelsel kan immers leiden tot complexer rekenwerk en een andere vergelijking van de kromme.

Voor de hand liggende meetkundige plaatsen zijn de kegelsneden. Men kan echter ook andere ‘beroemde’ krommen cartesiaans behandelen zoals de strofoïde, de cissoïde, het lemniscaat of trifolium om dan later deze zelfde krommen te beschrijven m.b.v. poolcoördinaten.

Vaak kunnen krommen beschreven worden met behulp van coördinaatfuncties $x = f_1(t),\ y = f_2(t)$. Zo’n beschrijving noemen we een parametervoorstelling van de kromme. De parametervoorstelling heeft een dynamisch karakter; door interpretatie van t als de tijd kunnen we de parametervoorstelling zien als de beschrijving van de baan waarlangs een punt zich in het vlak voortbeweegt.

Heel bekende voorbeelden zijn de cycloïden (de baan van een punt P op een cirkel die rolt zonder glijden over een rechte) en de krommen van Lissajous.

Ook de parametervoorstellingen van de kegelsneden zijn eenvoudig op te stellen. Het is nogal voor de hand liggend dat de cirkel met straal 1 en middelpunt in de oorsprong de parametervoorstelling $x = \cos(t),\ y = \sin(t)$ heeft; op deze wijze immers zijn de goniometrische functies gedefinieerd.

In het tweedimensionale cartesiaanse of rechthoekige coördinatensysteem worden punten van een plat vlak met behulp van de x-as en de y-as, vastgelegd door hun coördinaatgetallen x en y. Voor het opstellen van meetkundige plaatsen is het handig om behalve cartesiaanse coördinaten ook poolcoördinaten in te voeren. De poolcoördinaat van het punt P (verschillend van de oorsprong) met cartesiaanse coördinaat (x, y) is (r, θ). Hierbij is r de voerstraal van P; deze is gelijk aan de afstand van P tot de oorsprong O van het cartesiaans coördinatenstelsel. En θ is de positief georiënteerde hoek tussen de positieve x-as en OP. De poolcoördinaat van O is $(0, \theta)$ waarin θ een willekeurige hoek is.

Het verband tussen de cartesiaanse coördinaten (x,y) en de poolcoördinaten (r, θ) is vrij gemakkelijk aan te tonen, omdat de leerlingen reeds vertrouwd zijn met zowel de algebraïsche vorm als de goniometrische gedaante van een complex getal.

Bekende poolkrommen zijn o.a. de spiraal van Archimedes, de cardioïde of hartlijn, de conchoïde van Nicomedes en rozetten.

Indien de poolvergelijking van kegelsneden wordt behandeld kan men iets zeggen over de excentriciteit van een kegelsnede.

5.3.8 Financiële algebra

INLEIDING

Financiële algebra is niet alleen een vormend maar ook een belangrijk praktisch onderdeel van de wiskunde. In hun later leven zullen heel wat leerlingen geconfronteerd worden met vormen van beleggen of vormen van lenen. Daarom heeft de studie van financiële algebra zowel een wiskundig als een sociaal-maatschappelijk aspect. Beide aspecten zijn even belangrijk en moeten bijgevolg allebei voldoende aandacht krijgen.

Wiskundige begrippen die kunnen toegepast worden zijn o.a. de eerstegraadsfunctie (bijvoorbeeld: enkelvoudige intrest), de exponentiële functie (bijvoorbeeld: samengestelde intrest, de opeenvolgende aflossingsbestanddelen bij een schuldaflossing met constante annuïteit), meetkundige rij (bijvoorbeeld: kapitaalsvorming). Het probleemoplossend denken wordt bevorderd door de leerlingen te confronteren met verschillende praktische situaties.

De theoretische kennis mag niet losgekoppeld worden van de realiteit. De leerlingen moeten, als toekomstige consumenten, vaardig worden in het evalueren van het ruime aanbod binnen de financiële wereld. Het is niet mogelijk dat alle bestaande vormen van beleggen en lenen besproken worden. Bovendien ontstaan er voortdurend nieuwe vormen. Het is nodig dat leerlingen zo opgeleid worden dat zij de transfer kunnen maken naar bestaande of nieuwe vormen.

Financiële algebra is sterk gebonden aan economische conjunctuur en wetgeving. Bijgevolg moet de leraar zich op de hoogte houden van bijvoorbeeld wijziging van rentevoeten, van roerende voorheffing, van wettelijke regels enz. zodat deze wijzigingen onmiddellijk kunnen opgenomen worden in de lessituatie. Informatie vindt men in de economische bladzijden van dagbladen en tijdschriften, bij de financiële instellingen en op het internet.

Met de leerlingen kan besproken worden wat de voor- en nadelen zijn van een zichtrekening, van een spaarrekening, van bepaalde soorten beleggingen (termijnrekening, kasbons, fondsen, ...), wat de gemiddelde kostprijs is van een bouwgrond en van een woning, hoeveel een gezinsinkomen moet bedragen om een bepaalde lening aan te kunnen gaan, of een bepaald goed beter gekocht wordt door middel van een consumentenkrediet of door gebruik te maken van spaargeld, enz.

Bij het oplossen van een probleem moeten de leerlingen een goed onderscheid kunnen maken tussen enkelvoudige en samengestelde intrest, tussen kapitaalsvorming en schuldaflossing, tussen de aard van de rentevoet (jaarlijks, semestrieel, ...), enz.

De ervaring leert dat heel wat leerlingen moeite hebben om deze leerstof te verwerken. De leerlingen moeten zich niet alleen kunnen inleven in de materie maar moeten hun kennis ook geregeld actualiseren. Daarom zal men voldoende tijd nemen om de doelstellingen te realiseren.

Aanbeveling lestijden: ***ca. 25 lestijden***

DOELSTELLINGEN

FA1	Het verschil uitleggen tussen enkelvoudige en samengestelde intrest.
FA2	Een jaarlijkse rentevoet omzetten in een gelijkwaardige maandelijkse, trimestriële of semestriele rentevoet en omgekeerd.
FA3	De eindwaarde en het termijnbedrag berekenen bij een postnumerando kapitaalsvorming.
FA4	Het te lenen bedrag en het termijnbedrag berekenen bij een schuldaflossing met dadelijk ingaande annuïteit.
FA5	Het bedrag berekenen dat moet betaald worden als de schuld wordt afgelost voor de eindvervaldag.
FA6	Het verschil uitleggen tussen een lening met constante annuïteit en een lening met constante kapitaalsaflossing.
FA7	Een aflossingstabel interpreteren.
FA8	Uit een reclameaanbieding het soort consumentenkrediet herkennen en de gegevens ervan controleren.
FA9	In verband met de aangeleerde begrippen informatie verzamelen en interpreteren.
FA10	De aangeleerde begrippen kaderen binnen de actuele situatie.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Bij *enkelvoudige en samengestelde intrest* kan men uitgaande van de hoofdformules de formules voor het berekenen van beginwaarde en rentevoet afleiden. Maar het is evengoed mogelijk in de hoofdformule de gegevens in te vullen en de gevraagde parameter te berekenen zoals bij een vergelijking. Belangrijke toepassingen zijn de zichtrekening, de spaarrekening en de termijnrekening. Oefeningen op het berekenen van de netto-intrest bij een zichtrekening of een spaarrekening hebben geen zin. Alhoewel er algemene regels zijn voor het bepalen van de valutadata zijn er teveel afwijkingen naargelang de soort verrichting en de financiële instelling. Bij een spaarrekening moet er bovendien rekening worden gehouden met een getrouwheids- en een aangroeipremie. Deze premies zijn ook aan bepaalde voorwaarden verbonden. Dit alles maakt het moeilijk om een juiste intrestberekening te laten maken door de leerlingen. Om deze begrippen te illustreren kan men gebruik maken van bankdocumenten zonder dat dit aanleiding moet geven tot berekeningen.

Heel wat aandacht moet besteed worden aan het sociaal-maatschappelijk aspect van *diverse beleggingsvormen* zoals kasbons, verzekeringsbons, fondsen, e.d. Hierbij zal voldoende nadruk gelegd worden op de verschillen tussen deze beleggingen.

Bij toepassingen op *gelijkwaardige rentevoeten* moeten de leerlingen inzien dat afrondingen tot niet te verwaarlozen verschillen kunnen leiden. Men kan er de leerlingen op wijzen dat in de praktijk hierover geen eenduidigheid bestaat.

De studie van de *kapitaalsvorming* d.m.v. periodieke stortingen kan zich beperken tot het bepalen van de eindwaarde en het termijnbedrag bij een postnumerando rente. Belangrijker is de studie van *de schuldaflossing*. Het te lenen bedrag komt overeen met de beginwaarde van een kapitaalsvorming. Dit bedrag V kan dan afgeleid worden uit de gelijkheid $V.u^n = A_n$ (met $u = 1 + i = 1 + \frac{p}{100}$ en A_n is de eindwaarde van een kapitaalsvorming na n perioden). Bij het berekenen van het te lenen bedrag of het termijnbedrag zal men rekening houden met de gelijkwaardige rentevoet als de periodieke stortingen maandelijks, trimestrieel of semestrieel gebeuren. Ook de vraag naar het totaal af te betalen bedrag en het reële bedrag dat men terugbetaalt bij een schuldaflossing kan hier gesteld worden. Bij het vervroegde terugbetalen van de resterende schuld wordt er een wederbeleggingsvergoeding berekend.

Bij het interpreteren van *een aflossingsplan* kan men wijzen op het feit dat het termijnbedrag kan opgesplitst worden in een aflossingsbestanddeel en een rentebestanddeel, evenals dat bij een schuldaflossing met constante annuïteit elk aflossingsbestanddeel gelijk is aan het voorgaande vermenigvuldigd met $u = 1 + i$.

De verschillende soorten *consumentenkrediet* (verkoop op afbetaling, lening op afbetaling, financieringshuur (leasing)) kunnen door voorbeelden geïllustreerd worden. Het begrip maandelijks lastenpercentage is niet meer van toepassing. Controle op het juist zijn van de weergegeven getallen in een advertentie kan gebeuren met de formules: $M = \frac{k.\sqrt[12]{u^n}.(\sqrt[12]{u} - 1)}{\sqrt[12]{u^n} - 1}$ of $k = \frac{M}{\sqrt[12]{u} - 1}.(1 - \frac{1}{\sqrt[12]{u^n}})$ waarbij $u = 1 + \frac{JKP}{100}$, JKP = jaarlijks kostenpercentage, k = contante waarde - (eventueel voorschot), M = de maaandelijkse termijn en n = aantal stortingen. (Vergelijk deze formules met deze bij een schuldaflossing).

Bij eenvoudige oefeningen is het gebruik van een formularium te verkiezen boven de ingebouwde financiële functies (bijv. in Excel). Het gebruik van ICT is wel nuttig bij het opstellen van een aflossingstabel of voor het onderzoeken van verschillende simulaties zoals bijvoorbeeld: de invloed van een renteverandering bij een lening op de aflossingstabel, het onderscheid tussen verschillende vormen van lening, het virtueel aankopen van een huis, binnen de actuele situatie de meest aangewezen belegging onderzoeken, … Daardoor leren de leerlingen diverse informatiebronnen en –kanalen kritisch selecteren, raadplegen, analyseren en toepassen waardoor voldaan wordt aan een aantal vakoverschrijdende eindtermen in verband met ‘leren leren’.

UITBREIDINGSDOELSTELLINGEN

FA11	Een aantal beleggingsvormen vergelijken en het nettorendement ervan berekenen.
FA12	Het termijnbedrag berekenen bij een variabele rentevoet.

PEDAGOGISCH DIDACTISCHE WENKEN

Heel wat aandacht moet besteed worden aan het sociaal-maatschappelijke aspect van *diverse beleggingsvormen* zoals kasbons, verzekeringsbons, fondsen, e.d. Hierbij zal voldoende nadruk gelegd worden op de verschillen tussen deze beleggingen. Bij het berekenen van het nettorendement moet rekening gehouden worden met de inschrijfkosten en de uitbetalingkosten. Er kan ook op gewezen worden dat andere factoren zoals inflatie en mogelijke fiscale mindering invloed hebben op het nettorendement.

Leningen met veranderlijke rentevoet komen momenteel veel voor. Daarom is het belangrijk de gevolgen te bestuderen bij een verandering van de rentevoet.

5.3.9 Regressie

INLEIDING

Lineaire regressie is een verder bouwen op wat reeds in beschrijvende statistiek gezien werd. In beschrijvende statistiek werd het aantal variabelen, dat werd geobserveerd, beperkt tot één. Bij lineaire regressie is dit anders. Er wordt een mogelijke samenhang of correlatie onderzocht tussen twee veranderlijken.

Met dit onderwerp kan de zelfactiviteit, de creativiteit van de leerlingen gestimuleerd worden. De leerlingen kunnen zelf bepaalde verbanden tussen veranderlijken formuleren, daarna de nodige gegevens (meetresultaten) verzamelen en controleren of er inderdaad een afhankelijkheid bestaat tussen de twee variabelen.

Ook bij labo-oefeningen kan dit onderwerp van pas komen.

Aanbeveling lestijden: ***ca. 15 lestijden***
Voor de studierichting *Industriële wetenschappen* met *8 wekelijkse lestijden wiskunde* is dit onderwerp verplicht.

DOELSTELLINGEN

RG1	De betekenis van onafhankelijk en afhankelijke stochastische veranderlijke onderscheiden in praktische situaties.
RG2	Grafisch voorstellen van de relatie tussen twee stochastische veranderlijken met behulp van ICT-middelen.
RG3	Aan de hand van een spreidingsdiagram de samenhang (correlatie) tussen twee stochastische veranderlijken weergeven.
RG4	De verschillende soorten correlatie aangeven aan de hand van figuren.
RG5	De correlatiecoëfficiënt berekenen met behulp van ICT-middelen.
RG6	De correlatiecoëfficiënt interpreteren in verband met het verband tussen de veranderlijken.
RG7	Omschrijven waarom een rechte de best passende rechte is.
RG8	Aan de hand van ICT de vergelijking van de regressielijn berekenen.
RG9	Voorstellen van de regressielijn op het spreidingsdiagram.
RG10	Vraagstukken in verband met lineaire regressie oplossen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Belangrijk bij correlatie tussen twee stochastische veranderlijken is te beslissen welke variabele als onafhankelijke genomen wordt en welke de afhankelijke veranderlijke is. Wil men de samenhang bestuderen tussen twee veranderlijken, dan is het eveneens nodig na te gaan welk soort verband tussen de variabelen bestaat (bijv. lineair, kwadratisch, exponentieel, …). Aan de hand van voorbeelden kan dit duidelijk gemaakt worden.

Na de keuze van de onafhankelijke en afhankelijke variabele, is het mogelijk om de gegevens grafisch voor te stellen. Die grafische voorstelling noemt men een spreidingsdiagram. De onafhankelijke variabele wordt uitgezet volgens de x-as en de afhankelijke veranderlijke volgens de y-as. Het is nuttig dat voor een beperkt aantal gegevens het spreidingsdiagram eens manueel getekend wordt. Maar er wordt natuurlijk zo vlug mogelijk overgegaan op het gebruik van ICT-middelen om de grafiek te construeren.

Aan de hand van goed gekozen voorbeelden, worden verschillende mogelijkheden van correlatie aangebracht. Met behulp van ICT is het mogelijk verschillende soorten van verbanden te illustreren. Meetresultaten uit labo-oefeningen van fysica, chemie, elektriciteit, elektronica, mechanica kunnen als basis dienen. De leerlingen moeten kunnen verwoorden over welke samenhang het gaat.

Het berekenen van de correlatiecoëfficiënt mag niet het enige doel zijn. Het is belangrijker dat de leerlingen de correlatiecoëfficiënt (een getal) in verband kunnen brengen met de soort samenhang tussen de twee variabelen. Het nodige rekenwerk gebeurt met behulp van ICT. De leerlingen moeten het verband tussen de twee variabelen verwoorden binnen de context van het probleem.

Het onderzoek naar correlatie heeft vooral als doel om vanuit die meetresultaten van de twee variabelen en de onderlinge samenhang, voorspellingen te kunnen maken. Dan komen we in het domein van de regressie.

Om voorspellingen te maken, is het belangrijk dat het verband tussen de twee variabelen in een formule uitgedrukt wordt. De kromme die ontstaat door de formule voor te stellen op het spreidingsdiagram is de regressiekromme. Bij een lineair verband spreekt men van regressielijn. De berekening van de coëfficiënten gebeurt aan de hand van de methode van de kleinste kwadraten. Voor de leerlingen is het belangrijk de idee achter de methode te vatten, niet zo zeer hoe men tot die formules komt. Dit neemt niet weg dat bij leerlingen die meer onderlegd zijn in wiskunde, de berekeningswijze kan afgeleid worden. Traditioneel gebeurt die met behulp van partiële afgeleiden. Maar het kan ook door te steunen op het functieonderzoek van een tweedegraadsfunctie.

Bij twee veranderlijken bestaan er twee regressielijnen van y op x en van x op y. Deze lijnen vallen meestal niet samen. De ligging van beide lijnen ten opzichte van elkaar is afhankelijk van de correlatie tussen de twee variabelen. Dit heet het regressie-effect.

De leerlingen moeten gebruik makend van ICT de vergelijking van de regressielijn kunnen bepalen. Gebruik makend van de verkregen vergelijking kunnen de leerlingen vraagstukken in verband met interpolatie en extrapolatie beantwoorden.

De leerlingen dienen er ook attent op gemaakt worden dat een hoge correlatie niet noodzakelijk het gevolg is van een oorzakelijk verband. De onderzochte variabelen kunnen beïnvloed worden door andere veranderlijken. De hoge correlatie kan van het toeval afhangen. Het is best mogelijk dat het verband niet met een eerstegraadsfunctie maar door een exponentiële functie beschreven kan worden. Daarbij is de voorstelling in een spreidingsdiagram belangrijk om een eerste impressie te krijgen van een mogelijk verband. Daarnaast geven statistische verbanden vaak slechts globale tendensen en geen strenge regels aan. Bijvoorbeeld: hoewel rokers gemiddeld eerder sterven dan niet-rokers, zijn er mensen die 90 jaar oud worden niettegenstaande ze 3 pakjes sigaretten per dag roken. Dit is de reden waarom in de praktijk het extrapoleren gevaarlijk kan zijn.

UITBREIDINGSDOELSTELLINGEN

RG11	De correlatie tussen twee stochastische veranderlijken wiskundig benaderen.
RG12	Machtsverbanden en exponentiële verbanden onderzoeken met behulp van de technieken van lineaire regressie.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Met een duidelijk voorbeeld van lineaire correlatie, stellen we een wiskundig mechanisme op waardoor die correlatie wordt weergegeven. Vanaf hier beperken we ons tot lineaire correlatie in het verdere verhaal.

Zo groeien de begrippen covariantie en correlatiecoëfficiënt. Indien mogelijk, kan er even stilgestaan worden waarom de correlatiecoëfficiënt een betere maat voor samenhang is als covariantie.

Door gebruik te maken van logaritmen kan men een machts- en een exponentieel verband omzetten in een lineair verband waarop dan de methode van de lineaire regressie kan toegepast worden. Denk maar aan het gebruik van enkelvoudig en dubbel logaritmisch papier.

5.3.10 Telproblemen en kansrekening

Aanbeveling lestijden: ***ca. 25 lestijden***
Voor de studierichting *Industriële wetenschappen* met *8 wekelijkse lestijden wiskunde* is dit onderwerp verplicht.

DOELSTELLINGEN

TK1	Telproblemen oplossen door gebruik te maken van een boomdiagram, een venndiagram of een schema.
TK2	Telproblemen oplossen waarin de volgorde al dan niet belangrijk is.
TK3	De kans berekenen van een uitkomst in een situatie waarin alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.
TK4	Kansen berekenen door gebruik te maken van een kansboom of de somregel.
TK5	Kansen berekenen door gebruik te maken van de productregel en complementregel.
TK6	Kansen schatten met behulp van relatieve frequenties in een situatie met statistische gegevens.
TK7	De voorwaardelijke kans en de regel van Bayes gebruiken om kansproblemen op te lossen.
TK8	Van een toevalsvariabele de kansverdeling opstellen, de verwachtingswaarde en standaardafwijking berekenen en interpreteren en het verband leggen met de begrippen 'gemiddelde' en 'standaardafwijking' uit de statistiek.
TK9	Kansen uitrekenen bij normaalverdeelde gegevens en de normale verdeling als model gebruiken om kansen te bepalen.
TK10	Vaststellen of een kansexperiment vertaald kan worden naar het model van de binomiale verdeling en de bijbehorende kansen berekenen met behulp van ICT.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In allerlei situaties moeten op een verstandige of handige wijze aantallen geteld worden (bijv. hoeveel autonummerplaten kunnen in het Belgische systeem uitgereikt worden). Eenvoudige telproblemen kunnen aangepakt worden door ze voor te stellen met een boomdiagram, een venndiagram of een ander schema. Tellen is dan het aantal wegen, deelverzamelingen, mogelijke gebieden zoeken. Hier komt vooral de schematische aanpak van een probleem tot uiting.

Omdat het aantal mogelijkheden bij het tellen soms groot wordt, dringt een meer algemenere aanpak zich toch op. Bij het tellen merken we duidelijk twee soorten: tellen waarbij de volgorde belangrijk is en tellen waarbij de volgorde niet belangrijk is. De begrippen variatie, permutatie (als speciale variatie) en combinatie worden aangebracht samen met hun formules. Het herkennen van deze nieuwe begrippen in opdrachten is voor de leerlingen niet altijd gemakkelijk. Voldoende en geleidelijke inoefening is noodzakelijk.

Het is niet de bedoeling voor deze leerlingen het begrip kans axiomatisch op te bouwen. Een minimale terminologie is echter wel vereist (bijv. gebeurtenis, uitkomst, …). Het gooien van een eerlijk muntstuk of van een normale dobbelsteen zijn voorbeelden van *kansexperimenten* waarbij elke uitkomst *even waarschijnlijk* is. Door middel van gepaste voorbeelden zoals het opgooien van een punaise of van de kwaliteitscontrole van gloeilampen kan gewezen worden op voorbeelden waarbij niet altijd elke uitkomst even waarschijnlijk is.

Om zinvol op het begrip kans te kunnen ingaan moeten leerlingen het onderscheid leren maken tussen situaties met uitkomsten met een gelijke waarschijnlijkheid (bijv. op grond van symmetrieoverwegingen) en situaties met uitkomsten waarbij dat niet geldt. In het ene geval kan de kans 'berekend' worden bijvoorbeeld met de formule van Laplace (het aantal gunstige gevallen gedeeld door het aantal mogelijke gevallen), in het andere geval zal men de kans experimenteel moeten schatten. Er dient dus op gewezen dat de formule van Laplace alleen kan gebruikt worden in een kansexperiment waarbij alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.

Bij de berekening van kansen waarbij de uitkomsten niet even waarschijnlijk zijn, kan het gebruik van schema's zoals boomdiagrammen een uitweg bieden en komt de leerstof in verband met de telproblemen van pas.

Het begrip kans kan op natuurlijke wijze gekoppeld worden aan *relatieve frequentie* uit de beschrijvende statistiek. Zeggen dat de kans op vijf ogen bij het gooien van een dobbelsteen gelijk is aan een zesde is zo te interpreteren, dat ongeveer een zesde van het aantal worpen een 5 oplevert bij een groot aantal keer opgooien. Het verband tussen (het meer theoretische) kansbegrip en relatieve frequentie moet geregeld geëxpliciteerd worden, zowel bij het aanbrengen van het kansbegrip, als bij de interpretatie van resultaten.

De leerlingen moeten inzien dat vele voorbeelden tot eenzelfde model kunnen worden teruggebracht. Bijv. wat is de kans op drie slechte lampen in een doos van tien als de kans op een slechte gloeilamp 4% is. Wat is de kans op één of twee slechte eieren bij het bakken van een taart als je twaalf eieren nodig hebt en de kans op een slecht ei 2% is, …

De leerlingen kunnen vanuit een groot aantal experimenten met behulp van relatieve frequentie kansen bepalen. Bijv. wat is het aandeel van een uitkomst in het totale aandeel? Dit biedt de mogelijkheid om ruimere problemen te bestuderen en bijv. kansexperimenten aan te pakken waarbij niet alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.

Een interessante toepassing is het raadplegen van sterftetabellen i.v.m. overlevingskansen van bepaalde leeftijdsgroepen, zoals gebruikt in de actuariële wiskunde. Hier wordt de gelegenheid geboden kansen te berekenen vanuit tabellen opgebouwd uit statistisch onderzoek. De leerlingen kunnen zo aanvoelen dat niet alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn en dat dus niet steeds de formule van Laplace aangewezen is voor kansberekeningen.

Het begrip voorwaardelijke kans en de regel van Bayes kunnen ook aangebracht worden met kansbomen. Om deze regel aan te brengen en om later in te zien dat een probleem neerkomt op het omkeren van een voorwaardelijke kans is het zinvol eerst met absolute aantallen te werken en via relatieve frequenties over te stappen op kansen. Talloze praktische voorbeelden kunnen het gebruik van deze regel illustreren.

Een toevalsvariabele (stochastische variabele) is de numerieke uitkomst van een statistisch experiment, bijv. het aantal koppen bij het herhaald (bijv. 10 maal) opgooien van een muntstuk. De tabel van de kansen van alle mogelijke uitkomsten is de kansverdeling van deze toevalsvariabele. Men kan hier ook een histogram van maken. Naar analogie met een tabel van relatieve frequenties kunnen we ook bij een kansverdeling het gemiddelde (en de standaardafwijking) berekenen.

Om kansen te bepalen bij standaardnormaal verdeelde gegevens wordt gesteund op het verband tussen kansen en relatieve frequenties. De kans dat een doos suiker minder weegt dan 1kg (als het gewicht van alle door dezelfde machine verpakte dozen suiker normaal verdeeld is met gegeven gemiddelde en standaardafwijking of als de normale verdeling een goed model is voor deze verdeling) is de relatieve frequentie van het aantal pakken suiker dat minder weegt dan 1kg.

Een andere veel voorkomende kansverdeling is de binomiale verdeling. Aan de hand van concrete voorbeelden kunnen we bij deze verdeling (zoals bij de normale verdeling) P-waarden (cf. overschrijdings- en onderschrijdingskansen) bekijken. De berekening van deze kansen gebeurt met ICT. Dit laat ons ook toe om ook hier aandacht te besteden aan het aspect 'toeval' bij een statistisch experiment.

6 EVALUATIE

Het is niet moeilijk in te zien dat leerprocessen beter (vlotter) zullen verlopen als de leerling regelmatig informatie krijgt over zijn vorderingen en als de leerkracht een goed inzicht heeft in de aard van de eventueel optredende problemen. Evaluatie is daartoe een uitgelezen middel en vormt aldus een belangrijk onderdeel van het onderwijsleerproces.

SCHOOLCULTUUR

De gehanteerde terminologie in verband met evaluatie, de verschillende opvattingen over de functie, de organisatievorm, de rapportering, ... zijn echter *niet eensluidend*. Deze verscheidenheid wordt geïllustreerd door de verschillende betekenissen die bijvoorbeeld gegeven worden aan termen als toets, examen, permanente evaluatie, formatieve evaluatie, dagelijks werk, enz. Daarom is evaluatie van leerlingen en wat ermee gebeurt vaak verbonden met *een schooleigen cultuur*. Evaluatie van wiskunde moet hierin uiteraard passen, omdat evaluatie naar de leerlingen toe over de vakken en de jaren heen wel een zekere eenvormigheid moet vertonen.

FUNCTIES VAN EVALUEREN

Evalueren is het *waarderen* van iets of iemand. De term evalueren wordt in het onderwijs gebruikt voor waardering als deze niet 'uit de lucht komt vallen', maar opgenomen is in de rij meten, waarderen, beslissen. Evaluaties gebeuren dus intentioneel. Evaluaties zijn niet vrijblijvend, omdat ze leiden tot een bepaalde *beslissing*. De functies van evalueren zijn verbonden met de aard van de beslissingssituaties.

Evaluatie kan de functie hebben van *resultaatsbeoordeling*. Over een periode van langere duur wordt het rendement van het onderwijsleerproces vastgesteld. Meestal gebeurt dit aan de hand van examens of summatieve toetsen. Deze vorm is allicht het meest vertrouwd.

Evaluatie kan de functie hebben van *plaatsing, oriëntering en selectie*. Evaluatiegegevens worden bijvoorbeeld gebruikt om leerlingengroepen samen te stellen, om differentiatie mogelijk te maken, om leerlingen te oriënteren naar de meest geschikte onderwijsvorm en studierichting, of toe te laten tot een bepaalde studierichting.

Evaluatie kan de functie van *diagnose* krijgen. Diagnose kan elke activiteit van de leerkracht zijn die erop gericht is een beeld te krijgen van de vorderingen van de leerlingen. Op de vaststelling van de aard en de oorzaak van de leermoeilijkheden kan dan een plan volgen om dit tekort te remediëren of bij te sturen.

In dezelfde zin kan een diagnose opgemaakt worden van de vorderingen van de leerlingen in verband met *redeneer- en probleemoplossende vaardigheden*. Vanuit een goed inzicht in de mogelijkheden en feitelijke situatie kunnen de leerlingen beter begeleid worden in hun leerproces.

Evaluatie kan de functie krijgen van *sturing van het onderwijsleerproces*. Er wordt informatie verzameld over de vorderingen van de leerlingen om het leerproces beter te organiseren. Dit soort evaluatie gebeurt voortdurend tijdens het leerproces. De leerling krijgt voortdurend informatie over zijn vorderingen, de leerkracht krijgt voortdurend informatie over het verloop van het leerproces.

Een bijzondere plaats wordt gegeven aan het evalueren van de *beginsituatie*. Dit kan leiden tot een georganiseerde herhaling met een gedifferentieerde aanpak. Het is zinvol gerichte herhalings- of remediëringspakketten te voorzien, die door de leerlingen zelfstandig worden verwerkt.

Evaluatie is medebepalend voor de 'beslissing' op de scharniermomenten van het lesverloop. De verkregen informatie kan door de leerkracht gebruikt worden om zijn didactisch handelen te beoordelen en te sturen. Bijsturing kan betrekking hebben op een aantal uiteenlopende factoren, bijvoorbeeld de leerinhoud kan te moeilijk zijn, de doelstellingen te hoog gegrepen, het tempo te hoog (of te laag), het beginniveau kan verkeerd ingeschat zijn, er kunnen problemen zijn van motivationele aard, ... De leerkracht kan hierop inspelen door bijvoorbeeld een bijkomend voorbeeld te geven, de formulering van een definitie of een eigenschap te hernemen, de voorziene oefeningen te beperken of aan te vullen. Sturing kan betekenen dat de leerkracht *gedifferentieerd* ingaat op de mogelijkheden van de leerlingen met aangepast oefeningenmateriaal, met remediëring, met ondersteuning van het leerproces door het leren van wiskunde te bespreken. Dergelijke sturing kan ook positief onderscheidend werken, bijv. door aan bepaalde leerlingen optimale ontwikkelingskansen te bieden door hen te confronteren met meer open problemen, meer eigen tips over hun oplossingsproces, gerichte aanwijzingen over heuristische methoden, ….

Evaluatie in de brede betekenis heeft zowel betrekking op het beoordelen van de leerlingen en de beslissingen die hieraan verbonden worden, als op de informatie over het verloop van het onderwijsleerproces zowel voor de leerling als voor de leerkracht. Ze kan betrekking hebben op een sanctionering met ingrijpende gevolgen of op een meer vrijblijvende begeleiding.

VAN EVALUATIE NAAR ZELFEVALUATIE

In de informatieve functie maakt evaluatie integrerend deel uit van het onderwijsleerproces. Belangrijk is alleszins dat de leerling *zelf informatie krijgt over zijn leren*, zowel wat betreft het proces als het eindresultaat. Zo zal in het leerproces van probleemoplossende vaardigheden niet slechts de beoordeling van het eindresultaat belangrijk zijn. De informatie over zijn wijze van aanpakken en de vorderingen daarin geeft de leerling inzicht in de nodige bijsturing.

Procesevaluatie is een aangewezen weg om leerlingen te leren vragen stellen bij de leerinhouden. In die zin is het een goede ondersteuning bij het verwerven van leervaardigheden. Procesevaluatie is een aangewezen weg om de leerling bewust te maken van de eigen mogelijkheden. In die zin en in het kader van het levenslang leren (waarbij niet alle vorderingen 'getoetst' zullen worden) kan vertrouwd worden met procesevaluatie de groei naar zelfevaluatie bevorderen. Een mogelijke ondersteuning wordt hier geboden door opdrachten waarbij de leerlingen zelf zinvol leren gebruik maken van een correctie- of een antwoordsleutel.

Een onderzoeksopdracht (bijvoorbeeld in het kader van de geïntegreerde proef) zal leiden tot een vorm van zelfstandig werken. Hierbij moeten de leerlingen oog hebben voor zelfevaluatie, vanuit het goed benutten van hun onderzoeks- en probleemoplossende vaardigheden doorheen heel dit proces. Dit is zeker een aanleiding om met behulp van een reflectieve aanpak terug te kijken op hun werk.

Het betrekken van leerlingen bij de evaluatie of fasen ervan, (bijv. co-evalueren, m.a.w. de leerling neemt deel aan; peerevaluatie, m.a.w. onderlinge evaluatie in een groep gelijken), het bespreken van evaluatiegegevens en het formuleren van werkpunten vanuit een gesprek kan de evaluatiegevoeligheid merkelijk aanscherpen. Het afsluiten van een leerproces, een werkopdracht, ... met een evaluerend terugkijken laat leerlingen toe zelf elementen van evaluatie in te brengen. Een dergelijke bespreking binnen een groepje verantwoordelijk voor een taak, bijvoorbeeld op basis van een observatielijst, geeft hen meer inzicht in het proces zelf, maar uiteraard ook in geven, krijgen, nuanceren en aanvaarden van feedback.

EVALUATIE VAN KENNIS EN INZICHT

De essentie van wiskundekennis is de kennis van en het *inzicht in begrippen en eigenschappen*. Dit houdt in: het kunnen geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden, het herkennen van het begrip of eigenschap in contextsituaties, het kennen van de betekenis ervan, het kennen van een formulering van een definitie of de eigenschap, het kunnen toepassen ervan in diverse contextsituaties.

Evaluatie van het inzicht in begrippen en eigenschappen zou de verschillende aspecten moeten onderzoeken. Het kennen van een eigenschap impliceert niet vanzelfsprekend dat ze kan *toegepast* worden en omgekeerd. Dit impliceert dat ook in de evaluatie *in de loop van het onderwijsleerproces* meer aandacht moet besteed worden aan deze aspecten, zoals bijvoorbeeld het begrijpen, het kunnen geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden, de formulering, het toepassen van de eigenschap.

Evaluatie zou er toe moeten leiden, dat de leerkracht nog tijdens het onderwijsleerproces informatie verwerft over de misverstanden over begrippen, eigenschappen en methoden bij de leerlingen. Ze kunnen dan sneller bijgestuurd worden. Voor een leerling is het belangrijk te weten op welk niveau een begrip moet gekend zijn en waar hij zich in het leerproces bevindt. Zo kan hij de aangepaste leermethode kiezen.

Van een aantal begrippen en eigenschappen kan gesteld worden dat ze tot de *parate kennis* van de leerlingen moeten behoren. Deze parate kennis moet dan ook als paraat getoetst worden en dus geregeld in de loop van het jaar. Kennis waarvan aanvaard is dat ze niet meteen paraat moet beheerst worden, maar bijvoorbeeld wel is opgenomen in een vademecum, kan getoetst worden met gebruik van het vademecum. Voorwaarde is natuurlijk dat leerlingen er ook buiten de evaluatiemomenten functioneel mee leren werken.

Over het algemeen wordt aangenomen dat in het geheel van de toetsing een goede spreiding van de leerinhouden over de verschillende beheersingsniveaus (kennis, inzicht en toepassing) wenselijk is.

EVALUATIE VAN VAARDIGHEDEN

In dit leerplan wordt het verwerven van vaardigheden benadrukt. Ook op de evaluatie moet dit zijn weerslag hebben. Daarbij moet een vaardigheid als vaardigheid geëvalueerd worden. Het is zinvol een zogenaamde vaardigheidsanalyse te maken, d.w.z. een overzichtelijke lijst te maken van welke stappen leerlingen kunnen (moeten) zetten om de vaardigheid te verwerven of aan te wenden. Deze lijst wordt dan gebruikt om leerlingen in het leerproces (stapsgewijze) te observeren. Vanuit dergelijke feedback kan de leerling zich dan beter bijsturen.

De leerling moet wiskundige procedures, methoden en technieken behoorlijk en efficiënt kunnen uitvoeren. Dit betekent dat ook de *procedure* (bijvoorbeeld de verschillende stappen) moet geëvalueerd worden en niet slechts het eindresultaat. Hierin is ook ruimte voor evaluatie van de zelfcontrole van de leerling en voor het gecontroleerd uitvoeren (bijv. schatten, grootteorde, elementaire fouten vermijdend). Ook hier geeft de terugkoppeling die leerlingen krijgen over de uitvoering tijdens het leerproces zelf, hen sneller inzicht in hun fouten.

Voor de toetsing van vaardigheden kan overwogen worden een in de tijd gespreide toetsing uit te voeren. Dit betekent dat het bezitten van een vaardigheid niet afhankelijk gemaakt wordt van het bezit ervan op dat ene examenmoment.

In de evaluatie van vaardigheden neemt die van *probleemoplossende vaardigheden* een bijzondere plaats in. Aandacht voor het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden leidt tot het aanbieden van meer open gestelde problemen, meer aan (soms nieuwe) situaties gebonden vraagstukken, enz. Het oplossen van dergelijke problemen is een complex proces. Meer nog dan elders is feedback zowel *over het proces* als over het eindproduct belangrijk. De leerling zou informatie moeten krijgen over zijn kennis, en de vaardigheid waarmee hij die kan hanteren, over de wijze van vraagstelling, het gebruik van gegeven informatie, het formuleren van vermoedens, over de vaardigheid waarmee heuristische methoden gehanteerd worden, over de sturing van zijn oplossingsproces en de wijze van interpreteren en verifiëren van resultaten. Evaluatie van probleemoplossende vaardigheden heeft maar zin als *tijdens het proces* de wijze van werken van de leerling *systematisch, weloverwogen en voortdurend wordt opgevolgd*. Evaluatie kan het vertrouwen van de leerling in zijn mogelijkheden sterk beïnvloeden.
Maar ook de leerkracht krijgt belangrijke feedback, bijvoorbeeld over welke problemen uitdagend zijn, welke instructief, welke interesse wekken, welke niet succesvol zijn.

Naast probleemoplossende vaardigheden wordt aandacht besteed aan het ontwikkelen van reflectieve vaardigheden bij de leerlingen, d.w.z. het leren terug kijken op een proces dat ‘afgelopen’ is. En daarvan de leerkansen concretiseren. Het bewuster omgaan met dit leren resulteert in een netto effect bij een volgende opdracht. Voorbeelden van reflectieve vragen op het uitvoeren van een opdracht:

- Wat was de opdracht, heb ik het doel bereikt?
- Hoe is het proces concreet verlopen? De voorbereiding, de planning, de uitvoering, het besluit/antwoord?
- Welke concrete problemen deden zich voor? Hoe werd hiervoor een oplossing gevonden, uitgewerkt?
- Wat leert me dit voor de aanpak van een volgende opdracht?

EVALUATIE VAN ATTITUDES

In dit leerplan wordt gepleit voor het ontwikkelen van attitudes. Nog meer dan bij vaardigheden moet de leerkracht bij de evaluatie ervan oog hebben voor de individuele inspanning die de leerling doet om die doelen te bereiken. Enige omzichtigheid is geboden, want niet bij alle leerlingen is de spontane uitingsvorm de juiste weerspiegeling van de inzet. En sommige leerlingen hebben van nature uit meer tijd en inzet nodig om eenzelfde resultaat te bereiken.

Een hulpmiddel bij het evalueren van attitudes is een *observatielijst*, waarin een *aantal concrete gedragingen* opgesomd staan. Daarbij kan men een aantal niveaus van verwachting aangeven die beantwoorden aan een verbale uitdrukking voor de ‘beoordeling’. Zo komt men tot een categoriale beoordeling van attitudes, die de basis kunnen zijn voor feedbackgesprek met de leerling.

Zeker voor attitudes geldt dat terugkoppeling tijdens het leerproces de meest effectieve weg van bijsturen is. Aanmoediging zal meer vermogen dan neerbuigend afkeuren. Een verbale waardering kan naast een 'resultaat' voor de inhoudelijke toetsing een blijk van waardering zijn voor de inzet van de leerling.

ICT-HULPMIDDELEN

In de leerplannen is het gebruik van ICT-hulpmiddelen opgenomen, zowel voor illustratie en demonstratie van begrippen en eigenschappen, als voor het effectieve gebruik ervan door de leerlingen bij het uitvoeren van berekeningen, het onderzoeken van eigenschappen en het verwerken van informatie.

De evaluatie van onderdelen waarbij in de ontwikkelingsfase en de verwerkingsfase een rekenmachine, een grafische rekenmachine of een computer gebruikt werd, zal hieraan aangepast zijn. Dat betekent dat bij de toetsing hetzelfde materiaal ter beschikking van de leerlingen moet staan.

Het spontane en accurate gebruik van ICT wordt geëvalueerd als onderdeel van de nagestreefde vaardigheid.
Voorbeelden

- Het heeft geen zin leerlingen in de verwerkingsfase ICT te laten gebruiken en op de evaluatiemomenten manuele automatismen te verwachten.
- Bij observatie in de klas zal men leerlingen wijzen op inefficiënt gebruik.
- Op dezelfde wijze moet gewezen worden op inadequaat gebruik als leerlingen bijvoorbeeld tussenresultaten noteren, eventueel zelf terug invoeren, al of niet na afronding, wat merkwaardige rekenverschillen kan veroorzaken.
- Als de doelstelling het interpreteren van statistische gegevens is, zal men geen (evaluatie)tijd besteden aan het turven ervan, maar wel statistische software gebruiken.
- Met meetkundige software kan men een vermoeden laten onderzoeken door de techniek van het verveelvoudigen (cf. het slepen van bepaalde punten). In dit geval is de computer echter een veredeld tekenblad, waarop de redenering wordt uitgevoerd. Ook voorheen moesten de leerlingen een tekening maken en maakte die deel uit van de evaluatie. Met het gebruik van een figuur op een machine kan dat dus evenzeer.

Bij dit soort evaluatie past wellicht een permanente evaluatie tijdens het leerproces zelf, dan wel de vaardigheid te testen met een reeks gekunstelde oefeningen.

In de observatie moet een onderscheid gemaakt worden tussen enerzijds de vaardigheid in het gebruik van het toestel (bijv. de vlotheid bij het intikken bij computergebruik) en anderzijds het inzicht in het gebruik van de toestelgebonden wiskundige werkwijze.

Bedieningsvaardigheid op zich kan niet het enige doel zijn van wiskundelessen. Binnen het ‘vak wiskunde’ mag bijvoorbeeld klaviervaardigheid geen hypotheek leggen op het gebruik van de computer bij berekeningen of dataverwerking. Voor wiskunde kan een relatief vlotte omgang met de machine volstaan. En die staat in functie van het wiskundige leerproces. Uiteraard zal een veelvuldig gebruik in de wiskundelessen bijdragen tot de algemene vlotheid. Er is geen principieel bezwaar tegen de beschikbaarheid van de handleiding van het toestel.

De evaluatie van deze vaardigheid moet vooral gezien worden als aanmoedigend met het oog op een vlotter verlopen van het wiskundige proces. Zo moet een evaluatie gespreid over het jaar een beeld geven van de vorderingen van de leerlingen en van hun effectieve vooruitgang. Dit impliceert ook dat de leerlingen voldoende oefenkansen krijgen. Het vlotte gebruik van een machine of software vraagt dus meer dan een incidenteel gebruik in de les. Dit vraagt van de school en de leerkracht een inspanning voor de leerlingen die niet zelf over het aangewezen materiaal kunnen beschikken.

Als men het gebruik van bepaalde werkwijzen met computer of rekenmachine als specifieke doelstelling heeft nagestreefd (bijv. gebruik bepaalde software, bepaalde functietoetsen), zal dit uiteraard deel uit maken van de evaluatie.

Overleg in de vakgroep is nodig om vertrouwd te worden met deze voor wiskunde ‘nieuwe’ evaluatiesituaties. Afspraken moeten gemaakt worden over de aangewezen evaluatievorm, de wijze van werken, de gestelde eisen, … en de afstemming tussen de leerkrachten onderling. Zo kan men afspreken het technisch gebruik van ICT niet op het examen zelf te toetsen, maar bijvoorbeeld via de jaartoetsing, omdat ‘permanente’ of ‘gespreide’ evaluatie dan meer mogelijk wordt. Leerlingen moeten alleszins een duidelijk beeld krijgen van wat te verwachten is bij de evaluatie.

ORGANISATIE VAN DE TOETSING

In de organisatie van de toetsen bestaat een ruime verscheidenheid tussen de scholen. Hoe die ook gebeurt, belangrijk is dat ze aansluit bij de onderwijspraktijk. Dit wil zeggen dat ze moet aansluiten bij de doelstellingen en de verwerkingsniveaus die tijdens het leerproces en de verwerkingsopdrachten werden nagestreefd.
Wat betreft de criteria die aan toetsen als meetinstrument moeten worden opgelegd, zoals validiteit (meet de toets wat beoogd wordt te meten?) en betrouwbaarheid (is het resultaat een zo adequaat mogelijke weerspiegeling van het bereiken van de doelstellingen door de leerling?), wordt verwezen naar de geëigende literatuur.
Verder wordt aangenomen dat de evaluatie zich niet mag beperken tot enkele momenten. Geregeld toetsen (zowel mondeling als schriftelijk) laat toe adequaat in te spelen op de problemen die zich stellen. Wel mag verwacht worden dat leerlingen ook al grotere leergehelen leren beheersen, bijv. voor een ruimere summatieve toets.

7 OVEREENKOMST EINDTERMEN EN DOELSTELLINGEN

7.1 Eindtermen Wiskunde TSO derde graad

ALGEMENE EINDTERMEN

De leerlingen kunnen

1 wiskundige informatie analyseren, schematiseren en structureren.
2 gebruik maken van wiskundige technieken zoals figuren maken en tabellen opstellen.
3 bij het oplossen van problemen functioneel gebruik maken van ICT.
4 bij het oplossen van een vraagstuk:
- relevante gegevens scheiden van niet relevante;
- gegevens met elkaar en met de probleemstelling in verband brengen;
- gegevens en gevraagde weergeven in een geschikt wiskundig model;
- het vraagstuk planmatig uitwerken.

5 wiskundige rekenregels en conventies correct hanteren en toepassen.
6 keuzes m.b.t. representatie en gevolgde werkwijze verantwoorden.
7 voorbeelden geven van het gebruik van wiskunde in andere vakgebieden en in de maatschappij.

De leerlingen

8 * zijn kritisch tegenover het gevonden resultaat.
9 * zijn bereid hun leerproces bij te sturen op basis van reflectie over de wijze waarop ze wiskundige problemen oplossen en wiskundige informatie verwerven en verwerken.

REËLE FUNCTIES EN ALGEBRA

De leerlingen kunnen

10 bijzonderheden van grafieken, eventueel aangevuld met tabellen, aflezen zoals periodiciteit, symmetrieën, stijgen en dalen, extreme waarden, lineaire en exponentiële groei.
11 grafieken tekenen van enkele eenvoudige functies (mede met behulp van ICT).
12 veranderingen beschrijven en vergelijken met behulp van differentiequotiënten.
13 problemen, waarbij een functioneel verband gegeven is, oplossen en die oplossing interpreteren (eventueel met behulp van ICT).

STATISTIEK

De leerlingen kunnen

14 aan de hand van voorbeelden het belang uitleggen van de representativiteit van een steekproef voor het formuleren van statistische besluiten over de populatie.
15 met behulp van ICT gemiddelde en standaardafwijking berekenen van statistische gegevens.
16 het gemiddelde en de standaardafwijking gebruiken als karakteristieken van een normale verdeling.

De leerlingen

17 * staan kritisch tegenover het gebruik van statistiek in de media.

* Met het oog op de controle door de inspectie werden de attitudes met een * aangeduid in de kantlijn.

7.2 Overeenkomst

Et	leerplan a
1	V2, V3, V4, V5, A11
2	V1, V2, V3
3	V1, V2, V4, V5
4	V4, V5
5	V1, V2, V5, A9
6	V2, V3, V4, V5, A9
7	A13
8	V5, A9
9	V5, V7, V8, A9, A10, A11
10	AN1, AN5, AN13, AN17
11	AN13
12	AN34, AN35, AN36
13	AN2, AN12, AN17, AN25
14	SK1, SK3
15	SK2
16	SK4, SK5, SK6
17	SK1, SK3, A9

8 BIBLIOGRAFIE

BOEKEN

ASPEELE, M.-J., DELAGRANGE, N., DE ROO, F., *Wiskundedidactiek, een inleiding*. Leuven, Acco, 1987.
BARNETT, R.A., ZIEGLER, M.R., *College Algebra 4th edition.* New York, McGraw-Hill, 1989.
BUIJS, A., *Statistiek om mee te werken.* Leiden, Stenfort Kroese, 1989.
BURTON, D., *The history of mathematics. An introduction*. Boston, Allyn and Bacon Inc., 1985.
CENTRE DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'a dix-huit ans*. Nivelles, CREM, 1995.
CHOATE, J., e.a., *Iterations a tool kit of dynamics activities*, Key Curriculum Press, 1999.
CHOATE, J., e.a., *Fractals a tool kit of dynamics activities*, Key Curriculum Press, 1991.
DE VEAUX, R.D., VELLEMAN, P.F., *Intro Stats,* Pearson Education, 2004.
DOCHY, F., SCHELFHOUT, W., JANSSENS, S., *Anders evalueren*, Heverlee, Lannoo-campus, 2003.
DOUMA, S.W., *Lineaire programmering als hulpmiddel bij besluitvorming.* Academic Service, 1982.
EBBENS, S., ETTEKOVEN, S, VAN ROOIJEN, J., *Effectief leren in de les*, Groningen, Wolters-Noordhoff, 1996.
ENGEL A., *Problem-Solving Strategies*, New York, Springer-Verlag, 1998.
FENTEM, R., *Statistics.* London, Collins Educational, 1996.
FREEDMAN, D., PISAU, R., PURVES, R., *Statistics*, Norton & Company, 1998.
FREUDENTHAL, H., *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Reidel Publ. Comp., 1973.
GOODMAN, A., HIRSCH, L., *Precalculus.* Englewood Cliffs - New Yersey, Prentice-Hall, 1994.
GRAVEMEIJER, K.P.E., *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, CD□ Press, 1994.
GROUPE D'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE, *Les fonctions c'est aussi autre chose.* Louvain-la-Neuve, GEM, 1982.
HERR, T., JOHNSON, K., *Problem solving strategies.* Berkeley, Key Curriculum Press, 1994.
HUFF, D., *How to lie with statistics*. London, Norton & Company, 1954.
JACOBS, H., *Mathematics a human endeavor.* New York, Freeman, 1982.
KAISER, H., NÖBAUER, W., *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht*. München, Freytag, 1984.
KLINGEN, H., OOT, A., *Computereinsatz im Unterricht, der pädagogische Hintergrund.* Stuttgart, Metzler Verlag, 1986.
KRABBENDAM, H., *Informatieverwerking en statistiek voor de lerarenopleiding.* Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 1994.
LAFARGUE-SORT, J., MARQUIS, B., *Les méthodiques pour résoudre des problèmes*. Paris, Hatier, 1992.
LAGERWERF, B., *Wiskundeonderwijs in de basisvorming*. Groningen, Wolters-Noordhoff, 1994.
LEHMANN, E., *Mathematik-Unterricht mit Computer-Einsatz.* Bonn, Dümmler, 1988.
LOWYCK, J., VERLOOP, N., e.a., *Onderwijskunde*. Leuven, Wolters, 1995.
MANKIEWICZ, R., *Het verhaal van de wiskunde.* Abcoude, Uitgeverij Uniepers, 2000.
MOORE, D. , McCABE, G. *, Statistiek in de praktijk*, *Theorieboek*, Academic Service, Den Haag, 2001
MOORE, D. , McCABE, G. *, Statistiek in de praktijk, Opgavenboek,* Academic Service, Den Haag, 2001
NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, *Curriculum and Evaluation Standards for school mathematics* . Reston, Virginia USA, NCTM, 1989.
OLDKNOW, R., TAYLOR, A., Teaching mathematics with ICT. London, Continuum, 2000.
POLYA, G., *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving.* New York, Willey, 1981.
POSAMENTIER, A.S., STEPELMAN, J., *Teaching secondary school mathematics*. New York, Merill Publishing Company, 1990.
SCHOENFELD, A. H., *Mathematical problem solving*. London, Academic Press, 1985.
STEUR, H., *Levende wiskunde. Toepassingen geordend naar wiskundig onderwerp*. Culemborg, Educaboek, Tjeenk-Willink, 1980.
STEWART, J., REDLIN, L., e.a., *Precalculus, 3th edition.* Pacific Grove, Brooks/Cole Publishing Company, 1998.
STRUIK, D.J., *Geschiedenis van de wiskunde*. Utrecht, Het Spectrum, 1990.
SULLIVAN, M., SULLIVAN III, M., *Precalculus graphing and data analysis*, Prentice Hall, 1998.

THAELS, K., e.a., *Van ruimtelijk inzicht naar ruimtemeetkunde.* Deurne, Wolters Plantyn, 2001.
VAN DER BLIJ, F., *Wiskunde met verve.* Groningen, Wolters-Noordhoff, 2000.
VAN DORMOLEN, J., *Aandachtspunten*. Utrecht, Bohn, Scheltema en Holkema, 1982.
VAN LOOY, L., e.a. *Zelfstandig en coöperatief leren*, Brussel, VUBPress, 2002.
VAN PETEGEM, P., VANHOOF, J., *Evaluatie op de testbank*, Mechelen, Wolters-Plantyn, 2002.
VON HARTEN, G., STEINBRING, H., *Stochastik in der Sekundarstufe I.* Köln, Aulis Verlag, 1984.
WANER, S., COSTENOBLE, S.R., *Calculus applied to the real world,* New York, Harper Collins, 1996.

TIJDSCHRIFTEN

UITWISKELING. Driemaandelijks tijdschrift, Groenstraat 18, 3221 Nieuwrode.
WISKUNDE EN ONDERWIJS. Driemaandelijks tijdschrift van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraren (VVWL), C. Huysmanslaan 60, bus 4, 2020 Antwerpen.
EUCLIDES. Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, De Schalm 19, 8251 LB Dronten.
NIEUWE WISKRANT. Tijdschrift voor Nederlands wiskunde onderwijs, Freudenthal Instituut, Postbus 9432, 3506 GK Utrecht.
PYTHAGORAS. Wiskundetijdschrift voor jongeren, Wiskundig Genootschap, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht.

INTERNET ADRESSEN

Portaalsite voor wiskunde	http://users.pandora.be/wiskunde/
Het wiskundelokaal van de digitale school	http://www.digischool.nl/wi/index.phtml
Mathworld	http://mathworld.wolfram.com/
Wiskundeweb	http://www.wiskundeweb.nl/
Applets	http://www.fi.uu.nl/wisweb/
Analyse	http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/
Calculus	http://homepages.seresc.net/~sray/alvirne.html
Problem Solving (1)	http://www2.hawaii.edu/suremath/home.html
Problem Solving (2)	http://www.nzmaths.co.nz/PS/
Problems	http://komal.elte.hu/verseny/feladatok.e.shtml
Vlaamse wiskundeolympiade	http://www.kulak.ac.be/vwo/nl/vwowwwnl.html
Vragenbank	http://www.gricha.bewoner.antwerpen.be/
Nederlandse wiskunde olympiade	http://olympiads.win.tue.nl/nwo/
Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraren	http://www.vvwl.be
Uitwiskeling	http://www.uitwiskeling.be
Geboeid door wiskunde en wetenschappen	http://www.luc.ac.be/scholennetwerk/index.html
Nederlandse vereniging voor wiskundeleraren	http://www.nvvw.nl/
Freudenthalinstituut	http://www.fi.ruu.nl/
Nieuwe Wiskrant	http://www.fi.uu.nl/wiskrant/
Tijdschrift Pythagoras	http://www.pythagoras.nu/mmmcms/public/
Vlaamse statistieken	http://aps.vlaanderen.be/
Statistische gegevens	http://statbel.fgov.be/home_nl.htm
Centraal Bureau voor Statistiek	http://www.nrc.nl/W2/Lab/Profiel/Statistiek/
Sparen en beleggen	http://www.testaankoop.be/index_NL.html
Hypotheeklening en fiscaliteit	http://www.immotheker.be