WISKUNDE – LEERPLAN B

DERDE GRAAD KSO/TSO

STUDIERICHTINGEN MET 3 (+1) UUR PER WEEK

LEERPLAN SECUNDAIR ONDERWIJS

September 2004
LICAP – BRUSSEL D/2004/0279/023

WISKUNDE – LEERPLAN B

DERDE GRAAD KSO/TSO

STUDIERICHTINGEN MET 3 (+1) UUR PER WEEK

LEERPLAN SECUNDAIR ONDERWIJS

LICAP – BRUSSEL D/2004/0279/023
September 2004
(vervangt leerplan D/1992/0279/023)
ISBN-nummer: 90-6858-384-0

Vlaams Verbond van het Katholiek Secundair Onderwijs
Guimardstraat 1, 1040 Brussel

Inhoud

INLEIDING

Dit leerplan werd opgemaakt op basis van de eindtermen wiskunde van de derde graad van het secundair onderwijs. Het is bestemd voor de leerlingen van de derde graad van het Technisch Secundair Onderwijs en het Kunst Secundair Onderwijs.

Voor het aantal lestijden wordt gerefereerd aan de Lessentabellen - Voltijds secundair onderwijs - Derde graad van het Vlaams Verbond van het Katholiek Secundair Onderwijs.

Het ***leerplan b*** is opgemaakt voor het vak wiskunde in de studierichtingen met drie wekelijkse lestijden wiskunde.

Audiovisuele vorming	Chemie
Beeldende vorming	Creatie en mode
Industriële kunst	Handel
	Sociale en technische wetenschappen

En voor de studierichtingen met drie wekelijkse lestijden, eventueel aangevuld met een extra wekelijkse lestijd wiskunde.

Bouw- en houtkunde
Elektriciteit-Elektronica
Elektromechanica
Informaticabeheer

En voor de studierichting met vier wekelijkse lestijden.

Boekhouden-informatica

En voor de studierichting met vier wekelijkse lestijden, eventueel aangevuld met een extra wekelijkse lestijd wiskunde.

Grafische communicatie

1 BEGINSITUATIE

De vooropleiding van de leerlingen die in de derde graad het leerplan b moeten verwerken is zeer divers. Sommigen volgden in de tweede graad het leerplan a, anderen de leerplannen b, of c of zelfs d (zie ook overzicht leerplan b bij hoofdstuk 5). Dit probleem van het aansluiten op een verschillende beginsituatie wordt opgelost door het aanbieden van een aantal keuzeonderwerpen, waarvan de keuze wordt vastgelegd in functie van die vooropleiding (zie overzicht leerplan b).

Het is zinvol voor het begin van een onderdeel zich ervan te vergewissen d.m.v. een diagnostische toets met eventueel aangepaste remediëring dat de leerlingen over de vereiste beginsituatie beschikken. Mogelijk moet aandacht besteed worden aan de concrete situaties van leerlingen vanuit verschillende doorstromingsmogelijkheden, waardoor misschien leerlingen samen komen, die in de tweede graad verschillende leerplannen hebben gevolgd.

Voor de studierichtingen *Elektriciteit-Elektronica, Elektromechanica, Vliegtuigtechnieken, Handel, Boekhouden-informatica en Informaticabeheer* moet bijzondere aandacht besteed worden aan de beginsituatie. Wiskunde wordt in de tweede graad soms aangeboden met een extra wekelijkse lestijd uit het complementair gedeelte. Daardoor kan een keuzeonderwerp eventueel al aan bod gekomen zijn.

De concrete leerinhouden en de wijze waarop ze in de lessen uitgewerkt worden in de tweede graad kan opgezocht worden in de leerplannen van de tweede graad (LICAP D/2002/0279/048). Daar waar nodig en zinvol wordt in het begin van een onderdeel de concrete beginsituatie aangegeven.

Hier wordt de beginsituatie weergegeven op basis van het leerplan d van de tweede graad. De onderwerpen die niet in het leerplan d voorkomen maar wel in de leerplannen a, b en c worden cursief weergegeven.

Meetkunde
De stelling van Pythagoras en het berekenen van afstanden in het vlak en in de ruimte.
Congruentie en gelijkvormigheid van driehoeken.
Eigenschappen in een cirkel (o.m. omtrekshoek en middelpuntshoek), raaklijn in een punt van de cirkel.
Vergelijking van een cirkel. (a,b)
Meetkundige problemen in de ruimte.
Driehoeksmeting in een rechthoekige driehoek.
Driehoeksmeting in een willekeurige driehoek. (a,b,c)
Vraagstukken over omtrek, oppervlakte van vlakke figuren en over oppervlakte en inhouden van ruimtefiguren.

Getallenleer en algebra
Rekenen met getallen (o.m. in wetenschappelijke schrijfwijze) en met machten van getallen.
Vraagstukken, o.m. op evenredige en omgekeerd evenredige grootheden.
Vraagstukken die leiden tot een vergelijking van de eerste graad met één onbekende.
Vraagstukken die leiden tot een vergelijking van de tweede graad met één onbekende. (a,b,c)
Vraagstukken die leiden tot een ongelijkheid van de eerste graad of van de tweede graad met één onbekende. (a)
Rekenregels voor bewerkingen van eentermen en veeltermen in één veranderlijke en beperkt tot een graad van ten hoogste drie.
Ontbinden van een veelterm in factoren. (a,b,c)
De euclidische deling en de deling door $x - a$. (a,b,c)
Complexe getallen. (a)

Reële functies
Het interpreteren van algebraïsche verbanden gegeven door middel van een grafiek, een tabel, een formule.
Functies van de eerste graad in één veranderlijke.
Stelsels van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.
Functies van de tweede graad in één veranderlijke. (a,b,c)

Functies met voorschrift $f(x) = a\sin[b(x + c)] + d$. (a)
Elementaire begrippen in verband met functies. (a,b,c)

Beschrijvende statistiek
Representativiteit van een steekproef.
Gebruik en interpretatie van een frequentietabel en grafische voorstellingen voor niet-gegroepeerde gegevens.
Gemiddelde en mediaan als centrummaat en interkwartielafstand als spreidingsmaat voor niet-gegroepeerde gegevens.
Gegroepeerde waarnemingen. (a,b,c)
De standaardafwijking als spreidingsmaat. (a,b,c)

2 ALGEMENE DOELSTELLINGEN

2.1 Wiskunde en wiskundevorming

WISKUNDE

Wiskunde biedt middelen tot *het begrijpen, het beschrijven, het verklaren en eventueel het beheren van systemen en situaties* uit onze omgeving. Het gaat in het bijzonder om natuurverschijnselen (bijv. in de natuurwetenschappen, beschrijving in de ruimte rondom ons), om technische realisaties (bijv. automatiseringsprocessen) en om menselijke relaties (bijv. het gebruik van statistische gegevens in de economie en in de media).

Een kenmerk van wiskunde is het creëren van *modellen* voor die beschrijving. De mathematisering van een situatie of een probleem betekent dat, na analyse en kwantificering, een wiskundig model (bijv. een evenredigheid, een vergelijking, een functioneel verband, een stelsel, een meetkundig verband, ...) wordt gevonden, waarin de situatie of het probleem kan beschreven worden. De bijbehorende oplossingstechnieken kunnen tot een effectieve oplossing leiden. *Kritische toetsing* van de oplossing in de beschreven realiteit kan leiden tot het aanvaarden, verwerpen of bijstellen van het wiskundige model.

Een ander kenmerk van wiskunde is het steeds verder *ordenen en organiseren* van de verworven inzichten in samenhangende schema's en systemen, waarbij de toepasbaarheid en de beperkingen van wiskundesystemen kan beschreven worden. Van nieuwe vaststellingen wordt geprobeerd ze te verbinden met of te verantwoorden vanuit de bestaande systemen.

WISKUNDEVORMING

De wiskundevorming in het secundair onderwijs heeft een dubbele rol: het ontwikkelen van een wiskundig *basisinstrumentarium* en het *ontwikkelen van het denken* in het algemeen.

Enerzijds moeten leerlingen een minimale kennis en vaardigheid verwerven in het wiskundige *instrumentarium*, nodig om te kunnen functioneren in een maatschappij, waar wiskunde in vele toepassingen gebruikt wordt. Daarom moeten wiskundige begrippen en verbanden een *brede betekenis* krijgen in relatie met realiteitsgebonden situaties en moeten wiskundige *technieken en methoden* voldoende beheerst worden (al of niet met gebruik van hulpmiddelen zoals een rekenmachine, een computerprogramma, een formularium).

Wil deze kennis en vaardigheid adequaat gehanteerd worden, is een efficiënte *kennisorganisatie* noodzakelijk. Daartoe moet aandacht besteed worden aan de samenhang tussen begrippen en eigenschappen en tussen de eigenschappen onderling. Efficiënte toegankelijkheid van de kennis houdt in dat ze inhoudelijk niet slechts logisch geordend is, maar dat een ordening beschikbaar is die gericht is op het gebruik ervan in toepassingen.

In het concrete verwervingsproces en in de toepassingen kan de bewondering voor de schoonheid en de verwondering voor het vaak verrassende van wiskunde groeien.

Anderzijds draagt de wiskundevorming bij tot een fundamentele *denk- en attitudevorming*. Bij het verwerven van wiskundekennis en wiskundige methoden worden meer algemene denkmethoden (bijv. het analyseren, het synthetiseren, het hanteren van symmetrie en analogie, het systematisch en methodisch werken), verwervingstechnieken van kennis (bijv. herhaling, verbanden leggen, toetsing, verdere abstractie) en attitudes (bijv. het opbouwen van vertrouwen in het eigen kunnen, doorzettingsvermogen en kritische zin) ontwikkeld.

Bij het mathematiseren en het oplossen van problemen kunnen leerlingen vaardigheden en strategieën verwerven die breder toepasbaar zijn. In het proces van het argumenteren en het bespreken van de kwaliteit van een wiskundige oplossing zal wiskunde bijdragen tot het verwerven van een *kritische houding*, ten aanzien van het eigen denken en handelen.

Omdat dit vormingsproces niet los verloopt van de sociale context van de klas, wordt onrechtstreeks bijgedragen tot de vorming van sociale vaardigheden.

2.2 Algemene doelstellingen voor wiskunde in de derde graad

Voor de wiskundevorming in de *derde graad* van het *kunst secundair onderwijs* en het *technisch secundair onderwijs* kunnen de volgende algemene doelstellingen vooropgesteld worden.

KENNIS EN INZICHT

De leerlingen gebruiken en onderhouden de kennis en de inzichten die ze al verworven hebben.
De leerlingen ontwikkelen

- een wiskundig instrumentarium van begrippen, eigenschappen en methoden;
- het inzicht in verbanden tussen de wiskundige leerinhouden onderling en tussen de wiskundige leerinhouden en andere vakdisciplines;
- het inzicht in verbanden tussen het wiskundige instrumentarium en problemen die wiskundig vertolkt kunnen worden;
- het inzicht in het verwerken van numerieke informatie en beeldinformatie;
- een aantal redeneermethoden om hun bevindingen te argumenteren en te verklaren;
- een aantal wiskundige denkmethoden om o.m. verbanden te leggen, te ordenen en te structureren.

VAARDIGHEDEN

De leerlingen onderhouden de vaardigheden die ze al verworven hebben.
De leerlingen ontwikkelen

- rekenvaardigheden;
- meet- en tekenvaardigheden;
- wiskundige taalvaardigheden;
- denk- en redeneervaardigheden;
- probleemoplossende vaardigheden;
- leervaardigheden.

ATTITUDES

De leerlingen ontwikkelen

- zin voor nauwkeurigheid en orde;
- zin voor volledigheid;
- zin voor helderheid, bondigheid, eenvoud van taalgebruik;
- kritische zin;
- zelfvertrouwen, zelfstandigheid en doorzettingsvermogen;
- zelfregulatie;
- zin voor samenwerking en overleg;
- waardering voor wiskunde als een dynamische wetenschap en als een component van de cultuur.

3 ALGEMENE PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de derde graad wordt verder gebouwd op de wiskundige vorming van het basisonderwijs en van de eerste en de tweede graad. Dat houdt in dat de leerlingen de kennis, de inzichten en de vaardigheden die eerder verworven werden, blijven gebruiken en onderhouden. Als uit een diagnostische toets blijkt dat onderdelen onvoldoende verworven werden, kunnen die functioneel en gericht herhaald en bijkomend ingeoefend worden. Een gedifferentieerde aanpak is hier aangewezen.

KENNIS EN INZICHT

In de derde graad komen een aantal nieuwe leerinhouden en nieuwe wiskundeonderdelen aan bod. Daarbij moet aandacht besteed worden aan de *begripsvorming*. Het best is aan te sluiten bij de werkwijzen die voordien gehanteerd werden en waarmee leerlingen vertrouwd geworden zijn. Een eerste abstractie van nieuwe begrippen wordt best onderbouwd met voorbeelden, die onder meer kunnen aansluiten bij de ervaringswereld van de leerlingen of bij de problemen die er mee kunnen opgelost worden. In een onderzoeksfase kunnen de leerlingen zelf ervaren wat de relevante en niet-relevante kenmerken van een begrip zijn. Bij het verbinden van nieuwe ervaringen aan het begrip of het niet meer behoorlijk functioneren van het begrip kunnen leerlingen hierop dan terugvallen. Door begrippen van bij de vorming te koppelen aan verschillende onderdelen worden ze breder en betekenisvoller opgenomen en wordt het gebruik ervan in de verschillende onderdelen vereenvoudigd. Dit kan een motivatie zijn om leerstofonderdelen geheel of gedeeltelijk geïntegreerd te behandelen. De aanbreng van nieuwe eigenschappen kan op gelijkaardige wijze aangepakt worden.

Voor de leerlingen die dit leerplan volgen moet gezocht worden naar een haalbaar verwoordingsniveau van de leerinhouden, waarbij de eisen aan het taalniveau niet te hoog liggen. Voor wiskundig-zwakke leerlingen is het zinvol aandacht te besteden aan een goed doordachte, stapsgewijze opbouw van het inzichtelijk proces en aan de verbetering van de eigen onvolmaakte verwoording, in plaats van hen een aantal elementen betekenisloos te laten memoriseren.

Inzicht in de aangeleerde begrippen en eigenschappen impliceert dat de verworven kennis kan *toegepast* worden. De leerlingen moeten daartoe geconfronteerd worden met zinvolle en haalbare toepassingen binnen en buiten de wiskunde. Precies de toepassingen kunnen het inzicht verscherpen in verbanden tussen het gekende wiskundig instrumentarium en het oplossen van problemen en daardoor ook in de wiskundige begrippen en eigenschappen zelf. Ook hier ligt een gradatie in het aangeboden materiaal voor de hand.

VAARDIGHEDEN

Technieken en routineprocedures worden verder ingeoefend en aangevuld. Daarbij wordt het efficiente gebruik van rekentechnische hulpmiddelen, zoals grafische rekenmachine en computer, sterk aanbevolen.

Daarnaast moet aandacht besteed worden aan de vaardigheid in verwoorden, in het stellen van een probleem en het oplossen van een probleem, redeneren en verantwoorden. De leerlingen zullen hierbij evenwel nog heel wat leiding vragen.

ATTITUDEVORMING

Doorheen de wiskundevorming kunnen leerlingen een aantal attitudes en in het bijzonder *leerattitudes* verwerven, zoals orde, nauwkeurigheid, doorzettingsvermogen, zelfvertrouwen, ... Het aanpakken van problemen kan leiden tot een *onderzoeksgerichte houding*, tot methodisch en planmatig werken. Een leerproces waarin oplossingen worden vergeleken en getoetst, kan bijdragen tot samenwerking, overleg, structurering, zin voor helderheid, bondigheid, volledigheid, eenvoud in taalgebruik, waardering voor andere oplossingen.

Bij het bespreken van oplossingsmethoden en door het kritisch onderzoeken van elkaars oplossing kan *waardering* voor een andere mening aangeleerd worden en daardoor voor de persoon van de andere. Zo kan binnen het wiskundeonderwijs aandacht besteed worden aan *waarden* en *sociale vaardigheden*.

Ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit *realiteitsbetrokken situaties* kan bij de leerlingen het besef doen groeien van de bruikbaarheid en de werkelijkheidswaarde van wiskunde. Ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit een historische context kan belangstelling en waardering opwekken voor de historische en culturele aspecten van wiskunde in het algemeen.

ACTIEVE WERKVORMEN

De leerlingen moeten voldoende betrokken worden bij het ontwikkelen van de leerinhouden. Een radicale keuze voor *actieve wiskundelessen* ligt voor de hand. Begrippen en eigenschappen kunnen in goed gekozen didactische situaties door de leerlingen zelf onderzocht worden. Die leermomenten kunnen in leer- of klassengesprekken verwoord worden en aan de ervaring van anderen getoetst. Reflecties over dit proces zelf zijn aangewezen momenten om technieken in verband met leren leren (bijv. zich vragen stellen, terugkijken op een uitgevoerde taak) aan te reiken.

In een *actief leerproces* leren leerlingen communiceren over wiskundige onderwerpen. Ook al beheersen ze de wiskundetaal wellicht minder goed, de manier waarop leerlingen onder elkaar en naar de leerkracht informatie over hun denkproces overdragen, zou begrijpbaar moeten zijn. Ook in de wiskundelessen is het hanteren van een verzorgde en behoorlijke taal belangrijk.

Van leerlingen van de derde graad mag verwacht worden, dat ze een vorm van *zelfstandig leren en werken* opbouwen. De opbouw van het leerproces moet er op gericht zijn dat leerlingen actief deelnemen aan de wiskundelessen. Die moeten zo ingericht worden dat leerlingen zelf een deel van het werk aanpakken, weliswaar binnen hun wiskundig kunnen. Door goed gekozen, progressief opgebouwde opdrachten moeten leerlingen vertrouwd gemaakt worden met het opnemen van verantwoordelijkheid voor het eigen leren en werken.

WISKUNDE EN ICT

In onze maatschappij groeit de informatie- en communicatietechnologie (ICT) uit tot een veralgemeend hulpmiddel. De leerlingen moeten er in het onderwijs al mee vertrouwd worden. Wiskunde is een aangewezen weg tot het verwerven van inzicht in een aantal computertoepassingen (rekenwerk, grafische mogelijkheden, dataverwerking).

Heel wat *routinerekenwerk* wordt in de praktijk niet meer manueel uitgevoerd. Ook in de wiskundeles kan het gebruik van moderne rekenapparatuur zoals rekenmachine en computer tijdbesparend werken, zeker bij situaties waar het handmatige rekenwerk veel tijd in beslag zou nemen. Routinerekenvaardigheden blijven weliswaar belangrijk voor een snelle schatting, bijv. na afronding van de getallen. Maar men kan niet voorbij aan de consequentie dat aan de inoefening van rekenvaardigheden minder tijd besteed wordt. Uiteraard moet misbruik van de rekenmachine voorkomen worden. Foutief gebruik kan het inzicht in de wiskundige aanpak van een probleem zelfs verstoren. In die zin zal in de inzichtelijke fase of de aanbrengfase nog manueel gewerkt worden.

Wat het *algebraische rekenwerk* (formules, letterrekenen, vergelijkingen oplossen) betreft beschikt de computer en een aantal rekenmachines al over heel wat mogelijkheden. De vraag is of alle leerlingen over de mogelijkheden beschikken van deze machines. Vandaar dat nog een aantal manuele technieken gaandeweg onderhouden worden, zonder daarbij in extreme oefeningen te vervallen. De aard van de oefeningen is dan niet gericht op complexiteit, maar op versterking van inzicht in de methode.

De *verwerking van gegevens* die in de beschrijvende statistiek voorzien is, zal niet enkel manueel uitgevoerd worden. Moeilijkheden met het rekenwerk zullen aanzienlijk verminderen door radicaal gebruik te maken van de rekenmachine of de computer.

De computer en grafische rekenmachines zijn handige *didactische hulpmiddelen*, o.m. bij exploratieopdrachten. Door de snelheid waarmee leerlingen een antwoord kunnen bekomen, krijgen ze snel terugkoppeling over hun denk-, reken- of oplossingsproces. De bijsturing die er op volgt kan het inzicht verhogen. Zo kunnen bijvoorbeeld de grafische mogelijkheden aangewend worden bij het onderzoek van functies en hun grafieken. En in de meetkunde kan eenzelfde relatie of situatie in een aantal verschillende posities of liggingen uitgeprobeerd worden waardoor de besluitvorming (bijv. bij het formuleren van een vermoeden of een vaststelling) efficiënter kan. De *visuele ondersteuning* die uitgaat van deze ‘wiskunde in beelden’ mag voor leerzwakke leerlingen niet onderschat worden. En al zal de computer in de wiskundeles niet voor flitsende beelden zorgen en vraagt het gebruik van de leerling heel wat inzet, toch kan het moderne medium de *motivatie* van een aantal leerlingen verhogen.

Het gebruik van een rekenmachine of software brengt *nieuwe mogelijkheden en moeilijkheden* mee, zo bijv. het interpreteren van de randvoorwaarden van een probleem (bijv. de keuze van de dimensies van het grafische scherm) of het extrapoleren (vanuit een verband vastgesteld op een grafiek). Dergelijke hulpmiddelen kunnen ook gebruikt worden als controlemiddel op manueel uitgevoerde berekeningen of bij het verifiëren van vermoedens, veronderstellingen en schattingen. Daartegenover staat dat nieuwe controlevaardigheden (bijv. het maken van schattingen) moeten aangeleerd worden, om meteen een kritische houding tegenover de resultaten en de mogelijkheden van deze nieuwe technologie te verwerven.

In deze tijd is het leren organiseren, gebruiken en interpreteren van informatie belangrijker dan het onthouden van de zoveelste formule. Naast het eigen geheugen worden o.m. elektronische geheugens, formularium, tabellen gebruikt. Het wiskundeonderwijs kan hieraan niet voorbij. Het kan nodig zijn de tijd te nemen om inzicht in berekeningen, regels en formules te verwerven, maar het indrillen en het rekenen met ingewikkelde uitdrukkingen moet gerelativeerd worden. De gewonnen tijd kan besteed worden aan het oplossen van een probleem, een vraagstuk meer.

WISKUNDE VOOR ELKE LEERLING

In de derde graad wordt wiskunde aangeboden met een verschillend aantal wekelijkse lestijden. Er mag verwacht worden dat de leerlingengroepen meer homogeen zijn samengesteld dan voordien. Toch moet er aandacht besteed worden aan een gedifferentieerde aanpak van de leerlingen. Dit kan betekenen dat bepaalde onderdelen en doelstellingen gedifferentieerd aangeboden worden. Dit impliceert dat er bijzondere aandacht kan gaan naar de wiskundig minder begaafde leerling.

RELATIE MET HET OPVOEDINGSPROJECT VAN DE SCHOOL

Een school wil haar leerlingen méér meegeven dan louter vakkennis. Haar intentieverklaring in dit verband is te vinden in het opvoedingsproject, waarin waardenopvoeding en christelijke duiding zijn opgenomen.

Een vakleerkracht in een school van het katholieke net zal geen andere wiskunde geven dan de collega's in een ander net. Wel heeft hij de taak om, waar de kans zich voordoet, naar het opvoedingsproject of een aspect daarvan te refereren. Als mededrager van het christelijke opvoedingsproject is elke leerkracht alert voor elke kans die het school- en klasgebeuren biedt om de diepere dimensie aan te reiken. Ook wiskundelessen bieden hiertoe de kans, niet in het minst in de persoonlijke contacten tussen leerlingen en leerkracht. Hoe beter de leerkracht de leerlingen persoonlijk kent, hoe beter hij zal aanvoelen wanneer er openheid is om met de leerlingen door te stoten naar zins- en zijnsvragen.

4 MINIMALE MATERIËLE VEREISTEN

Leerkrachten wiskunde hebben de beschikking over behoorlijk en gemakkelijk toegankelijk materiaal voor het uitvoeren van tekeningen op het bord, m.n. *geodriehoek en passer*. Ze kunnen vlot beschikken over een *overheadprojector en ICT-hulpmiddelen voor demonstratie.*

Leerkrachten wiskunde kunnen vlot beschikken over een *geavanceerde grafische rekenmachine en wiskundige software* voor de didactische ondersteuning van hun lessen.

Voor de derde graad betekent dit o.m.:
- software voor exploratie van reële functies;
- software voor de verwerking van statistische gegevens (exploratie van grafische voorstellingen, berekeningen, voorstellen van gegevens in grafieken en diagrammen);
- software voor demonstratie en exploratie van meetkundige situaties;
- beschikbaarheid van het internet voor het gebruik van applets, informatieve sites, bijv. van banken.

De *leerlingen* beschikken over behoorlijk tekenmateriaal (*geodriehoek en passer*).

De leerlingen moeten doorheen het onderwijs, en in het bijzonder tijdens de wiskundelessen, ICT-hulpmiddelen leren gebruiken. De toepassingsmogelijkheden in wiskunde zijn uitgebreid (rekenapparaat, informatieverzameling, het internet met applets). Daarom is het zinvol dat de leerlingen zelf beschikken over een grafische rekenmachine of geregeld kunnen gebruik maken van een computer. Zo zou men een werkblok met computers kunnen voorzien in de wiskundeklas.

Alleszins moet het duidelijk gesteld worden, dat gezien de verplichting van het ICT-gebruik vanuit de eindtermen, dit leerplan niet in voldoende mate kan gerealiseerd worden als deze ICT-middelen onvoldoende beschikbaar zijn.

Opmerking in verband met de implementatie

Gezien het belang van het gebruik van ICT-middelen en een eventuele beperkte beschikbaarheid zal de leraar rekening houden met deze beperkingen bij het plannen van de didactische aanpak. Eventueel kan de jaarplanning aangepast worden.

De vakgroep wiskunde zal geregeld een evaluatie maken van het gebruik van en de vordering van de implementatie van ICT-hulpmiddelen, bijv. over de grenzen van de graden en de studierichtingen heen. Dit is een gelegenheid om ideeën en werkmateriaal uit te wisselen. Zo is het, gezien de tijdsinvestering voor het aanleren van een programma, aangewezen dat in tweede en derde graad dezelfde of analoge wiskundesoftware gebruikt wordt. In dit verband kan gezamenlijk materiaal ontwikkeld worden met toelichting voor het gebruik van de software, cf. werkkaarten of gebruiksvademecum.

Aanvullend overleg is wenselijk met de vakwerkgroepen wetenschappen, technische vakken en informatica, o.m. om het wiskundige gebruik van de ICT-hulpmiddelen in die vakken aan te moedigen of toe te lichten.

Het komt de didactische verwerking in de klas ten goede als de leerlingen over eenzelfde rekenmachine beschikken. Als gevolg van de doorstroming van leerlingen naar de derde graad kan echter een situatie ontstaan waarin verschillende toestellen gehanteerd worden in de klas. Het is niet zinvol om leerlingen nog andere (dure) toestellen te laten aanschaffen. Om een continuïteit in het gebruik van rekenmachines te waarborgen doorheen de studieloopbaan van de leerlingen is het wenselijk dat afspraken gemaakt worden op het niveau van de scholengemeenschap.

Tenslotte moet voorzien worden dat leerlingen uit een sociaal minder begoed midden geen probleem ervaren met de beschikbaarheid van deze hulpmiddelen. Zo kan er niet van worden uitgegaan dat elke leerling thuis al over een computer kan beschikken. Dat impliceert wellicht dat in de school oefenmogelijkheden moeten worden voorzien.

5 LEERPLANDOELSTELLINGEN - LEERINHOUDEN PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerplandoelstellingen zijn opgemaakt op basis van *de eindtermen wiskunde van de derde graad* van het secundair onderwijs. Bij een aantal doelstellingen is in de laatste kolom een *verwijzing naar de eindtermen* opgenomen. Bij een aantal doelstellingen staan meer verwijzingen, als gelijktijdig aan het realiseren van meer dan een eindterm gewerkt worden. Dit betekent niet dat deze eindtermen uitsluitend hier aan bod komen, want anderzijds kunnen verschillende doelstellingen verwijzen naar dezelfde eindterm. In hoofdstuk 7 is een concordantietabel opgenomen. Omdat het aantal lestijden hoger is dan het minimum pakket waarvoor de eindtermen bedoeld zijn, is het leerplan uiteraard uitgebreider.

De doelstellingen voor *vaardigheden en attitudes* zijn doelstellingen die doorheen de gehele wiskundevorming aan bod moeten komen. Het zijn doelstellingen die eerder permanente aandacht vragen in het onderwijsleerproces, dan wel specifieke lessen om ze aan te leren. De doelstellingen bouwen voort op gelijkaardige doelstellingen uit de eerste en de tweede graad. Omwille van hun brede formulering en hun ruim toepassingsgebied kunnen ze op verschillende niveaus en verschillende wijzen gerealiseerd worden. Het gaat daarbij meer om het verwerven van een wiskundige dispositie en methode, dan wel om concreet specifieke doelen.

In verband met de controle geldt de opmerking dat attitudes altijd na te streven zijn en dat de effecten ervan op de leerlingen geen deel uitmaken van een inspectieonderzoek.

De *leerinhoudelijke* doelstellingen worden samengebracht in een aantal onderdelen op basis van samenhangende leerinhouden. Gezien de verschillen in de vooropleidingen moet uit deze onderdelen een keuze gemaakt worden gedifferentieerd voor de verschillende studierichtingen en leerlingengroepen. Dit betekent dat niet alle leerlingen die leerplan b volgen zonder meer kunnen samen zitten. Bijzondere aandacht aan de keuze geldt voor de studierichtingen *Elektriciteit-Elektronica, Elektromechanica, Vliegtuigtechnieken*, *Handel, Boekhouden-informatica en Informaticabeheer* waarbij in de vooropleiding verschillen kunnen optreden, al naargelang de leerlingen een extra lestijd wiskunde per week hebben gekregen.

Voor een aantal studierichtingen werd deze keuze al vastgelegd (zie het hierna volgende overzicht) onder meer in functie van de verplichte eindtermen (onderwerpen uit de *functieleer* en *Statistiek*). Daarnaast is vaak voor het onderdeel *Financiële algebra* gekozen omdat het een maatschappelijke relevantie heeft voor deze leerlingen in verband met het beheren van geldelijke middelen, eventueel ook in verband met hun toekomstige beroepsactiviteit. In alle studierichtingen is het onderdeel *Mathematiseren* voorzien. Dit biedt de mogelijkheid verder te werken aan de zo belangrijke en transferabele probleemoplossende vaardigheden. Meteen bestaat de mogelijkheid om hierin bepaalde problemen aangereikt vanuit de technische vakken te verwerken. Het is zinvol hierover in een gemeenschappelijke vakvergadering afspraken te maken.

Voor een aantal studierichtingen blijft nog ruimte voor een vrije keuze. Hiervoor kan binnen de onderwerpen van het leerplan gekozen worden. Meestal in afspraak met de sectoren waartoe de studierichtingen behoren worden een aantal onderwerpen bijzonder aanbevolen.

Met de inhoudelijke groepering wil het leerplan niet opleggen op welke wijze de leerinhouden moeten aangebracht worden. Ook de volgorde, waarin de verschillende leerstofonderdelen in het leerplan zijn weergegeven, is niet noodzakelijk de volgorde waarin ze in de klas moeten worden behandeld. Zo is bijvoorbeeld een integratie tussen verschillende onderdelen mogelijk. Voor elk leerplan wordt een aanbeveling gedaan over het aantal te besteden lestijden. Deze getallen zijn slechts *richtinggevend*.

Om tegemoet te komen aan de onderlinge leerlingenverschillen is differentiatie noodzakelijk. Een eerste differentiatie gebeurt in de derde graad op basis van de studierichtingen, i.h.b. het aantal lestijden wiskunde per week en de bijbehorende verschillende leerplannen. Zo geldt dit leerplan voor een invulling wiskunde met drie of vier wekelijkse lestijden, eventueel nog aangevuld met een extra wekelijkse lestijd uit het complementair gedeelte. Binnen het leerplan worden binnen enkele onderwerpen nog meer differentiatiemogelijkheden aangereikt door het opsplitsen van de doelstellingen in twee rubrieken: *basisdoelstellingen* en *uitbreidingsdoelstellingen*.

De *basisdoelstellingen* vormen een minimum. Bij het opstellen van het jaarplan moet er over gewaakt worden dat ze volledig kunnen verwerkt worden.

OVERZICHT LEERPLAN B

De volgende onderwerpen zijn voorzien in dit leerplan.

Grafisch onderzoek van functies (5.2.1)
Functies van de tweede graad (5.2.2)
Afgeleiden van veeltermfuncties (5.2.3)
Integralen van veeltermfuncties (5.2.4)
Exponentiële en logaritmische functies (5.2.5)
Goniometrische functies A (5.2.6)
Goniometrische functies B (5.2.7)
Rationale functies (5.2.8)
Rijen en iteratieprocessen (5.2.9)
Complexe getallen (5.2.10)
Matrices en stelsels (5.2.11)
Lineaire programmatie (5.2.12)
Ruimtemeetkunde (5.2.13)
Financiële algebra A (5.2.14)
Financiële algebra B (5.2.15)
Statistiek (5.2.16)
Telproblemen en kansrekening (5.2.17)
Regressie (5.2.18)
Mathematiseren en oplossen van problemen (5.2.19)

VOOR DE STUDIERICHTING

Beeldende Vorming en Industriële kunst

Lessentabel: **3** wekelijkse lestijden
Beginsituatie: het leerplan **a** uit de tweede graad
Leerplandoelstellingen:

5.1 Vaardigheden en attitudes
5.2 Inhoudelijke doelstellingen

Grafisch onderzoek van functies	**10**
Afgeleiden van veeltermfuncties	**30**
Integralen van veeltermfuncties	**15**
Exponentiële en logaritmische functies (b)	**15**
Goniometrische functies B	**15**
Ruimtemeetkunde	**20**
Statistiek	**20**
Mathematiseren en oplossen van problemen	**20**

VOOR DE STUDIERICHTING

Chemie

Lessentabel:	**3** wekelijkse lestijden	
Beginsituatie:	het leerplan **a** uit de tweede graad	
Leerplandoelstellingen:		
	5.1 Vaardigheden en attitudes	
	5.2 Inhoudelijke doelstellingen	
	Grafisch onderzoek van functies	**10**
	Afgeleiden van veeltermfuncties	**30**
	Integralen van veeltermfuncties	**15**
	Exponentiële en logaritmische functies (b + u)	**25**
	Goniometrische functies B	**15**
	Rationale functies	**15**
	Statistiek	**20**
	Mathematiseren en oplossen van problemen	**20**

VOOR DE STUDIERICHTING

Handel

Lessentabel:	**3** wekelijkse lestijden	
Beginsituatie:	het leerplan **c** uit de tweede graad	
Leerplandoelstellingen:		
	5.1 Vaardigheden en attitudes	
	5.2 Inhoudelijke doelstellingen	
	Grafisch onderzoek van functies	**10**
	Afgeleiden van veeltermfuncties	**30**
	Integralen van veeltermfuncties	**15**
	Exponentiële en logaritmische functies (basis)	**15**
	Financiële algebra A	**35**
	Statistiek	**20**
	Mathematiseren en oplossen van problemen	**20**

VOOR DE STUDIERICHTINGEN

Creatie en Mode, Sociale en technische wetenschappen, Audiovisuele vorming

Lessentabel:	**3** wekelijkse lestijden	
Beginsituatie:	het leerplan **d** uit de tweede graad	
Leerplandoelstellingen:		
	5.1 Vaardigheden en attitudes	
	5.2 Inhoudelijke doelstellingen	
	Grafisch onderzoek van functies	**10**
	Functies van de tweede graad	**18**
	Afgeleiden van veeltermfuncties	**30**
	Exponentiële en logaritmische functies (b)	**15**
	Financiële algebra A	**35**
	Statistiek	**20**
	Mathematiseren en oplossen van problemen	**20**

VOOR DE STUDIERICHTINGEN

Bouw- en houtkunde, Elektriciteit-Elektronica, Elektromechanica, Vliegtuigtechnieken

Lessentabel: **3** wekelijkse lestijden, complementair gedeelte **1** lestijd
Beginsituatie: het leerplan **b** uit de tweede graad met **5** wekelijkse lestijden
Leerplandoelstellingen:

5.1 Vaardigheden en attitudes
5.2 Inhoudelijke doelstellingen

Grafisch onderzoek van functies	**10**
Afgeleiden van veeltermfuncties	**30**
Integralen van veeltermfuncties	**15**
Exponentiële en logaritmische functies (b + u)	**25**
Goniometrische functies B	**15**
Rationale functies	**15**
Statistiek	**20**
Mathematiseren en oplossen van problemen	**20**

Als uit het *complementair gedeelte* een bijkomende wekelijkse lestijd wiskunde wordt ingericht, ca. 50 lestijden aanvullen met **twee of drie onderwerpen** te kiezen uit:

Rijen en iteratieprocessen	**15**
Matrices en stelsels	**15**
Lineaire programmatie	**15**
Ruimtemeetkunde	**20**
Financiële algebra B	**25**
Telproblemen en kansrekening	**15**
Regressie	**15**

VOOR DE STUDIERICHTINGEN

Elektriciteit-Elektronica, Elektromechanica

Lessentabel: **3** wekelijkse lestijden, complementair gedeelte **1** lestijd
Beginsituatie: op basis van het leerplan **b** uit de tweede graad met **4** wekelijkse lestijden
Leerplandoelstellingen:

5.1 Vaardigheden en attitudes
5.2 Inhoudelijke doelstellingen

Grafisch onderzoek van functies	**10**
Afgeleiden van veeltermfuncties	**30**
Integralen van veeltermfuncties	**15**
Exponentiële en logaritmische functies (b)	**15**
Goniometrische functies A	**15**
Rationale functies	**15**
Complexe getallen	**10**
Statistiek	**20**
Mathematiseren en oplossen van problemen	**20**

Als vanuit het *complementair gedeelte* een bijkomende wekelijkse lestijd wiskunde wordt ingericht, ca. 50 lestijden aanvullen met **twee of drie onderwerpen** te kiezen uit:

Exponentiële en logaritmische functies (u)	**15**
Goniometrische functies B	**15**
Rijen en iteratieprocessen	**15**
Matrices en stelsels	**15**
Lineaire programmatie	**15**

Ruimtemeetkunde	**20**
Financiële algebra B	**25**
Telproblemen en kansrekening	**15**
Regressie	**15**

VOOR DE STUDIERICHTING

Informaticabeheer

Lessentabel: **3** wekelijkse lestijden, complementair gedeelte **1** lestijd
Beginsituatie: op basis van het leerplan **c** uit de tweede graad
Leerplandoelstellingen:

5.1 Vaardigheden en attitudes
5.2 Inhoudelijke doelstellingen

Grafisch onderzoek van functies	**10**
Afgeleiden van veeltermfuncties	**30**
Integralen van veeltermfuncties	**15**
Exponentiële en logaritmische functies (b)	**15**
Financiële algebra A	**35**
Statistiek	**20**
Mathematiseren en oplossen van problemen	**20**

Als vanuit het *complementair gedeelte* een bijkomende wekelijkse lestijd wiskunde wordt ingericht, ca. 50 lestijden aanvullen met **drie onderwerpen** te kiezen uit:

Exponentiële en logaritmische functies (u)	**15**
Rijen en iteratieprocessen	**15**
Matrices en stelsels	**15**
Lineaire programmatie	**15**
Telproblemen en kansrekening	**15**
Regressie	**15**

VOOR DE STUDIERICHTING

Boekhouden-informatica

Lessentabel: **4** wekelijkse lestijden
Beginsituatie: op basis van het leerplan **c** uit de tweede graad
Leerplandoelstellingen:

5.1 Vaardigheden en attitudes
5.2 Inhoudelijke doelstellingen

Grafisch onderzoek van functies	**10**
Afgeleiden van veeltermfuncties	**30**
Integralen van veeltermfuncties	**15**
Exponentiële en logaritmische functies (b + u)	**25**
Matrices en stelsels	**15**
Financiële algebra A	**35**
Statistiek	**20**
Mathematiseren en oplossen van problemen	**20**

Twee onderwerpen te kiezen uit:

Rijen en iteratieprocessen	**15**
Lineaire programmatie	**15**
Telproblemen en kansrekening	**15**
Regressie	**15**

VOOR DE STUDIERICHTING

Grafische wetenschappen

Lessentabel: **4** wekelijkse lestijden, complementair gedeelte **1** lestijd
Beginsituatie: op basis van het leerplan **b** uit de tweede graad met vijf wekelijkse lestijden
Leerplandoelstellingen:

5.1 Vaardigheden en attitudes
5.2 Inhoudelijke doelstellingen

Grafisch onderzoek van functies	**10**
Afgeleiden van veeltermfuncties	**30**
Integralen van veeltermfuncties	**15**
Exponentiële en logaritmische functies (b + u)	**25**
Goniometrische functies B	**15**
Rationale functies	**15**
Matrices en stelsels	**15**
Financiële algebra A	**35**
Statistiek	**20**
Mathematiseren en oplossen van problemen	**20**

Als vanuit het *complementair gedeelte* een bijkomende wekelijkse lestijd wiskunde wordt ingericht, ca. 50 lestijden aanvullen met **drie onderwerpen** te kiezen uit:

Rijen en iteratieprocessen	**15**
Lineaire programmatie	**15**
Ruimtemeetkunde	**20**
Telproblemen en kansrekening	**15**
Regressie	**15**

5.1 VAARDIGHEDEN EN ATTITUDES

5.1.1 Vaardigheden

LEERPLANDOELSTELLINGEN

De leerlingen ontwikkelen (binnen het gekende wiskundig instrumentarium)

1	rekenvaardigheid, o.m. - het vlot rekenen met getallen; - het rekenen met formules en algebraïsche vormen; - het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden, stelsels, …; - het voorspellen en inschatten van de grootteorde van een resultaat; - het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het uitvoeren van bewerkingen.	2 3 5
2	meet- en tekenvaardigheid, o.m. - het analyseren en opbouwen van een figuur bij een redenering; - ruimtelijk voorstellingsvermogen; - het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het opbouwen van figuren en grafieken.	1 2 3 5 6
3	wiskundige taalvaardigheid, o.m. - het begrijpen van wiskundige uitdrukkingen (zowel mondeling als schriftelijk); - het lezen van figuren, tekeningen, grafieken en diagrammen; - het verwoorden van hun gedachten en hun inzichten (zowel mondeling als schriftelijk).	1 2 6
4	denk- en redeneervaardigheden, o.m. - het onderscheid maken tussen hoofd- en bijzaken, gegeven en gevraagde; - het begrijpen van een redenering of argumentering bij een eigenschap; - het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het opbouwen van een redenering; - het opbouwen van een redenering ter verklaring van een eigenschap of de oplossing van een probleem, dit houdt onder meer in: o een hypothese (vermoeden) formuleren en argumenteren; o een eigenschap formuleren op basis van een onderzoek op een aantal voorbeelden, een inductieve redenering; - een gegeven redenering op geldigheid onderzoeken.	1 3 4 6
5	probleemoplossende vaardigheden, zoals - een probleem leren ontdekken en behoorlijk leren stellen; - probleemoplossende vaardigheden (i.h.b. heuristische methoden) toepassen bij het werken aan problemen, zowel over alledaagse als over wiskundige situaties; bijv. een opgave herformuleren, een goede schets of een aangepast schema maken, notaties invoeren, onbekenden kiezen, voorbeelden analyseren; - reflecteren op de keuzen voor representatie, oplossingstechnieken en resultaten; - resultaten controleren op hun betrouwbaarheid en volledigheid; - ICT-hulpmiddelen gebruiken om wiskundige informatie te verwerken en wiskundige problemen te onderzoeken.	1 3 4 5 6 8 9
6	leervaardigheden, o.m. - het verwerken van losse gegevens; - het verwerken van samenhangende informatie; - het raadplegen van informatiebronnen; - het plannen van de studietijd; - het sturen van het eigen leerproces.	

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerlingen moeten bij hun wiskundevorming een aantal vaardigheden ontwikkelen. Voor de duidelijkheid werden ze gescheiden geformuleerd. Dit betekent echter niet dat ze altijd zo gescheiden voorkomen. In een wiskundig leerproces wisselen ze voortdurend af.

Het is belangrijk te beseffen dat vaardigheden maar bereikt worden doorheen een proces van langere duur. Een aantal vaardigheden werden aangezet in het basisonderwijs en in de eerste en de tweede graad. Ze moeten verder uitgewerkt worden in de derde graad.

Vaardigheden worden niet automatisch gegenereerd door de ermee verwante leerinhouden. Er moet bewust aandacht aan besteed worden. Dit betekent niet noodzakelijk dat ze in afzonderlijke lessen gepresenteerd moeten worden. Ze moeten precies meermaals bij het spontane gebruik geëxpliciteerd worden.

Een aantal vaardigheden wint aan belangrijkheid in functie van de vervolgopleiding van de leerlingen of van hun latere beroepsloopbaan.

1 REKENVAARDIGHEID

In de derde graad moeten een aantal rekenvaardigheden paraat beschikbaar blijven, bijv. het rekenen met formules, het rekenen met functievoorschriften en bij gebruik in de statistiek. Daarnaast zijn rekenprocedures vereist voor het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels. Of het nu gaat over effectief rekenen of rekenprocedures, wiskunde kan daartoe niet gereduceerd worden. Ze zijn slechts *middelen* om problemen op te lossen. En precies daarbinnen krijgen ze hun juiste betekenis. Aan het langdurig oefenen van rekenprocedures in geïsoleerde situaties werd weinig aandacht besteed en dat blijft ook zo in de derde graad.

Met de opgang van geavanceerde rekenmachines en gemakkelijk toegankelijke en adequate software kan de aandacht voor het automatiseren van deze technieken en procedures beperkt worden. Het is nu al duidelijk dat wie later nog rekenprocedures nodig heeft, in de praktijk veelal zal gebruik maken van moderne informatie- en communicatietechnologie. Weliswaar is inzicht nodig in de precieze werking van de gebruikte procedures. Het gebruik van een rekenmachine of een computer mag het inzicht in de noodzakelijke basisvaardigheden dus niet verminderen. Maar er zal minder aandacht besteed worden aan de manuele beheersing ervan. Ook de kritische houding ten aanzien van wat op het scherm van een toestel verschijnt, moet verworven worden.

Anderzijds bieden rekenmachines nieuwe mogelijkheden. Praktische problemen die tot nu toe niet binnen het bereik van het secundair onderwijs lagen, omdat de berekeningen (bijv. bij het oplossen van vergelijkingen) te ingewikkeld of te moeilijk waren, kunnen nu wel behandeld worden.

2 MEET- EN TEKENVAARDIGHEID

Voor een aantal leerlingen is het onderdeel met meetkundige toepassingen beperkt. Ze zullen niet rechtstreeks geconfronteerd worden met meetkunde problemen. Daartegen over staat dat toch geregeld bij het aanpakken van problemen een voorstelling noodzakelijk is. De leerlingen moeten de gewoonte aannemen bij een meetkundig probleem een tekening of een schets te maken. Zo kan nog gewerkt worden aan de ontwikkeling van ruimtelijk inzicht en ruimtelijk voorstellingsvermogen.

Ook het lezen en interpreteren van informatie uit grafieken en diagrammen kan onderhouden worden bij het oplossen van problemen, o.m. in het onderdeel beschrijvende statistiek, door die aan te bieden in allerlei presentaties. Bij de studie van reële functies krijgt het begrip grafiek meer wiskundig gehalte. Leerlingen moeten vaardig worden in het lezen van de informatie die hierin verstrekt wordt. Ze moeten probleem, grafiek en voorschrift met elkaar kunnen verbinden.

Grafische rekenmachines en wiskundige software bieden de mogelijkheid om van bij de aanvang van de studie van functies de grafiek er bij te betrekken. Leerlingen kunnen de invloed van parameters op het verloop zelf onderzoeken. Grafische rekenmachines kunnen als een veredelde pen een meerwaarde brengen aan de behandelde leerinhoud, zonder dat ze een aantal basisvaardigheden overbodig maken. Zo dienen leerlingen toch kritisch om te springen met de getoonde resultaten, bijvoorbeeld de begrensdheid inzien van het uitleesvenster of een snelle controle uitvoeren (cf. het schatten bij het rekenen) aan de hand van een nulpunt of van enkele specifieke punten, het stijgen en dalen van de grafiek, eventueel het asymptotisch gedrag.

3 WISKUNDIGE TAALVAARDIGHEID

Wiskunde is uitgegroeid tot een wetenschap waarin begrippen en eigenschappen welomschreven moeten worden. Daartoe wordt de omgangstaal vaak verengd tot een meer *specifieke vaktaal* met eigen regels.

Begrippen, eigenschappen, procedures en wiskundige verbanden worden erin omschreven met behulp van typische *vaktermen* (bijv. vierkantswortel, evenredig, richtingscoëfficiënt, stelsel, evenwijdig met, middelloodlijn, ligt op gelijke afstand van, histogram, ...). Soms moet een onderscheid gemaakt worden tussen de wiskundige en de dagelijkse betekenis van een term, waarbij de wiskundige betekenis meestal minder vaag omschreven wordt. In de omschrijving van de begrippen en de formulering van eigenschappen worden naast vaktermen specifieke *kernwoorden* gebruikt, die wijzen op het veralgemeningsproces, verbanden, samenhang, ... (bijv. gelijk aan, als ... dan, daaruit volgt, alle, sommige, ...). De wiskundetaal kent vanuit haar voorgeschiedenis een sterke *formalisering* en *symbolisering* die snelle communicatie en universalisering mogelijk maakt, maar die wiskunde voor sommige leerlingen precies zo moeilijk toegankelijk maakt. De eisen die gesteld worden aan deze formalisering zullen uiteraard toenemen naarmate de leerling voor een hoger aantal wekelijkse lestijden wiskunde kiest. Naast de verbale taal is in wiskunde de specifieke *visuele taal* van tekeningen en wiskundige voorstellingen van belang. Een bijzondere vorm van visueel geordend aanbieden van informatie is die in tabelvorm.

Buiten de vaktaal waarmee wiskunde opgebouwd wordt, moeten leerlingen de *beschrijvende taal* blijven hanteren waarin over het wiskundig handelen gesproken wordt (met termen zoals definitie, eigenschap, kenmerk, verklaar ..., bereken..., los op ..., construeer ..., vraagstuk).

Tenslotte, reële problemen worden meestal niet rechtstreeks in de wiskundetaal gesteld. Een belangrijke vaardigheid is het omzetten, het *vertalen* van de omgangstaal naar de wiskundige vaktaal.
In een actief leerproces krijgen de leerlingen heel wat kansen om de verschillende communicatieve vaardigheden (zowel lezen, luisteren, spreken als schrijven) te hanteren en ze toe te passen op wiskundige situaties. In communicatie met andere leerlingen kunnen voorbeelden en tegenvoorbeelden van begrippen en eigenschappen besproken worden, wat de begripsvorming ondersteunt. Speciale aandacht kan gaan naar de betekenis van de wiskundige vaktermen en kernwoorden. De leerlingen moeten leren de geëigende vaktermen voldoende correct te gebruiken. Ze moeten vertrouwd geraken met strengere eisen die aan wiskundige wendingen worden gesteld, zonder dat dit hier een minder zware didactische aanpak in de weg staat. Leerlingen moeten leren hun ervaringen, bevindingen, vermoedens, besluiten en oplossingen te verwoorden. Precies in het verwoorden van hun gedachten en hun inzicht kunnen ze beter de tekortkomingen ervan ervaren en daardoor hun inzicht verdiepen.

Omdat wiskundige informatie visueel kan overgebracht worden, moet aandacht besteed worden aan het lezen en interpreteren van visuele informatie (bijv. op tekeningen in de meetkunde of informatie op een grafiek of een diagram in de statistiek). Het hanteren van een schets of een nauwkeurige tekening als middel tot communicatie moet aangemoedigd worden. Het maken van een meer abstracte of formele redenering zal ondersteund worden door het redeneren op figuren.

Bijzondere aandacht moet besteed worden aan het verwerven van de leesvaardigheid bij het lezen van de tekst van opgaven, problemen en vraagstukken. Vaak is deze moeilijkheid voor de leerlingen groter dan het uitvoeren van gekende rekentechnieken. Aan deze belangrijke stap, noodzakelijk bij het analyseren van problemen en het formuleren van vermoedens, moet bijzondere aandacht besteed worden.

4 DENK- EN REDENEERVAARDIGHEDEN

Met denk- en redeneervaardigheden worden onder meer bedoeld abstraheren (bij de begripsvorming), een vermoeden formuleren, veralgemenen (ontdekken van een eigenschap), analyseren, synthetiseren, structureren, ordenen, analoog werken, argumenteren, bewijzen. Het gaat om meer dan het kunnen bewijzen van eigenschappen.

Vanuit het actief onderzoeken van relaties tussen begrippen worden leerlingen geconfronteerd met vele vormen van beweringen en vermoedens. Niet elk intuïtief vermoeden leidt tot een 'eigenschap', niet elke bewering zal blijken juist te zijn, veralgemeenbaar, ... Daarom is het zinvol bij de besluitvorming aandacht te besteden aan de argumenten die ervoor kunnen gegeven worden. Ook bij het actief oplossen van een probleem zullen de leerlingen hun oplossing of hun redenering op een of andere wijze moeten argumenteren.

Het verwerven van deze redeneervaardigheid vraagt een geleidelijke en geduldige aanpak. Het is zinvol aandacht te besteden aan de verschillende fasen van het opbouwen van een redenering of een bewijs, o.m. het redeneren op een tekening, het argumenteren van delen van een redenering (bijv. het expliciteren van gegeven en vraag), het inzien van en/of zelf ontdekken van de kernidee uit een redenering, het maken van redeneringen in analoge situaties, het zelf uitschrijven van een behoorlijk geordende verklaring.

5 PROBLEEMOPLOSSENDE VAARDIGHEDEN

Leerlingen moeten vaardigheid verwerven in het zelfstandig oplossen van problemen. Het bevorderen van dit probleemoplossend denken is een van de voornaamste opdrachten van leerkrachten wiskunde. De transferwaarde van deze vaardigheden naar andere vakken kan zeer groot zijn. Probleemoplossende vaardigheden zijn een essentiële troef in de studie- en beroepsloopbaan van leerlingen.

De meest zinvolle aanpak lijkt die van een volgehouden *integratie* ervan *in het normale lesgebeuren*. Leerlingen zullen deze vaardigheden maar verwerven doorheen een actief proces van zich vragen stellen, patronen ontdekken, antwoorden zoeken en onderzoeken, voorbeelden en tegenvoorbeelden opzoeken, vraagstelling vereenvoudigen, voorstellen analyseren, testen en bijsturen, vermoedens argumenteren, ...

Belangrijk is dat de leerlingen aantrekkelijke, haalbare problemen aangeboden krijgen. Vooral succeservaring zal leerlingen aanzetten om nieuwe en moeilijkere problemen aan te pakken. Leerlingen moeten evenwel problemen leren ‘zien’. Daarom zullen geregeld open problemen, weliswaar haalbaar op het niveau van de leerlingen, aangeboden worden. Problemen moeten niet noodzakelijk altijd buiten de wiskunde gezocht worden. Ook wiskundige situaties kunnen als aantrekkelijke problemen gepresenteerd worden.

Het verwerven van probleemoplossende vaardigheden is een lang en arbeidsintensief proces. Daarom moet de aanpak in de derde graad aansluiten op de inspanningen die al in de eerste en de tweede graad werden gedaan. Zo kan men terugvallen op verschillende stappen die voor leerlingen misschien al vertrouwd zijn.
In de eerste plaats zal aandacht besteed worden aan een goede *probleemstelling*. Het probleem moet voor de leerlingen duidelijk zijn (dit kan bijvoorbeeld door de leerlingen het probleem in eigen woorden te laten stellen). Als het gaat om het onderzoeken van verbanden of eigenschappen moet dit leiden tot een duidelijke formulering van een vermoeden of hypothese.

Daarop volgt het *analyseren* en/of het *mathematiseren*. Dit betekent dat de leerlingen de wiskundige probleemstelling kunnen herkennen in het gestelde probleem of in de opgave (bijv. het gaat er om het maximum van een functie te bepalen in een interval). Dit betekent onder meer dat ze bij een situatie gegeven en gevraagde kunnen bepalen, kwantificeerbare elementen kunnen opzoeken en wiskundig vertolken, relaties tussen elementen (gegevens onderling, gegevens en gevraagde) kunnen leggen en wiskundig vertolken, uit te voeren bewerking(en) kunnen bepalen. In deze fase worden vaak *zoekstrategieën* of *heuristische methoden* gebruikt. In een leerproces van probleemoplossende vaardigheden is het belangrijk deze te expliciteren. Bij een complexer probleem is het zinvol in deze fase een planmatige aanpak te voorzien en de uitvoering van het plan verderop te bewaken. Daarop volgt het *uitschrijven van een oplossing, het berekenen van het resultaat of het uitschrijven van een verklaring*, het maken van een *(reken)proef*, het maken van een *realiteitsproef* (kan dit resultaat in deze context) en het formuleren van een *antwoord* op het gestelde probleem.

Heuristische methoden
Voorbeelden van veel gebruikte heuristische methoden zijn:
- gegeven en gevraagde wiskundig expliciteren;
- bij een gegeven situatie een schets of een tekening maken;
- bij een gegeven situatie een voorbeeld of een tegenvoorbeeld geven;
- bij een situatie bijzondere gevallen onderzoeken;
- gebruik maken van analogie, symmetrie, …;
- een eenvoudigere probleemstelling onderzoeken;
- een of meer veranderlijken in het probleem constant houden;
- een gestelde voorwaarde laten vallen.

Heuristische methoden worden veelvuldig gebruikt. Belangrijk is ze bewust te laten ervaren en te expliciteren op het ogenblik dat ze spontaan gebruikt worden. Een actieve aanpak van het leerproces laat toe dat leerlingen hierover onderling en met de leerkracht informatie uitwisselen. Met het oog op het verwerven van een hogere graad van zelfwerkzaamheid bij de leerlingen kan een aantal complexere oefeningen aangeboden worden waarbij doelbewust het inzicht in het gebruik van heuristische methoden wordt nagestreefd.

Bij het oplossen van problemen worden de leerlingen geconfronteerd met het toepassen van hun kennis in diverse situaties. Het is belangrijk te beseffen dat probleemoplossende vaardigheden en heuristische methoden maar effectief zullen werken, als de leerlingen over een efficiënte kennisorganisatie beschikken. Het oplossen van problemen kan leerlingen precies motiveren deze kennisorganisatie te onderhouden.

De *rol van de leerkracht* kan erin bestaan leerlingen individueel tot nadenken aan te zetten, discussie over oplossingen uit te lokken en hierbij een kritische houding aan te bevelen. De leerkracht kan verkiezen minder inhoudelijke hulp aan te reiken, maar eerder te verwijzen naar het gebruik van heuristische methoden en de beschikbare kennisorganisatie (niet naar specifieke kennis). De leerkracht zou dezelfde werkwijze kunnen hanteren bij het klassikaal opstellen van bewijzen van eigenschappen en het opbouwen van redeneringen. Ook is het zinvol dat de leraar aan het eind van een oplossingsproces of redenering de denkstappen eens controlerend overloopt en de gebruikte heuristische methoden eens expliciet laat formuleren of bevragen.

Het verdient aanbeveling dat voldoende differentiatie in de opdrachten wordt nagestreefd, omdat in de verwerving van probleemoplossende vaardigheden het verschil tussen de leerlingen erg groot kan zijn. Hierdoor kan zowel een wiskundig-sterke leerling aan zijn trekken komen, als tijd vrijgemaakt worden voor het begeleiden van de wiskundig-zwakke leerlingen. Voor wiskundig-sterke leerlingen kan men bijv. vlugger naar open problemen grijpen.

6 LEERVAARDIGHEDEN

Aan het verwerven van leervaardigheden moet in de derde graad nog steeds bewust gewerkt worden. Daarbij moet steeds meer aandacht gaan naar het zelfstandig leren van de leerlingen. Belangrijk is dat de bijdrage van wiskunde kadert in een bredere aanpak van de problematiek leren leren in de school en de groei naar een zelfverantwoord leren. Omdat het 'de leerling' is die adequate technieken moet verwerven, zal over de vakken heen toch een zekere eenvormigheid nagestreefd worden. Algemene technieken worden uiteraard vakspecifiek vertaald.

Bij het verwerven van wiskunde worden een aantal *leervaardigheden* geactiveerd.
Voorbeelden zijn
- het inprenten (notaties, symbolen, formules);

- het gebruik van de vormkenmerken van een tekst (titels, subtitels, afbeeldingen, schikking kaders, lettertype, tekstmarkeringen);
- de aandacht voor het begrijpen en analyseren van het geleerde;
- het opnieuw opzoeken en zo nodig inoefenen van voorkennis (het aanleggen of gebruiken van een vademecum kan hierbij ondersteunend werken);
- het verdiepen van de leertekst in leerboeken of notities (zich vragen stellen bij de leerinhoud, de tekst structureren bijv. met tekstmarkeringen, kleur, ..., het bijhouden van een kennisschema);
- het gebruiken van 'informatiebronnen' (een inhoudsopgave, een register, een samenvatting van de leerinhouden in het leerboek, een vademecum, een handleiding van de rekenmachine);
- het zichzelf sturen bij het leren, bijv.
    - de keuze van het verwerkingsproces eigen aan de wiskundige leerinhoud,
    - het oordeelkundig gebruiken van een antwoordblad, een correctiesleutel,
    - het plannen van de studietijd,
    - het onderzoeken van de gemaakte fouten (bijv. door de eigen werkwijze te vergelijken met die van anderen, aangeven waarom iets fout gegaan is) en hoe die kunnen vermeden worden.

Belangrijk is te beseffen dat *tijdens het leerproces* zelf al sterk kan bijgedragen worden tot het realiseren van leervaardigheden. Zo kan een leerproces waarin de leerling actief betrokken wordt bij het bevragen van de leerinhouden, die leerling leren 'vragen stellen'. Het 'analyseren' van een definitie of eigenschap in de klas ondersteunt het analyseren tijdens het instuderen. Het gebruik van een ordelijk bordschema met het geëxpliciteerd (niet automatisch) gebruik van verdiepingstechnieken (kleur, kaders, structuur) zal leerlingen aanzetten dit te doen. Het vergelijken van het bordschema met de neerslag van de leerstof in het leerboek (veel meer dan het aanduiden van de leerstof) en het wijzen op de vormkenmerken ervan ondersteunt het leren. Het hernemen van de structuur bij de aanknopingsfase van de les, het laten raadplegen van overzichten van leerinhouden (bijv. samenvatting in het leerboek en/of in een beschikbaar of eigenhandig aangelegd vademecum) zal hen telkens opnieuw confronteren met structurering en synthese van hun kennis en hen meteen leren hun voorkennis zelfstandig op te zoeken en aan te vullen. De wijze waarop de leerkracht omgaat met fouten en deze aangrijpt als leerkansen, kan leerlingen de waarde leren van het onderzoeken van hun fouten. De wijze waarop leerlingen betrokken worden bij het leerproces kan hun zelfwerkzaamheid en hun verantwoordelijkheid voor het eigen leren versterken.

5.1.2 Attitudes

LEERPLANDOELSTELLINGEN

De leerlingen ontwikkelen

7	zin voor nauwkeurigheid en orde, o.m. - een houding van gecontroleerd uitwerken en terugkijken op uitgevoerde opdrachten.	9
8	zin voor helderheid, bondigheid, volledigheid, eenvoud en doelmatigheid van de gebruikte wiskundetaal, o.m. - de ervaring dat gegevens uit een probleemstelling toegankelijker worden door ze doelmatig weer te geven in een geschikte wiskundige representatie.	9
9	kritische zin, o.m. - een kritische houding tegenover de eigen berekeningen, beweringen, handelingen, ...; - een reflectieve houding ten aanzien van gemaakte keuzen voor representatie en oplossingstechnieken; - een kritische houding tegenover de mogelijkheden en de beperkingen van het gebruik van wiskunde.	5 6 8 9 17
10	zelfvertrouwen, zelfstandigheid, doorzettingsvermogen en doelmatigheid bij het aanpakken van problemen en opdrachten.	9

11	zelfregulatie, o.m. - een onderzoeksgerichte houding ten aanzien van feiten, opgaven en problemen; - het oriënteren, plannen, uitvoeren en bewaken van een oplossingsproces.	1 9
12	zin voor samenwerking en overleg, o.m. - de ervaring dat ze hun mogelijkheden kunnen vergroten door samenwerking met anderen; - appreciatie voor een andere oplossing of aanpak.	
13	waardering voor wiskunde door inzicht in de bijdrage ervan in de culturele, historische en wetenschappelijke ontwikkeling, o.m. - zin voor verwondering en bewondering voor de elegantie van een redenering of een oplossing.	7

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Doorheen de wiskundevorming kunnen leerlingen een aantal attitudes en in het bijzonder leerattitudes verwerven. Omdat zoals bij leervaardigheden het de leerling is die attitudes moet verwerven, zal over de vakken heen een zekere eenvormigheid nagestreefd worden en moet de bijdrage van wiskunde *kaderen in een bredere attitudevorming in de school*.

Het is belangrijk te beseffen dat attitudes maar bereikt worden doorheen een *proces van langere duur*. Daarom zullen attitudes ook in de derde graad nog nagestreefd worden.

7 ZIN VOOR NAUWKEURIGHEID EN ORDE

Zin voor nauwkeurigheid en orde kan nagestreefd worden bij de ontwikkeling van reken-, meet- en tekenvaardigheid. De leerlingen moeten beschikken over de gewoonte op hun uitvoeringsproces terug te kijken als een vorm van *controle*. Ze kunnen zo vlugger tot nauwkeurige resultaten komen.

Omdat de graad van complexiteit van de wiskunde en de opdrachten toeneemt, moet nauwkeurigheid nagestreefd worden bij het gebruik van notaties en symbolen, bij het verwoorden van definities en eigenschappen (zowel schriftelijk als mondeling). Het leerproces in de klas moet voldoende kansen bevatten om terugkoppeling te geven over antwoorden en oplossingen van leerlingen zelf. Het is precies in het toetsen van hun onvolmaakte antwoord dat de leerlingen de kans krijgen het te corrigeren.

Ordelijk en systematisch werken is een belangrijke leerhouding. Ze kan bijvoorbeeld bijgebracht worden bij het noteren, het maken van oefeningen en het aanpakken van problemen.

8 ZIN VOOR KWALITEIT VAN DE WISKUNDIGE REPRESENTATIE

Leerlingen moeten hun gedachten en hun inzicht behoorlijk leren verwoorden. Het leerproces in de klas moet daartoe voldoende kansen bieden. Vanuit de vaak intuïtieve verwoording in de fase van de begripsvorming of het vermoeden van een eigenschap moeten de leerlingen geleidelijk aan een correcte wiskundetaal hanteren. Een wiskundige formulering is vaak helder, bondig en van alle ballast ontdaan. De leerlingen kunnen hierbij ervaren dat het gebruik van dergelijke formuleringen vaak het denkproces helder doet verlopen. Ligt de beknoptheid van symbolische formuleringen voor de hand, dan is een behoorlijke verwoording ervan vaak een probleem. Dit vraagt bijzondere aandacht.

Omdat een zoekproces soms met vraag en antwoord, met gissen en missen en dus niet rechtlijnig ontwikkeld wordt, zal eens het doel bereikt, de uiteindelijke redenering synthetiserend overlopen worden, om een helder inzicht te bekomen. Voor leerzwakke leerlingen biedt dit vaak de gelegenheid terug aan te pikken. Ook bij het oplossen van problemen zal aandacht besteed worden aan het overhouden van een duidelijke synthese. Een heldere oplossing zal meestal overzichtelijk zijn en gemakkelijker te begrijpen. Zowel bij het leerproces van de wiskundige inhouden zelf, als bij het oplossen van problemen zal men bij het synthetiserend overlopen aandacht besteden aan de doelmatigheid van een aanpak door de voor- en nadelen van bepaalde werkwijzen te bespreken.

9 KRITISCHE ZIN

Wiskundevorming moet leiden tot een bevragende, onderzoekende, controlerende, verifiërende houding. Dit wil zeggen dat berekeningen (zowel bij hoofdrekenen en schriftelijk rekenen als bij het gebruik van een rekenmachine), beweringen, argumenten en redeneringen niet zomaar worden aanvaard en overgenomen. Dit slaat op vermoedens, oplossingstechnieken, redeneringen door leerlingen in de klasgroep gebracht ter bespreking. Dit slaat op de zelf gekozen modellen of representaties en op de eigen berekeningen, oplossingen en redeneringen. Bij de keuze van een model of bij een berekening, een redenering, een oplossing van een probleem is zowel het proces als het eindproduct van belang. Oog krijgen voor de oplossingsmethode kan leiden tot het leren waarderen van andere oplossingen. Zo kunnen de leerlingen een werkwijze of methode leren waarderen omdat ze eenvoudiger is, minder tijd vraagt, wiskundig helder geformuleerd is, sneller veralgemening toelaat.

Omwille van de plaats die wiskunde inneemt in de vorming (basisvorming versus fundamentele vorming) is het evident dat de verwachtingen ten aanzien van leerlingen hoger mogen liggen, naarmate ze een groter aantal lestijden wiskunde per week hebben. Naarmate men doordringt in de wiskundekennis moet ook de bevragende, onderzoekende, controlerende, verifiërende houding groeien. Ze is onmisbaar bij de verdere ontwikkeling van wiskunde. Gelukkig doen zich ook meer kansen voor om ze te ontwikkelen.

Belangrijk is dat deze onderzoekende houding herkenbaar is in het didactische optreden van de leerkracht. Zowel de aanbreng van nieuwe leerinhouden als het toepassen van kennis en het oplossen van problemen bieden kansen tot stimulerende klassengesprekken. Leerlingen zullen maar oog krijgen voor het oplossings'proces', als hieraan ook tijdens het onderwijsleerproces voldoende aandacht besteed wordt en als ze bijvoorbeeld gestimuleerd worden verschillende oplossingen of antwoorden te vergelijken.

Doorheen het ontwikkelen van een dergelijke kritische houding worden leerlingen geconfronteerd met de mogelijkheden en de beperkingen van het gebruik van wiskunde in de praktijk. Dat is een belangrijke houding voor wiskundegebruikers, die de meeste leerlingen in de toekomst zullen zijn. Een gezonde relativering naast de verwondering over de mogelijkheden van de wiskunde kan bij leerlingen leiden tot een gemotiveerde, evenwichtige opvatting over wiskunde.

10 ZELFVERTROUWEN EN ZELFSTANDIGHEID

Bij vaardigheden werd uitvoerig ingegaan op het aanpakken van problemen. Het is niet moeilijk in te zien dat het verwerven van probleemoplossende vaardigheden een uitgelezen kans biedt om zelfwerkzaamheid en doorzettingsvermogen te verwerven.

Een goede aanpak van deze leerprocessen zal de leerlingen een solide basis geven waarop zij kunnen terugvallen. Succeservaring zal daarbij het zelfvertrouwen en de motivatie van leerlingen onderbouwen. Wiskundig minder begaafde leerlingen geraken snel ontmoedigd als ze geen succes kennen. Ze moeten aangezet worden eenzelfde stap meermaals te hernemen. In een gedifferentieerde aanpak kunnen oefeningen zo aangeboden worden, dat voor die leerlingen de stappen niet te groot zijn. Voor anderen kan geopteerd worden voor een meer open vorm van aanbieden, zodat ze leren zelf een probleem te ontdekken en te stellen.

Het is evident dat leerlingen fouten zullen maken. In een te uitsluitend cognitief gewaardeerd leerproces worden leerzwakke leerlingen daardoor wel eens benadeeld. Het is belangrijk in te zien dat fouten maken inherent deel uitmaakt van het (wiskundig) leerproces. Een goede leerkracht zal deze aanwenden als belangrijke leerkansen. Een aanmoedigende en respectvolle benadering zal leerlingen zeker stimuleren en uiteindelijk leiden tot betere resultaten.

11 ZELFREGULATIE

Bij het oplossen van problemen moeten de leerlingen over een goede kennisorganisatie beschikken en zoekstrategieën kunnen hanteren. Daarnaast moeten ze hun zoeken en werken gecontroleerd uitvoeren. Dit betekent dat ze zelf hun werk kunnen 'reguleren'. Dit houdt onder meer in dat ze hun resultaat toetsen (bijv. bij een rekenresultaat zowel op juistheid als op realiteitswaarde). Het is echter niet alleen aan het einde van het proces dat 'controle' nodig is. Die kan van bij de aanvang in het oplossingsproces opgenomen worden. Van bij de verkenning van het probleem (de oriëntatie), bij het opmaken van een uitvoeringsplan en bij de uitvoering zelf kan stapsgewijze gewerkt worden en kan elke stap gecontroleerd worden. Zo leidt het aanpakken van problemen tot een onderzoeksgerichte houding en tot methodisch, planmatig en gecontroleerd werken. Bij het opzetten van een redenering, bij het verklaren van een eigenschap kunnen dezelfde regulatietechnieken gevolgd worden.

Het is evident dat leerlingen deze houding maar geleidelijk aan zullen verwerven en dat dit gemakkelijker zal gaan, naarmate deze houding tijdens de leerprocessen in de klas aan bod komt in de werkwijze van de leerkracht.

Met het ontwikkelen van een dergelijke onderzoeksgerichte houding kan wiskunde bijdragen tot een meer algemene vorming. Ze kan overgedragen worden op het aanpakken van andere dan wiskundige problemen. Zo kan ze ondermeer leiden tot de leerhouding van methodisch, planmatig en gecontroleerd werken. Op deze wijze kan wiskunde bijdragen tot het verwerven van een kritische houding ten aanzien van het globale eigen denken en handelen.

12 ZIN VOOR SAMENWERKING EN OVERLEG

Een onderwijsleerproces waaraan de leerlingen volwaardig en actief kunnen deelnemen, waarin ze hun bevindingen en hun oplossingen kunnen vergelijken en toetsen aan die van anderen, kan hen een positieve waardering bijbrengen voor samenwerking en overleg. Bij het bespreken van oplossingsmethoden, bij het kritisch onderzoeken van elkaars oplossing kan waardering voor elkaars mening aangeleerd worden en daardoor waardering voor de persoon van de andere zelf.

Bij het uitvoeren van een aantal opdrachten, bijv. het oplossen van bepaalde (ruimer gestelde) problemen, het opzoeken van allerlei historische gegevens, het opzoeken op het internet over wiskundigen, belangrijke wiskundige stellingen, wiskundige illustraties of toepassingssituaties kan de samenwerking gestimuleerd worden door de opdrachten in groep te laten afwerken. Zo kunnen leerlingen aangezet worden tot samenwerking en overleg.

13 WAARDERING VOOR WISKUNDE

Wiskundevorming staat niet los van die van de andere vakken. Wiskunde zelf is doorheen de eeuwen ontwikkeld precies in samenhang met de opvattingen en de problemen van die tijd. Een aantal historische contexten bieden vandaag nog een zinvolle instap om bepaalde wiskundeproblemen en leeronderdelen aan te pakken. Daarom zal die historische context geïntegreerd worden in de aanpak.

Een meer realistische aanbreng en voldoende concrete toepassingen moeten er borg voor staan dat de ontwikkeling van wiskunde bij de leerlingen niet los staat van de wereld rondom hen. Anderzijds biedt wiskunde zelf heel wat kansen om door te dringen tot de essentie van bepaalde problemen en situaties. Door een beter begrijpen kan de verwondering en de bewondering voor de context groeien. De elegante wijze waarop met behulp van wiskunde problemen beschreven en opgelost worden kan op zich al verwondering wekken.

5.2 INHOUDELIJKE DOELSTELLINGEN

5.2.1 Grafisch onderzoek van functies

Aanbeveling lestijden: ***ca. 10 lestijden***

Dit onderwerp bevat doelstellingen die een deel van de leerinhouden beschrijven zoals ze opgenomen werden in de eindtermen (cf. verloop, periodiciteit, symmetrie, …). Deze doelstellingen kunnen afzonderlijk behandeld worden en slechts tot op het niveau zoals beschreven in de eindtermen. Maar vermits de wiskundevorming van deze leerlingen uitgebreider is dan het in de eindtermen voorziene minimale niveau, worden deze leerinhouden meestal ook uitgebreider opgenomen in een van de andere keuzeonderwerpen. De doelstellingen van dit onderdeel kunnen daarom best in die andere onderdelen geïntegreerd aan bod komen.

BEGINSITUATIE

De volgende leerinhouden in verband met functies werden voor alle leerlingen behandeld in de tweede graad.

- Expliciteren en interpreteren van algebraïsche verbanden tussen grootheden, als dat gegeven wordt met behulp van een tabel, een grafiek, een formule (o.m. waarden aflezen, extreme waarden aflezen, het globale verloop bespreken).
- Functies van de eerste graad in één veranderlijke (grafiek, nulpunt, tekenverandering) met inbegrip van het oplossen van vraagstukken met vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste graad in één onbekende en stelsels van vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.

In studierichtingen met *uitsluitend* leerlingen die in de tweede graad wiskunde op basis van leerplan a, b of c gevolgd hebben, behoort het onderwerp tweedegraadsfuncties tot de vooropleiding. Deze leerlingen hebben ook kennis gemaakt met enkele elementaire functies met voorschriften zoals $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$ en $f(x) = \frac{1}{x}$.

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

BASISDOELSTELLINGEN

GO1	Vragen beantwoorden i.v.m. probleemsituaties waarvan het functioneel verband gegeven is of de functionele verbanden gegeven zijn.	13
GO2	Van grafieken eventueel aangevuld met tabellen, afgeleid uit concrete situaties, nulpunten, tekenverloop, symmetrieën, het stijgen en dalen binnen een interval en extrema van een functie afleiden.	10
G03	Grafieken tekenen van enkele eenvoudige functies (mede met behulp van ICT).	11
GO4	Uit grafieken en tabellen het staartgedrag van een functie afleiden.	
GO5	Periodieke verschijnselen onderzoeken.	10
GO6	Lineaire en exponentiële groeiprocessen onderzoeken.	10

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Bij wiskundevorming moeten leerlingen een aantal concepten en denkprocessen begrijpen en beheren. Functieleer kan gezien worden als een studie van het beschrijven van relaties en verbanden die met behulp van een functie kunnen uitgedrukt worden. Functies zijn dan ‘modellen’ die een deeltje van de werkelijkheid weergeven, m.n. hoe twee grootheden, meestal binnen bepaalde grenzen, ten opzichte van elkaar evolueren (bijv. evolutie in de tijd van een kapitaal, een hoeveelheid, evolutie van een oppervlakte, een inhoud in functie van een afmeting).

De ‘functies’ waarmee leerlingen in de praktijk geconfronteerd worden, komen uit kranten, tijdschriften, eventueel vaktijdschriften, handleidingen van machines, …. Die worden meestal gepresenteerd onder de vorm van een *grafiek*, eventueel aangevuld met een *tabel* van belangrijke waarden. De leerlingen moeten van deze grafiek informatie kunnen aflezen en op een zinvolle wijze interpreteren, de informatie uit tabel en uit grafiek samenbrengen en onderling vergelijken en eventueel bijkomende informatie afleiden uit de gegeven elementen. Dit is een gelegenheid om de begrippen zoals nulpunt, tekenverloop, stijgen en dalen binnen een interval, maximum, minimum, … te herhalen en eventueel naargelang de beginsituatie uit te breiden of beter te omschrijven.

Het functievoorschrift dat voortvloeit uit de concrete probleemsituaties of vraagstukken wordt in deze fase gegeven en nog niet door de leerling opgesteld. Het gegeven functievoorschrift wordt omgezet in een grafiek d.m.v. ICT. Met behulp van deze grafiek en van ICT worden vragen i.v.m. de gegeven situatie beantwoord. Belangrijk is o.a. dat de leerlingen de concrete begrenzing kunnen bepalen van een gegeven situatie.

Leerlingen moeten er zich goed van bewust zijn dat het aflezen van een grafiek steeds gebeurt binnen een bepaald venster (ligging oorspong, eenheden, …; gegeven gedeelte is soms te beperkt om veralgemeningen naar waarden of gedrag buiten het venster toe te laten).
Bijzondere waarden die niet duidelijk af te lezen zijn, kunnen benaderd worden door middel van ICT (grafisch uitvergroten).
Met extreme waarden worden niet alleen deze bedoeld waarbij de raaklijn aan de kromme horizontaal loopt. Binnen een interval kunnen andere vormen van extreme waarden zich voordoen.
De voornaamste symmetrieën die onderzocht worden zijn deze t.o.v. de y-as en de oorsprong.

Een intuïtief begrip van limiet is hier al bereikbaar voor leerlingen. Dit kan zowel grafisch als door middel van tabellen onderzocht worden. Vooral deze voor onbeperkt toenemende (absolute) waarden van de onafhankelijk veranderlijke komen hier aan bod. In de tabel kan vastgesteld worden of de toename van de afhankelijk veranderlijke ook onbeperkt verloopt, of dat deze veranderlijke evolueert naar een bepaalde ‘vaste waarde’. Het staartgedrag van een functie op de grafiek sluit hierbij nauw aan. In deze fase is het niet de bedoeling dat de vergelijking van een asymptoot al bepaald wordt.

Periodieke verschijnselen die kunnen onderzocht worden zijn o.a. eb en vloed, in- en uitademen, zaagtand, dierenpopulatie, elektrocardiogram, bioritme, getalperioden. Het onderzoek van deze verschijnselen gebeurt bij voorkeur vanuit de grafische voorstelling.

Lineaire groei werd al bestudeerd bij de studie van recht evenredige grootheden en van eerstegraadsfuncties. Een korte herhaling kan volstaan.
Voorbeelden van exponentiële groeiprocessen zijn o.a. bevolkingsaangroei, kapitaalsvorming bij samengestelde interest, afname van radioactieve massa, bacteriecultuur, demping van geluid, vrijgekomen energie bij een aardschok. Als het onderwerp ‘Exponentiële functies’ gekozen wordt, kan men deze voorbeelden beter daar geïntegreerd behandelen.

UITBREIDINGSDOELSTELLINGEN

GO7	De samenstelling onderzoeken van eenvoudige algebraïsche functies.
GO8	De invloed van het verschuiven van een assenstelsel op een functievoorschrift onderzoeken.
GO9	Het verband bespreken tussen de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^3$ en $g(x) = \sqrt[3]{x}$ en naar analogie, tussen de functies $f(x) = x^n$ en $g(x) = \sqrt[n]{x}$.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Bij het samenstellen van functies beperkt men zich tot het samenstellen van bijvoorbeeld een eerstegraadsfunctie met functies van de vorm $f(x) = x^n$, $f(x) = \sqrt{x}$ en $f(x) = \frac{1}{x}$. Men legt hierbij het verband tussen de kenmerken van de samengestelde functie en deze van de functies waaruit ze is samengesteld.

In de wiskunde tracht men het voorschrift van een functie in zijn meest eenvoudige vorm te noteren. Verschuiven van assenstelsels is hierbij een hulpmiddel. Zo kan men aantonen dat op deze wijze elke eerstegraadsfunctie kan herleid worden naar de vorm $f(x) = ax$, elke tweedegraadsfunctie naar de vorm $f(x) = ax^2$, elke homografische functie naar de vorm $f(x) = \frac{a}{x}$ en elke functie van de vorm $f(x) = \sqrt{ax+b}$ naar de vorm $f(x) = \sqrt{ax}$. Het verband met het verschuiven van functies ligt hier voor de hand.

Bij het bespreken van het verband tussen de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^3$ en $g(x) = \sqrt[3]{x}$ en $f(x) = x^n$ en $g(x) = \sqrt[n]{x}$ kan de aandacht gevestigd worden op het symmetrische gedrag van deze functies t.o.v. de bissectrice van het eerste kwadrant en op de vaststelling dat de inverse van een functie niet steeds een functie is, tenzij het domein beperkt wordt.

5.2.2 Functies van de tweede graad

Aanbeveling lestijden: ***ca. 18 lestijden***

BEGINSITUATIE

De volgende leerinhouden in verband met functies werden voor alle leerlingen behandeld in de tweede graad.

- Rekenen met reële getallen in verschillende vormen, waarbij het verwerken ervan in vraagstukken het uiteindelijke hoofddoel is.
- Expliciteren en interpreteren van algebraïsche verbanden tussen grootheden, als dat gegeven wordt met behulp van een tabel, een grafiek, een formule (o.m. waarden aflezen, extreme waarden aflezen, het globale verloop bespreken).
- Functies van de eerste graad in één veranderlijke (grafiek, nulpunt, tekenverandering) met inbegrip van het oplossen van vraagstukken met vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste graad in één onbekende en stelsels van vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.

In studierichtingen met *uitsluitend* leerlingen die in de tweede graad wiskunde op basis van leerplan a, b of c gevolgd hebben, behoort dit onderwerp tot de vooropleiding.

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

BASISDOELSTELLINGEN

FT1	De grafiek van $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ opbouwen vanuit de parabool met vergelijking $y = x^2$ en daarbij de top en de as van de grafiek bepalen.
FT2	De nulpunten van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ bepalen en grafisch interpreteren.
FT3	De grafiek van een tweedegraadsfunctie tekenen gebruik makend van top, as, ...
FT4	Het verloop van een tweedegraadsfunctie onderzoeken.
FT5	Vraagstukken oplossen die aanleiding geven tot een vergelijking van de tweede graad in één onbekende of waarbij het verband beschreven wordt door een tweedegraadsfunctie.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerlingen hebben het functiebegrip verworven door het onderzoeken van verbanden in concrete situaties. Functies zijn dan *modellen* die een deeltje van de realiteit beschrijven, m.n. hoe twee grootheden ten opzichte van elkaar evolueren. De functie wordt dan beschreven door middel van een omschrijving, een grafiek, een tabel of een voorschrift. Leerlingen hebben geleerd in deze situaties (zo mogelijk) concrete karakteristieken (nulpunt, teken, stijgen, dalen, …) af te lezen en te interpreteren. Als interessant model werd specifiek de eerstegraadsfunctie onderzocht. De tweedegraadsfunctie past in ditzelfde kader, als een bijkomend (niet-lineair) model.

Het begrip *tweedegraadsfunctie* kan verklaard worden vanuit een aantal betekenisvolle voorbeelden waarvoor de tweedegraadsfunctie het accurate beschrijvingsmodel is (bijv. valbeweging). De relaties tussen de vier elementen die een functie bepalen (situatie, tabel, grafiek, voorschrift) worden besproken.

De grafiek van de functie kan in deze fase al met een *punt voor punt constructie* getekend worden. Het gebruik van ICT kan de beeldvorming ondersteunen. Bij de punt voor punt constructie moeten leerlingen wel inzien dat uitgezette punten niet met lijnstukken verbonden kunnen worden omdat de grafiek een zekere kromming vertoont.

Met de moderne technologie kan vrij snel de grafiek van een tweedegraadsfunctie bekomen worden. Dit zou er toe kunnen leiden minder aandacht te besteden aan de ontwikkeling ervan. Daartegenover staat dat het *proces* waarin de grafiek in een aantal stappen ontwikkeld wordt vanaf de parabool met vergelijking $y = x^2$ met behulp van transformaties een rijk inzicht geeft in de samenhang tussen de grafieken onderling en tussen de grafieken en hun voorschrift. Dit inzicht wordt nog altijd nagestreefd. Uiteraard wordt bij dit onderzoek gebruikt gemaakt van ICT.

Leerlingen hebben in hun vooropleiding het verband gezien tussen de coördinaten van punten die symmetrisch liggen t.o.v. een as. Dit kan hier gebruikt worden om de naam 'as' te verantwoorden.
De letters α en β krijgen betekenis in de coördinaten waarmee de *as* en de *top* worden beschreven. Het proces waarin de grafiek van de tweedegraadsfunctie ontwikkeld wordt vanuit de parabool met vergelijking $y = x^2$ met behulp van transformaties, leidt stapsgewijze tot de voorstelling van functies met een voorschrift van de vorm $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Daaruit volgt op natuurlijke wijze de vraag of een tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2 + bx + c$ tot dergelijke vorm terug te brengen is. Dit leidt tot de berekening van de relaties tussen a, b en c enerzijds en α en β anderzijds en tot het inzicht dat elke tweedegraadsfunctie met voorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ voorgesteld wordt door een parabool.

Door een verticale verschuiving kan de grafiek mogelijk snijpunten hebben met de eerste coördinaatas. De bespreking hiervan leidt tot de voorwaarden op discriminant en tot de formules voor *het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen* of voor het bepalen van de nulpunten van tweedegraadsfuncties.
Uit de voorgaande redeneringen kan de formule afgeleid worden voor een algemeen algoritme op voorwaarde dat de discriminant positief is.
Het opstellen van deze formule behoort *niet* tot de *te toetsen* leerinhouden. Men zal de leerlingen wijzen op een niet verantwoord gebruik van de formule bij het oplossen van vergelijkingen van de vorm $ax^2 + bx = 0$ en $ax^2 + c = 0$.

Bij het *manueel construeren* van parabolen zal toch zorg besteed worden aan een behoorlijke kwaliteit van de grafiek (vloeiende vorm, geen tulpvorm). Daarom is het aan te raden zich niet te beperken tot het bepalen van de nulpunten, de top en het snijpunt met de y-as. Het berekenen van enkele bijkomende punten bevordert de nauwkeurigheid. Controle d.m.v. ICT is aan te bevelen.

Het *onderzoeken van de grafiek* van een tweedegraadsfunctie leidt tot de gebruikelijke inzichten in de tekenverandering, het stijgen en dalen van de grafiek en het herkennen van een extreme waarde bij de top. Het onderzoek van een aantal situaties kan tot het inzicht leiden dat een tweedegraadsfunctie volledig vastgelegd wordt door bepaalde voorwaarden (bijv. top en punt gegeven; drie punten gegeven) en door andere niet (bijv. twee nulpunten gegeven; as en een punt gegeven). De leerlingen kunnen hier geconfronteerd worden met de werkwijze van de 'onbepaalde coëfficiënten'. Een verdere toepassing is dat leerlingen op grond van een gegeven grafiek zelf een aantal voorwaarden bepalen waarmee ze het voorschrift kunnen opstellen.

De tweedegraadsfunctie en de tweedegraadsvergelijking hebben een ruim toepassingsgebied. Een aantal concrete situaties kan hier de toepassing van wiskunde in allerlei gebieden illustreren. Hier liggen veel kansen om de leerlingen *probleemoplossende vaardigheden te laten verwerven*, zoals het leren een probleem om te zetten naar een wiskundige vorm, het gepast kiezen van een onbekende, het uitvoeren van oplossingstechnieken en het interpreteren van resultaten. Het oplossen van vraagstukken op tweedegraadsfuncties komt vaak neer op het oplossen van een vierkantsvergelijking. Daarnaast zouden ook andere vragen aan bod moeten komen, zoals de vraag naar het stijgen of dalen van de functie of het bereiken van een extremum. Ook hier is het zinvol de vraagstukken niet in geïsoleerde lessen aan te bieden, maar ze te integreren als toepassingen op de leerinhouden.

Vraagstukken kunnen op verschillende niveaus behandeld worden, afhankelijk van de aard of de moeilijkheidsgraad van de toepassingen, de mogelijkheden daartoe binnen de studierichting, de mogelijkheden van de leerlingen (voorkennis, niveau van rekenvaardigheden of probleemoplossende vaardigheden).

- Men formuleert het vraagstuk, waarbij een welbepaalde probleemstelling, bijv. vergelijking oplossen of extremum bepalen, mee geëxpliciteerd wordt. De leerlingen moeten de vergelijking oplossen of het extremum berekenen en een antwoord formuleren en dat interpreteren in de gegeven situatie.
- Men formuleert het vraagstuk en aan de leerlingen wordt gevraagd zelf de bijbehorende vergelijking op te stellen of het functievoorschrift te bepalen en een opgegeven karakteristiek ervan te onderzoeken.
  Het bijkomende is dat leerlingen zelf de vergelijking of het functievoorschrift opstellen. Het is ook zinvol eerst afzonderlijke oefeningen te maken op deze moeilijkheid.
- Men formuleert het vraagstuk en geeft de bijbehorende functie en grafiek (al of niet met behulp van ICT). De leerlingen moeten allerlei vraagjes beantwoorden in verband met de context.
  Het bijkomende is dat de leerlingen uit de vraagjes moeten afleiden welke karakteristiek moet onderzocht worden. Ook dit kan weer eerst afzonderlijk geoefend worden.
- Men formuleert het vraagstuk en de leerlingen moeten zelf de veranderlijke of onbekende kiezen en de vergelijking opstellen (al of niet geleid door tussenvraagjes of een schema), deze vergelijking oplossen en het antwoord formuleren en interpreteren.
  Het bijkomende is dat de leerlingen zowel de te onderzoeken karakteristiek moeten bepalen, als het functievoorschrift of de vergelijking moeten opstellen.

5.2.3 Afgeleiden van veeltermfuncties

Aanbeveling lestijden: ***ca. 30 lestijden***

BEGINSITUATIE

De volgende leerinhouden in verband met functies werden behandeld bij alle leerlingen.

- Expliciteren en interpreteren van algebraïsche verbanden tussen grootheden, als dat gegeven wordt met behulp van een tabel, een grafiek, een formule (o.m. waarden aflezen, extreme waarden aflezen, het globale verloop bespreken).
- Functies van de eerste graad in één veranderlijke (grafiek, nulpunt, tekenverandering) met inbegrip van het oplossen van vraagstukken met vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste graad in één onbekende en stelsels van vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.

In studierichtingen met *uitsluitend* leerlingen die in de tweede graad wiskunde op basis van leerplan a, b of c gevolgd hebben, behoort het onderwerp tweedegraadsfuncties tot de vooropleiding. Deze leerlingen hebben ook kennis gemaakt met enkele elementaire functies met voorschriften zoals $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$ en $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

In een aantal studierichtingen die aansluiten op het leerplan d van de tweede graad (in casu ‘Creatie en Mode’, ‘Sociale en Technische Wetenschappen’ en ‘Architecturale en Binnenhuiskunst’) zijn tweedegraadsfuncties, de deling van veeltermen, de reststelling en de regel van Horner geen verworven leerinhouden. Voor een aantal leerlingengroepen is het tweede onderwerp van dit leerplan wel een verplicht onderdeel, zodat de tweedegraadsfuncties hierbij kunnen behandeld zijn. Voor deze leerlingen is het echter ook mogelijk de studie van de tweedegraadsfuncties te integreren in dit onderdeel veeltermfuncties.

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

1 INLEIDING

BASISDOELSTELLINGEN

VF1	De nulpunten van een veeltermfunctie, die hoogstens van de derde graad is, berekenen.
VF2	De nulpunten van een veeltermfunctie bepalen met behulp van ICT.
VF3	Het tekenverloop van een veeltermfunctie bepalen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de studierichtingen die aansluiten op het leerplan d van de tweede graad kunnen de deling van veeltermen, de reststelling en de regel van Horner ingepast worden als voorbereiding op een uitgebreidere behandeling van veeltermfuncties. Toch moet men beseffen dat de tijd die hieraan kan besteed worden zeer beperkt is. Het heeft geen zin te investeren in lange rijen automatiseringsoefeningen van technieken die de leerlingen toch niet zullen gebruiken.
Bij het bepalen van quotiënt en rest bij een deling van twee veeltermen wordt het deeltal bij voorkeur beperkt tot een veelterm hoogstens van de derde graad en in één variabele.
Als mogelijke toepassing op de reststelling is het berekenen van een waarde van een parameter in de veelterm in functie van bepaalde voorwaarden (bijv. deelbaarheid door een bepaalde factor).
De regel van Horner wordt aangebracht als verkorte vorm voor de deling door $x - a$, zonder te vervallen in overmatig rekenwerk.

Een functievoorschrift dat voortvloeit uit vraagstukken, contexten of probleemsituaties wordt in deze beginfase gegeven en nog niet door de leerling opgesteld. Het functievoorschrift wordt omgezet in een grafiek d.m.v. ICT. Met behulp van de grafiek worden vragen i.v.m. de gegeven situatie beantwoord. Daarbij moet men er zich goed van bewust zijn dat het aflezen van een grafiek steeds gebeurt binnen een bepaald interval. Het veranderen van het uitleesvenster kan dit illustreren. Een tabel van functiewaarden kan worden opgeroepen en bijzondere waarden kunnen worden afgelezen. Belangrijk is o.a. dat de leerlingen de concrete begrenzing kunnen bepalen van een gegeven situatie.

Het bepalen van nulpunten kan door manuele berekening of door middel van ICT. De leerlingen beschikken wellicht niet over sterk ontwikkelde algebraïsche vaardigheden. Toch zal men er over waken dat in evidente gevallen niet automatisch de machine wordt ingeschakeld.

Praktische situaties leiden niet altijd tot mooi ontbindbare veeltermfuncties. In de praktijk zal men de leerling daartoe *leren* werken met ICT. Belangrijk is dat de leerlingen deze werkwijze ook effectief kunnen gebruiken bij reële toepassingssituaties. Overleg met de technische en/of praktijkgerichte vakken is hier aangewezen.

2 AFGELEIDEN

BASISDOELSTELLINGEN

VF4	Veranderingen over een interval beschrijven en vergelijken met behulp van differentiequotiënten.
VF5	Met behulp van een intuïtief begrip van limiet het verband leggen tussen het begrip afgeleide, het begrip differentiequotiënt en de richting van de raaklijn aan de grafiek.
VF6	De afgeleide berekenen van de functies $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ en de bekomen uitdrukking

	veralgemenen naar functies van de vorm $f(x) = x^n$, waarbij n een van nul verschillend natuurlijk getal is.
VF7	De afgeleide functie van een veeltermfunctie berekenen.
VF8	De afgeleide herkennen in situaties binnen en buiten de wiskunde, o.m. de afgeleide in een punt gebruiken als maat voor een ogenblikkelijke verandering.
VF9	De betekenis van de afgeleide functie gebruiken om te bepalen - in welke intervallen een functie stijgt of daalt, - voor welke waarde(n) een functie een extremum bereikt.
VF10	De vergelijking opstellen van een raaklijn in een punt aan de grafiek van een veeltermfunctie.
VF11	Vraagstukken oplossen waarbij het begrip afgeleide gebruikt wordt.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De voornaamste algemene doelstellingen bij de studie van het begrip afgeleide bij veeltermfuncties zijn:
- een betekenisvolle ontwikkeling van het begrip nastreven;
- dit begrip gebruiken bij de studie van de grafiek;
- het begrip toepassen om in een probleemstelling bijzondere waarden en veranderingen op te zoeken.

Het begrip afgeleide moet in essentie gekoppeld worden aan het beschrijven van verandering.
- Het begrip differentiequotiënt wordt gebruikt als maat voor de gemiddelde verandering over een interval.
- Door onbeperkt inkrimpen van het interval (met als uiterste grens ‘een punt’) ontstaat het idee van een maat van ‘ogenblikkelijke’ verandering in dat punt. De bekomen ‘limietwaarde’ is de afgeleide van de functie in dat punt.
- Bij dit proces kan gelijktijdig de meetkundige interpretatie uitgewerkt worden: de richtingscoëfficiënt van de snijlijn die de gemiddelde verandering aangeeft, evolueert binnen een interval [a,a+x] naar de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt (a,f(a)) van de kromme. Daardoor is het verband gelegd tussen de afgeleide in een punt van een kromme en de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in dat punt van de kromme.
- Tenslotte is het zinvol voor verder gebruik van dit definitieproces een synthese te geven in een ‘algebraïsche uitdrukking’.

Het begrip limiet kan onderbouwd worden met behulp van tabellen en grafieken (bij het naderen tot een bepaalde waarde van de onafhankelijk veranderlijke naderen ook de functiewaarden tot een bepaalde waarde). Zo kan geïllustreerd worden met getallen dat de limiet van een (continue) functie met voorschrift f(x) voor x gaande naar a gelijk is aan f(a). Daarnaast kan dezelfde werkwijze gebruikt worden om het gedrag op oneindig van een veeltermfunctie te illustreren.

Met behulp van de definitie van afgeleide in een punt worden de afgeleide functies berekend van de functies $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, ... Het bekomen verband wordt veralgemeend voor de functies $f(x) = x^n$, waarbij n een van nul verschillend natuurlijk getal is.

Het berekenen van de afgeleide functie van een veeltermfunctie is zo eenvoudig, dat het gebruik van ICT hierbij overbodig is. De leerlingen moeten hierbij dus de regels voor het afleiden gebruiken. De formules voor de afgeleide van een som of een verschil van functies en van veelvouden van functies moeten minstens plausibel gemaakt worden aan de hand van voorbeelden.

De afgeleide van een functie wordt traditioneel verbonden met het onderzoeken van het verloop van de functie en het bepalen van haar grafiek. In een tijd waarin enkele toetsaanslagen volstaan om de grafiek te bekomen moet men zich afvragen of deze hele investering nog loont. Alleszins zullen enkele voorbeelden ontwikkeld worden om de leerlingen inzicht te laten verwerven in het verband tussen de functie en haar eerste afgeleide. Mogelijkheden hierbij zijn o.a.:
- bij een gegeven aantal grafieken die grafiek bepalen die passend is als grafiek van de afgeleide functie bij een gegeven grafiek van een functie en omgekeerd;

- het tekenverloop van de eerste afgeleide bepalen als de grafiek van de functie gegeven is;
- de grafiek van de afgeleide functie bij een gegeven grafiek ruw schetsen en omgekeerd.

Het is belangrijk heel wat vraagstukken op te lossen waarbij het begrip afgeleide gebruikt wordt. In een eerste fase kan bij de gestelde context het voorschrift gegeven zijn. In een tweede fase kan men ook vragen het functievoorschrift, dat bij de context hoort, op te stellen. Bij deze vraagstukken mag men zich niet beperken tot het bepalen van extrema. Ook vragen naar stijgen, dalen, al of niet snel stijgen en dalen en het interval waarin het probleem zich situeert kunnen gesteld worden.

UITBREIDINGSDOELSTELLINGEN

VF12	De afgeleide van een product van veeltermfuncties berekenen.
VF13	De afgeleide van een macht van een veeltermfunctie berekenen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Men kan functies beschouwen die een product of een macht zijn van veeltermfuncties. Dan zal men de leerlingen ook best de afleidingsregels voor product en macht aanleren. Het is op termijn immers niet houdbaar dergelijke uitdrukkingen telkens voluit uit te rekenen. Deze regels worden met voorbeelden geïllustreerd en eventueel verklaard.

5.2.4 Integralen van veeltermfuncties

Aanbeveling lestijden: ***ca. 15 lestijden***

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

BASISDOELSTELLINGEN

VF14	Een primitieve functie bepalen van een veeltermfunctie.
VF15	Het verband kennen tussen het begrip bepaalde integraal van een functie en oppervlakten van gebieden bepaald door die functie en de horizontale as.
VF16	Het verband illustreren tussen het berekenen van een bepaalde integraal van een veeltermfunctie en een primitieve functie van die veeltermfunctie.
VF17	De oppervlakte bepalen van een gebied dat begrensd wordt door de grafiek van een veeltermfunctie, de horizontale as en twee verticalen.
VF18	Vraagstukken oplossen waarbij het begrip integraal gebruikt wordt.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Uitgaande van het feit dat de afgeleide van een primitieve functie F van een functie f de functie f zelf is, kan men gemakkelijk de berekeningswijze aantonen om een primitieve functie te bepalen van $f(x) = x^n$, $f(x) = ax^n$ en van een veeltermfunctie. Deze rekenregels zijn zo eenvoudig dat het gebruik van ICT overbodig is. De dx wordt beschouwd als een onderdeel van de notatie.

De oppervlakte van een gebied onder de grafiek van het positieve gedeelte van een veeltermfunctie wordt benaderd door de som van de oppervlakten van een aantal rechthoekjes. Deze oppervlakte kan zo dicht mogelijk benaderd worden als men wil door het aantal rechthoekjes te verhogen. Bij deze benadering is het gebruik van ICT aan te raden, zodat dit proces met een minimum aan voorbeelden toch snel en inzichtelijk kan verlopen.

De volgende stap is het verbinden van beide integraalbegrippen. Dat kan door middel van de hoofdstelling. Het verband wordt plausibel gemaakt in enkele concrete en eenvoudige gevallen. Zo kan de oppervlakte binnen een bepaald interval [a,b] tussen een rechte en de x-as op twee wijzen berekend worden: enerzijds de oppervlakte van een

rechthoek, driehoek of trapezium bepalen en anderzijds door $F(b) - F(a)$ te berekenen waarbij F een primitieve functie is van de lineaire functie die de rechte bepaald.
De nodige aandacht moet eveneens gaan naar het feit dat de begrippen oppervlakte en bepaalde integraal niet identiek zijn. Als de rechte onder de x-as loopt dan is de oppervlakte gelijk aan de absolute waarde van $F(b) - F(a)$. Om die reden moet men bij het bepalen van de oppervlakte van een gebied dat begrensd wordt door de grafiek van een veeltermfunctie nagaan welke nulpunten van die veeltermfunctie behoren tot het beoogde integratie-interval.

Voorbeelden van toepassingen zijn: afstand en snelheid bij eenparige beweging, arbeid, potentiële energie, marginaliteit in de economie, ...

UITBREIDINGSDOELSTELLING

VF19	De integraal van $f(x) = (ax + b)^n$ berekenen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Aansluitend bij de regels voor product en macht bij afgeleiden kan hier de integraal van een macht van een (eerstegraads)functie aan bod komen.

5.2.5 Exponentiële en logaritmische functies

Aanbeveling lestijden: ***ca. 15 lestijden*** *voor* ***de basisdoelstellingen***
eventueel aangevuld met ***ca. 10 uitbreiding***

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

BASISDOELSTELLINGEN

EF1	De begrippen nde machtswortel en rationale exponent definiëren.
EF2	De grafiek van de functie $f(x) = p.a^x$ tekenen en domein, bereik, stijgen en dalen en asymptotisch gedrag aflezen.
EF3	Het begrip ${}^a\log b$ definiëren.
EF4	Eigenschappen van de bewerkingen met logaritmen formuleren.
EF5	Concrete problemen in verband met exponentiële groei oplossen met betrekking tot beginwaarde, groeifactor en groeipercentage.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De *voornaamste doelstellingen* bij de studie van exponentiële functies zijn:
- een *betekenisvolle ontwikkeling* nastreven van begrippen zoals exponentiële groei, macht, logaritme;
- de *exponentiële functies* gebruiken als model voor de beschrijving van groeiprocessen;
- en het *toepassen* van de verkregen kennis bij problemen in verband met groeiprocessen.

Voorafgaandelijk aan de studie van exponentiële en logaritmische functies moeten de leerlingen enige kennis hebben over de begrippen nde machtswortel en rationale exponent. Het is voldoende dat het begrip ‘nde machtswortel’ gedefinieerd wordt. Nadat men de uitdrukking a^b met $a > 0$ en b rationaal heeft gedefinieerd kan men aanvaarden dat de rekenregels die gelden voor gehele exponenten behouden blijven. Het aantal oefeningen i.v.m. deze regels wordt zeer beperkt gehouden.

Uit de constructie van verschillende functies van de vorm $f(x) = p.a^x$ kan men de voornaamste eigenschappen afleiden. Hierbij is het gebruik van ICT een aanbevolen hulpmiddel.

Het begrip logaritme wordt gedefinieerd als de inverse van een macht die toelaat de exponent te berekenen als het grondtal en het resultaat van de machtsverheffing gegeven is. Het aantal rekenregels wordt best beperkt gehouden tot deze die effectief noodzakelijk zijn. Een aantal eigenschappen worden als basis aangebracht: logaritme van een product (en daarmee samenhangend quotiënt en macht) en de verandering van grondtal. Steunend op de definitie zijn de bewijzen van de eigenschappen niet zo moeilijk.

Als men dit onderwerp bestudeert, dan zal de doelstelling over groeiprocessen uit het eerste onderwerp *Grafisch onderzoek van functies* hier geïntegreerd aan bod komen.
De leerlingen kennen voor groei hoofdzakelijk het model van de lineaire groei. Dit werd bestudeerd ter gelegenheid van de studie van recht evenredige grootheden en van eerstegraadsfuncties. Een korte herhaling kan volstaan. Lineaire groei zal aan bod komen als vergelijkingsbasis.
De leerlingen worden geconfronteerd met een nieuwe soort groeiprocessen, m.n. die beschreven met een macht, waarbij de veranderlijke in de exponent voorkomt. Exponentiële groeiprocessen kunnen aangebracht worden vanuit concrete situaties die grafisch worden voorgesteld. De 'toename' van de functiewaarde is nu niet te beschrijven met een vermeerderen of verminderen met eenzelfde term (cf. lineaire groei). Wel komt het inzicht dat de groei (vermeerdering of vermindering) voortkomt uit het vermenigvuldigen met een bepaalde factor.
Voorbeelden van exponentiële groeiprocessen zijn o.a. bevolkingsaangroei, kapitaalsvorming bij samengestelde interest, afname van radioactieve massa, bacteriecultuur, demping van geluid, vrijgekomen energie bij een aardschok).

In verband met exponentiële groei is het aangeraden enig idee te geven over groeifactor en groeipercentage. Bij een toename van p % per tijdseenheid hoort de groeifactor $g = 1 + \frac{p}{100}$. Zo hoort bij een toename van 15 % de groeifactor 1,15 en omgekeerd. Als een hoeveelheid per dag 45 % toeneemt, dan is de groeifactor 1,45. Per week is de groeifactor $1{,}45^7$ of ongeveer 13,48. Dit is een toename van 1248 % $(1348 - 100)$. De groeifactor per uur is $1{,}45^{\frac{1}{24}}$. Dit is ongeveer 1,016. De toename is dus 1,6 %. Bij een afname van p % per tijdseenheid hoort de groeifactor $g = 1 - \frac{p}{100}$. Zo hoort bij een afname van 15 % de groeifactor 0,85 en omgekeerd. Als een hoeveelheid per dag 45 % afneemt, dan is de groeifactor 0,55. Per week is de groeifactor $0{,}55^7$ of ongeveer 0,015. Dit is een afname van 98,5 % $(100 - 0{,}015)$. De groeifactor per uur is $0{,}55^{\frac{1}{24}}$. Dit is ongeveer 0,975. De afname is dan 2,5 %.

Bij het oplossen van concrete problemen in verband met exponentiële groei wordt men geconfronteerd met het oplossen van de vergelijking $a^{f(x)} = b$. Om deze vergelijkingen op te lossen maakt men meestal gebruik van logaritmen. Men zal echter niet nalaten aan te tonen dat sommige van deze vergelijkingen op te lossen zijn door te steunen op het begrip exponent.

UITBREIDINGSDOELSTELLINGEN

EF6	Het verband onderzoeken tussen de functies $f(x) = a^x$ en $f(x) = {}^a\log x$ door middel van grafieken en tabellen.
EF7	De grafiek tekenen van de functie $f(x) = {}^a\log x$ tekenen en domein, bereik, stijgen en dalen en asymptotisch gedrag aflezen.
EF8	De afgeleide functie van een exponentiële en een logaritmische functie bepalen.
EF9	De integraal berekenen van een exponentiële en een logaritmische functie.
EF10	Problemen oplossen gebruik makend van de begrippen afgeleide en integraal van exponentiële en logaritmische functies.
EF11	Logaritmische schalen en logaritmisch papier gebruiken.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Afhankelijk van de studierichting kan in de uitbreiding aandacht besteed worden aan de logaritmische functies of aan de veel voorkomende exponentiële functies met grondtal e.

De logaritmische functie wordt gedefinieerd als de inverse van de exponentiële functie. De eigenschappen kunnen afgeleid worden uit de constructie van een aantal welgekozen voorbeelden. Ook hier is het gebruik van ICT aanbevolen. Men zal ook niet nalaten de nadruk te leggen op de symmetrie t.o.v. de bissectrice van de eerste coördinatenhoek tussen de grafiek van een logaritmische functie en de grafiek van de verwante exponentiële functie.

Uit de constructie van functies van de vorm $f(x) = a^x$ voor verschillende waarden van a en met $a > 1$, kan men besluiten dat de afgeleide functie een positief veelvoud is van de functie zelf. De vraag kan gesteld worden voor welke a de afgeleide functie de functie zelf is (dit wil zeggen dat de helling in het snijpunt met de tweede coördinaatas precies 1 is).
Het getal e kan ook aangebracht worden vanuit het gekende limietproces met behulp van tabellen, waarin de limietwaarde geleidelijk beter benaderd wordt.
Het begrip Neperiaanse (of natuurlijke) logaritme kan gedefinieerd worden.

Men beperkt zich tot het bepalen van de afgeleide functie en de integraal van functies van de vorm $f(x) = a^{mx+n}$ en $f(x) = {}^{a}\log(mx + p)$.

Tegen de achtergrond van de specifieke kennis van de leerlingen binnen hun technische vakken kunnen een aantal toepassingen behandeld worden. Mogelijke toepassingen zijn bijv. energie van een condensator, de gemiddelde leeftijd van een radioactief atoom, reactiesnelheid bij omkeerbare chemische reacties in gesloten en open systemen, geremde groei, ...

In wetenschappen en technische toepassingen wordt soms met *logaritmische schalen* en logaritmisch papier gewerkt. Logaritmische schalen worden gebruikt als de verhoudingen van wat men op een as uitzet belangrijk zijn. Logaritmisch papier speelt een belangrijke rol bij het opstellen van het voorschrift van een functie als model voor een tabel cijfergegevens. Blijken de uitgezette punten bij benadering op een rechte te liggen, dan past bij deze gegevens een exponentieel, logaritmisch of machtsfunctiemodel, naargelang van het soort papier.

5.2.6 Goniometrische functies A

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

Aanbeveling lestijden: ***ca. 15 lestijden***

BASISDOELSTELLINGEN

GF1	Het maatgetal van een hoek omzetten van zestigdelige graden in radialen en omgekeerd.
GF2	Het verloop onderzoeken van de functies $f(x) = \sin x$ en $f(x) = \cos x$ op basis van de goniometrische cirkel.
GF3	Uitgaande van de grafiek van $f(x) = \sin x$ de grafiek van de functies met voorschrift $k.\sin x$, $\sin(k.x)$, $\sin(x + k)$ en $\sin x + k$ opbouwen en de coëfficiënt interpreteren.
GF4	Vergelijkingen van de vorm $\sin(ax + b) = c$ oplossen en grafisch interpreteren.
GF5	Problemen oplossen die beschreven worden met behulp van een algemene sinusfunctie.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De *voornaamste doelstellingen* bij de studie van goniometrische functies zijn

- een *betekenisvolle ontwikkeling* nastreven van begrippen zoals goniometrisch getal (sinus, cosinus), periodiciteit, amplitude, periode, faseverschuiving;
- de *goniometrische functies* gebruiken als model voor de beschrijving van periodieke verschijnselen;
- en het *toepassen* van de verkregen kennis bij problemen.

De leerlingen werden al geconfronteerd met periodieke verschijnselen (zie onderdeel Grafisch onderzoek). De goniometrische functies bieden de mogelijkheid om periodiciteit, of althans bepaalde vormen ervan, te beschrijven met behulp van een functievoorschrift.

In de praktijk worden naast zestigdelige graden en radialen ook honderddelige graden gebruikt, o.a. bij de landmeting. In studierichtingen waarin leerlingen met deze maten geconfronteerd worden, kunnen ze aan bod komen.

De goniometrische formules worden bestudeerd en ingeoefend voor zoverre ze noodzakelijk zijn binnen de technische vakken van een bepaalde studierichting. De leerlingen kunnen in enkele concrete berekeningen ontdekken dat de meest voor de hand liggende vormen, waarbij bijvoorbeeld $\sin(a + b)$ zou verbonden worden met $\sin a + \sin b$, niet geldig zijn. ICT-hulpmiddelen werken hierbij ondersteunend. Ook de juiste formules worden gecontroleerd voor een aantal waarden. Het verklaren van de formules vanuit een meetkundige redenering is uitbreiding.

De leerlingen moeten in staat zijn de grafiek van een algemene sinusfunctie te onderzoeken. Om de aanbreng niet te ingewikkeld te maken, is het zinvol zich in de aanvangsfase te beperken tot de functie met voorschrift $f(x) = \sin x$. Er zijn betekenisvolle situaties aan te geven waaruit de grafiek van deze functie kan afgeleid worden: de cirkelbeweging, een draaiend rad, de schroef van een vliegtuig, de harmonische trilling van een veer. Het begrip periodiciteit kan in deze concrete voorbeelden geïllustreerd worden.

Het is aan te raden de grafiek van $f(x) = \sin x$ of $f(x) = \cos x$ ook manueel te tekenen. De leerlingen ervaren hierdoor dat men voldoende punten moet plaatsen om een zo nauwkeurig mogelijke grafiek te bekomen. Het inzicht van een golvende lijn kan best aangebracht worden door de tabel van functiewaarden met enkele tussenliggende waarden uit te breiden. Uiteraard zal de grafiek op het scherm van een computer of een grafische rekenmachine tot een volwaardig beeld bij de leerlingen bijdragen. Het onderzoek van de grafiek van deze functies leidt tot het bespreken van het domein, het bereik, de periodiciteit, de nulpunten, de tekenverandering, het stijgen en dalen van de functie en het bereiken van extreme waarden. Ook kan men er op wijzen dat de cosinusfunctie in feite een verschoven sinusfunctie is.

Een veelheid van grafieken, bijv. van $f(x) = \sin x$, $f(x) = 2.\sin x$, $f(x) = -\sin x$, $f(x) = \sin 3x$, $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3}$, ... moet leiden tot de begrippen amplitude, periode en faseverschuiving (eventueel frequentie).
Het koppelen van een meetkundige betekenis aan deze begrippen moet het inzicht bevorderen (verticale en/of horizontale uitrekking, horizontale en/of verticale verschuiving, de grafiek is volledig gekend als een welbepaald deel ervan gekend is, symmetrie, verbanden tussen de grafieken van functies waarvan de parameters een bepaald verband vertonen). Het onderzoek van deze grafieken gebeurt best met behulp van ICT.
Amplitude, periode, nulpunten en verschuiving worden bepaald zowel uitgaande van de grafiek als van het voorschrift. Men kan ook enige aandacht besteden aan het opstellen van het functievoorschrift als de grafiek gegeven is.
In studierichtingen waar elektriciteitsleer als studievak voorkomt, legt men nadruk op het feit dat in de uitdrukking $\sin(\omega t + \varphi)$, ω en φ niet dezelfde betekenis hebben als de parameters a en b in de uitdrukking $\sin(a(x + b))$.

Het oplossen van goniometrische vergelijkingen wordt beperkt tot het oplossen van basisvormen zoals $\sin x = c$, $\sin x = \sin\alpha$ en $\sin(ax + b) = \sin \alpha$. Het is aangewezen de vergelijkingen eerst op te lossen binnen een bepaalde periode. Daarna kan de oplossing ruimer geïnterpreteerd worden. De grafieken van de bijhorende functies kunnen als hulpmiddel dienst doen. De grafische oplossing zal de interpretatie van een berekend resultaat merkelijk vereenvoudigen. Het gebruik van ICT is hierbij aanbevolen.

Met de algemene sinusfunctie kunnen bepaalde periodieke verschijnselen (benaderend) beschreven worden. Voorbeelden die aan bod kunnen komen: eb en vloed, beweging reuzenrad, schroefbeweging, afgelegde weg ten opzichte van het beginpunt bij een cirkelvormige beweging, harmonische trilling, wisselstroom, bioritme, ... Het onderzoek van deze verschijnselen gebeurt bij voorkeur vanuit de grafische voorstelling.

Naast deze verschijnselen beschreven met sinusfuncties moet voldoende aandacht gaan naar andere periodieke verschijnselen. De studie van periodiciteit zoals die beschreven is in het eerste onderwerp *Grafisch onderzoek van functies* kan hier dus geïntegreerd worden. Ook kunnen verbanden gelegd worden met bepaalde periodieke verschijnselen die voorkomen in de technische vakken.

5.2.7 Goniometrische functies B

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

Aanbeveling lestijden: **ca. 15 lestijden**

BASISDOELSTELLINGEN

GF6	De som- en verschilformules, de formules voor de dubbele hoek en de formules van Simpson opstellen.
GF7	De afgeleide functie van een goniometrische functie bepalen.
GF8	De integraal berekenen van de goniometrische basisfuncties.
GF9	Problemen oplossen gebruik makend van de begrippen afgeleide en integraal.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Aan de leerlingen die in de tweede graad het leerplan a of het leerplan b met vijf wekelijkse lestijden hebben gevolgd werden de som- en verschilformules intuïtief aangebracht en plausibel gemaakt met voorbeelden. Voor deze leerlingen kan nu een bewijs worden gegeven van een van de formules. De andere formules kunnen uit deze basisformule afgeleid worden.
De leerlingen die in de tweede graad het leerplan b met vier wekelijkse lestijden hebben gevolgd kennen de som- en verschilformules niet. Bij deze leerlingen toont men aan dat de meest voor de hand liggende formules, waarbij bijvoorbeeld $\sin(a+b)$ verbonden wordt met $\sin a + \sin b$, niet geldig zijn. De rekenmachine kan hierbij ondersteunend werken. Daarna zal voor een van de gevallen best de juiste formule gegeven worden en gecontroleerd voor een aantal waarden. Een bewijs kan dan volgen. De andere formules kunnen uit deze eerste basisformule afgeleid worden.
Het is zinvol aandacht te besteden aan formules in betekenisvolle berekeningen en omzettingen. Bij het gebruik ervan is het aangewezen dat de leerlingen gebruik kunnen maken van een formularium.

Als aanvulling op de algemene sinusfuncties die in de tweede graad werden bestudeerd kan aandacht besteed worden aan cosinusfuncties, i.h.b. $f(x) = \cos x$. Het verband met de sinusfuncties wordt geëxpliciteerd.

Door het verloop van $f(x) = \sin x$ en $f(x) = \cos x$ met elkaar te vergelijken kunnen de basisformules voor het berekenen van de afgeleide functie worden verklaard. Deze basisformules kunnen ook opgesteld worden steunend op de algemene formule voor het berekenen van de afgeleide functie en de goniometrische formules. Bij het opstellen van de regels voor het bepalen van de afgeleide functie en de integraal beperkt men zich tot de goniometrische basisfuncties zoals o.a. $f(x) = \sin(ax + b)$.

Toepassingen hierop zijn bijv. de gemiddelde stroomsterkte en het vermogen van een wisselstroom, snelheid en versnelling bij afgelegde weg, de afgelegde weg bij een cirkelvormige beweging.

5.2.8 Rationale functies

Aanbeveling lestijden: ***ca. 15 lestijden***

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

BASISDOELSTELLINGEN

RF1	Domein, nulpunt en tekenverloop van een homografische functie bepalen.
RF2	Het asymptotisch gedrag onderzoeken bij een homografische functie.
RF3	De afgeleide functie berekenen van een homografische functie.
RF4	Met behulp van de afgeleide functie onderzoeken in welke intervallen een homografische functie stijgt of daalt.
RF5	Problemen oplossen die gesteld worden met de afgeleide van rationale functies met behulp van ICT.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De *voornaamste doelstellingen* bij de studie van rationale functies zijn

- een *betekenisvolle ontwikkeling* nastreven van begrippen zoals domein, nulpunt, tekenverloop, asymptotisch gedrag;
- de *rationale functies* en in hoofdzaak de *homografische functies* gebruiken als model voor de beschrijving van verschijnselen;
- het *inpassen* van homografische functies in het functieapparaat waarbij het concept afgeleide wordt overgedragen;
- en het *toepassen* van de verkregen kennis bij problemen.

Gezien de beperkte tijdsruimte wordt het onderdeel rationale functies beperkt gehouden. De homografische functies worden hier opgenomen als model van de aanpak van rationale functies. Enerzijds komen de belangrijkste begrippen als domein (probleem nulpunt noemer), en asymptoot hier volwaardig aan bod. Anderzijds wordt het gebruik van het algebraïsch rekenapparaat beperkt gehouden.
Het is echter mogelijk hier niet-homografische rationale functies in beperkte mate aan bod te brengen bij het oplossen van problemen (RF5). Daarbij wordt het voorschrift dan gegeven en wordt stilzwijgend dezelfde werkwijze als bij homografische gehanteerd. Het gebruik van ICT voor het onderzoeken van de grafiek, het opzoeken van nulpunten, … biedt hier dan uitkomst.

Bij het bepalen van het domein, het nulpunt en het tekenverloop van een homografische functie kan aandacht besteed worden aan een aantal basistechnieken om deze problemen op te lossen. Men gaat ook na wanneer het voorschrift al of niet mag vereenvoudigd worden.

De vergelijkingen van de asymptoten kunnen rekentechnisch bepaald worden vanuit het functievoorschrift, maar ook vanuit de gegeven grafiek. Als men de vergelijking van een asymptoot rekentechnisch bepaalt, dan kan men een controle uitvoeren d.m.v. ICT.

Het volstaat de rekenregel voor het berekenen van de afgeleide (van een quotiënt) intuïtief aanvaardbaar te maken.

Zoals bij de veeltermfuncties worden enkele voorbeelden ontwikkeld om de leerlingen inzicht te laten verwerven in het verband tussen de functie en haar eerste afgeleide.
Mogelijkheden hierbij zijn o.a.:

- bij een gegeven aantal grafieken die grafiek bepalen die passend is als grafiek van de afgeleide functie bij een gegeven grafiek van een functie en omgekeerd;
- het tekenverloop van de eerste afgeleide bepalen als de grafiek van de functie gegeven is;

- de grafiek van de afgeleide functie bij een gegeven grafiek ruw schetsen en omgekeerd.

Bij het oplossen van problemen ligt de klemtoon niet op het achterliggende rekenwerk, maar wel op de oplossingswijze en de interpretatie van resultaten. In die zin is het gebruik van ICT voor de berekeningen hier aangewezen.

UITBREIDINGSDOELSTELLING

RF6	De grafiek van een rationale functie onderzoeken met behulp van ICT-middelen.
RF7	De afgeleide functie berekenen van een rationale functie.
RF8	Met behulp van de afgeleide functie onderzoeken in welke intervallen een rationale functie stijgt of daalt of een extreme waarde bereikt.
RF9	Problemen oplossen die gesteld worden met de afgeleide van rationale functies.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Afhankelijk van de studierichting en de toepassingen die met de leerlingen kunnen verwerkt worden binnen hun technische sector zal aandacht besteed worden aan rationale functies. Alleszins is het niet de bedoeling de studie van de rationale functies te herleiden tot het rekentechnische onderdeel van het manipuleren van rationale vormen. Integendeel, precies omdat leerlingen niet over sterke algebraïsche vaardigheden beschikken zal men sneller zijn toevlucht nemen tot ICT-hulpmiddelen. Zo kan men toch de rationale functies aanbieden als model bij het beschrijven van problemen zonder dit onderdeel te laten verzanden in oeverloze rekenproblemen. Anderzijds is het wel zinvol aandacht te besteden aan het vereenvoudigen van de vorm waarin de rationale functies worden gepresenteerd. Rekentechnieken zullen vooral daarop gericht zijn.

De rekenregel voor het berekenen van de afgeleide kan aangetoond worden maar het kan volstaan dat deze regel intuïtief aanvaardbaar gemaakt wordt. De besluiten over het verloop van een gegeven functie, die afgeleid worden uit de eerste afgeleide, worden gecontroleerd d.m.v. ICT.
Ook hier zal het inzicht ontwikkeld worden in het verband tussen de functie en haar eerste afgeleide.

Mogelijke situaties waaraan zinvol rationale functies kunnen gekoppeld worden: het debiet van het aantal auto's in een file in functie van de snelheid, de afmetingen van een cilindervormig blik met gegeven inhoud, de lenzenwet in optica.
Bij het oplossen van problemen in contextsituaties moet men over de haalbaarheid waken. Zo is de moeilijkheidsgraad van een probleem ook afhankelijk van de kennis van de leerlingen van de context zelf.

5.2.9 Rijen en iteratieprocessen

Aanbeveling lestijden: **ca. 20 lestijden**

1 RIJEN

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

BASISDOELSTELLINGEN

RIJ1	Van een rij vaststellen of het een rekenkundige of een meetkundige rij is.
RIJ2	Vraagstukken oplossen in verband met rekenkundige of meetkundige rijen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de eerste graad werden getallenrijen onderzocht op mogelijke regelmaat in de opbouw ervan. In een aantal rijen kan een getal op een willekeurige plaats afgeleid worden uit (het) vorige(n).
Hier worden twee bijzondere soorten rijen onderzocht: de rekenkundige rij en de meetkundige rij. Ze beschrijven op discrete wijze twee belangrijke groeiprocessen: de lineaire en de exponentiële groei. Anderzijds is het zinvol de leerlingen te wijzen op de relatieve beperktheid van beide 'systemen' om rijen op te bouwen. De leerlingen moeten geconfronteerd worden met andere soorten rijen, zoals de rij van Fibonacci.

De leerlingen onderzoeken hoe ze een andere term van de rij kunnen bepalen als een aantal termen van een rekenkundige of meetkundige rij gegeven zijn. Uitgangspunt is allicht dat de eerste termen van de rij gegeven zijn, met de vraag de rij verder te zetten. Eens hierin inzicht verworven is, kan dit uitgebreid worden tot rijen gegeven met niet opeenvolgende termen. Dit proces leidt tot formules waarmee ze een willekeurige term kunnen berekenen.

Eenzelfde werkwijze wordt gevolgd voor de berekening van de som van de eerste n termen. Als toepassing kan de som van de eerste n natuurlijke getallen berekend worden.

Rekenkundige rijen en meetkundige rijen kunnen in allerlei vraagstukken verwerkt worden. Voorbeelden: jaarlijkse groei met enkelvoudige interest, groei van een salaris met constante jaarlijkse toename, stapelwijze van palen, jaarlijkse groei bij samengestelde interest, aangroei bacteriepopulatie, afstand tot de grond van een botsende bal, omtrek en oppervlakte van een rij in elkaar ingebedde vierkanten (telkens vanuit de middens van de zijden), enz.

2 ITERATIE

Iteratie is een proces dat niet alleen in de wiskunde voorkomt. In de programmeerwereld spreekt men van recursiviteit. Ook in onze alledaagse handelingen kunnen we iteraties ontdekken: bijvoorbeeld het in vieren plooien van een brief. De filmwereld maakt soms gebruik van iteratie. Wanneer men een opname maakt van een programma waarin op het scherm een TV voorkomt waarop de uitzending te zien is, wordt dit TV-scherm weergegeven in het TV-scherm van het TV-scherm enz.

Het is een onderdeel dat zeer goed aansluit bij rijen. Zo kunnen rijen met een recursief voorschrift opgebouwd worden door middel van iteratie.

Iteratie vindt zijn oorsprong in de studie van dynamische systemen. Een dergelijk systeem heeft een input en een output. Om de evolutie in de tijd van het systeem te onderzoeken en te bestuderen, zal de verkregen output als nieuwe input aan het systeem aangeboden worden en dit een aantal keren na elkaar. Dit is een iteratie.
Het systeem kan evolueren naar een stationaire toestand (dekpunt), kan springen tussen een aantal toestanden (periode) of kan uit zijn voegen barsten (blijven toenemen of afnemen). Een stationaire toestand kan nog twee verschijningsvormen kennen: aantrekkend of afstotend. Dit is te vergelijken met de fysische toestand 'evenwicht' waar men spreekt van stabiel (aantrekkend, terugkerend naar zijn oorspronkelijke toestand) en labiel (afstotend, niet terugkerend naar zijn oorspronkelijke toestand) evenwicht.

Toepassingen van iteratie kunnen in verschillende situaties voorkomen.
- Het herhaaldelijk verschalen van een figuur in de meetkunde.
- Het herhaaldelijk toepassen van dezelfde groep transformaties.
- Met een rekenmachine de vierkantswortel van een getal nemen en daarna de vierkantswortel van het resultaat en dat blijven herhalen.
- De studie van de evolutie van populaties.
- Benaderingsmethodes voor nulpunten van functies.
- Het bepalen van oplossingen voor vergelijkingen of stelsels van vergelijkingen.
- Meetkundige en rekenkundige rijen.
- De oplossing van het probleem van de toren van Hanoi.

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

BASISDOELSTELLINGEN

IT1	De begrippen baan en dekpunt illustreren bij eenvoudige voorbeelden.
IT2	De dekpunten van een iteratie bepalen.
IT3	Het belang van de startwaarde (beginwaarde) voor de baan bij een iteratie illustreren met een voorbeeld.
IT4	Soorten banen en dekpunten bij een iteratief proces onderscheiden met behulp van ICT-middelen.
IT5	Het verschil tussen het aantrekkende of afstotende karakter van een dekpunt illustreren.
IT6	De periodiciteit van een baan onderzoeken.
IT7	Vraagstukken in verband met iteraties oplossen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Het is de bedoeling dat de leerlingen in eenvoudige voorbeelden, zowel grafisch als algebraïsch, de eventuele dekpunten kunnen afleiden. De leerlingen moeten de baan van een iteratief proces kunnen aangeven.

De startwaarde van een iteratief proces is belangrijk voor het verdere verloop of gedrag van het iteratieve proces. De baan en de dekpunten kunnen nogal verschillen. Het is de bedoeling dat de leerlingen daarvan overtuigd raken door beginwaarden van het proces te veranderen en te kijken naar het verloop van het proces. Daartoe kan gebruik gemaakt worden van tabellen en grafieken.

Een webdiagram is een grafische voorstelling die veel gebruikt wordt bij het bestuderen van de soorten banen en ook voor het opsporen van dekpunten. Om een webdiagram te construeren, kan het best ICT ingeschakeld worden. Het is een eenvoudig maar belangrijk hulpinstrument. Het is heel leerrijk om het webdiagram van eenvoudige iteraties te bestuderen waarbij zoveel mogelijk verschillende situaties optreden.

Met behulp van tabellen en/of webdiagrammen kan besloten worden of een dekpunt aantrekkend of afstotend van karakter is. Daarbij worden zeer kleine afwijkingen genomen ten opzichte van het dekpunt en wordt de baan beschreven met die waarden als startwaarde. Komt de baan na enige iteraties terug op het dekpunt dan spreekt men van aantrekkend. Vlucht de baan weg van het dekpunt dan is het dekpunt afstotend.

De periodiciteit van een baan is het aantal iteraties dat moet uitgevoerd worden opdat een waarde op zichzelf wordt afgebeeld. De baan die zo ontstaat wordt een periodieke baan of cyclus genoemd.

Bij het maken van vraagstukken is het niet de bedoeling om alleen de nadruk te leggen op het rekentechnische aspect van iteraties. Er kunnen heel wat vragen gesteld worden rond grafieken en tabellen zonder dat er daarbij veel rekenwerk nodig is. In de praktijk komen in heel wat gebieden iteratieve processen voor. Iteraties in de wiskunde kunnen ook meetkundig van aard zijn, bijvoorbeeld het genereren van fractalen.
Het ligt voor de hand dat niet alle iteratieve processen aanleiding geven tot eenvoudige berekeningen. Bij meetkundige iteraties kunnen een aantal voorbeelden praktisch gerealiseerd worden door de leerlingen. Eventueel kunnen eenvoudige voorbeelden, onder begeleiding geprogrammeerd worden met behulp van ICT.

5.2.10 Complexe getallen

Aanbeveling lestijden: ***ca. 10 lestijden***

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

BASISDOELSTELLINGEN

CG1	De definitie van een complex getal formuleren.
CG2	Een complex getal meetkundig voorstellen.
CG3	Complexe getallen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.
CG4	De goniometrische vorm van een complex getal bepalen.
CG5	Twee complexe getallen geschreven in hun goniometrische vorm vermenigvuldigen en delen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerlingen zijn in de loop van de vorige jaren geconfronteerd met opeenvolgende uitbreidingen van het getalbegrip. Schijnbaar was met het invoeren van de reële getallen die uitbreiding afgewerkt. Nu blijkt dat in bepaalde realistische situaties het gebruik van ‘fictieve’ getallen wiskundige voordelen biedt. Zo is historisch gezien het invoeren van ‘complexe’ getallen gekoppeld aan het oplossen van vergelijkingen van de derde graad. Het rekenen met wortelvormen van negatieve getallen gaf zonder inhoudelijke betekenis toch juiste oplossingen. Een eerste kennismaking met complexe getallen kan via die idee van rekentruc. De problematiek van het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen met negatieve discriminant is een voor de hand liggende aanknoping.

De schrijfwijze $\sqrt{-1}$ is niet vol te houden omdat dit tot foutieve interpretaties leidt van de vertrouwde rekenregels. Het symbool i wordt ingevoerd, zodat voor een complex getal de notatie $a + bi$ ontstaat. In wiskunde blijven we liefst de algemeen gebruikelijke notatie gebruiken (i verwijst zinvol naar ‘imaginair’). In overleg met de technische vakken kan geopteerd worden voor het gebruik van de letter j, die daar meer gebruikelijk blijkt te zijn.

De notatie $a + bi$ voor een complex getal laat toe op zeer eenvoudige wijze met dat getal een *koppel reële getallen* te associëren en omgekeerd. En deze notatie met koppels reële getallen leidt onmiddellijk tot een voorstelling van complexe getallen in het vlak (voorzien van een Euclidisch assenstelsel).
De hoofdbewerkingen met complexe getallen kunnen worden uitgevoerd volgens de rekenregels voor reële getallen, waarbij $i^2 = -1$. De eigenschappen van de optelling en de vermenigvuldiging blijven dezelfde als deze van reële getallen.
Gebruik makend van de meetkundige voorstelling van complexe getallen kan de optelling een meetkundige interpretatie krijgen.

Gebruik makend van de voorstelling in het vlak kan een derde schrijfwijze voor een complex getal opgesteld worden. Daarbij moeten, steunend op de associatie met goniometrie en analytische meetkunde (afstandsformule), de begrippen *argument en modulus* ingevoerd worden.

Met behulp van de goniometrische vorm blijkt de vermenigvuldiging en de deling van complexe getallen vrij eenvoudig te verlopen. De inverse $(a + bi)^{-1}$ van een complex getal wordt zowel meetkundig geïllustreerd als algebraïsch berekend. Afhankelijk van de beschikbare tijd kan ook de vermenigvuldiging een meetkundige interpretatie krijgen, gebruik makend van de goniometrische vorm en meetkundige eigenschappen.

In toepassingen maakt men soms gebruik van machten of machtswortels van complexe getallen. In de mate dat dergelijke toepassingen aan bod komen, kunnen de machten van een complex getal, eventueel de tweede- en de derdemachtswortels uit een complex getal, gegeven in zijn goniometrische vorm, berekend met de *formule van de Moivre*. De punten die bij grafische voorstelling overeenstemmen met opeenvolgende machten van een complex getal liggen op een spiraal.

UITBREIDINGSDOELSTELLING

CG6	Vraagstukken oplossen uit wetenschappen en techniek waarbij complexe getallen worden gebruikt.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerlingen zullen complexe getallen hoofdzakelijk gebruiken in toepassingen in wetenschappen en techniek. Enkele grootheden uit de elektrotechniek krijgen een complexe notatie (weliswaar met j i.p.v. i) om het rekenen ermee te vereenvoudigen. Zo kan de goniometrische vorm van complexe getallen gebruikt worden in toepassingen over elektriciteit (o.m. fasediagram). In die zin is het aangewezen hierbij overleg te plegen met de leraren technische vakken om een zekere uniformiteit in de benadering te realiseren.

Sommige toepassingen leiden tot een binomiale vergelijking, die moet worden opgelost met behulp van de nde machtswortels. Die kunnen aangebracht worden naar analogie met de tweede- en derdemachtswortels. De n verschillende nde machtswortels zijn de hoekpunten van een regelmatige ingeschreven n-hoek en de raakpunten van een regelmatige omgeschreven n-hoek aan een cirkel.

5.2.11 Matrices en stelsels

ALGEMENE SITUERING ONDERWERP

Bij de klassieke aanpak is het oplossen van stelsels vaak de enige toepassing op matrices. Nochtans geven tal van problemen, zowel binnen als buiten de wiskunde, aanleiding tot matrices. De matrix is dan, zoals bij stelsels, een handige wiskundige notatie voor een tabel met numerieke gegevens. Passende bewerkingen met deze matrices kunnen dan leiden tot de oplossing van het probleem.

Het verwerken van een probleem met matrices wordt met de beschikbaarheid van ICT heel wat gebruiksvriendelijker. Voor tijdrovende (manuele) berekeningen, bijv. bij bewerkingen met matrices en bij het oplossen van stelsels, levert het gebruik van ICT immers heel wat tijdswinst op.

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

Aanbeveling lestijden: ***ca. 15 lestijden***

BASISDOELSTELLINGEN

MS1	Met behulp van matrices een concreet probleem schematiseren.
MS2	Binnen het oplossen van een probleemsituatie - matrices optellen en aftrekken, - een matrix met een getal vermenigvuldigen, - een matrix transponeren, - matrices vermenigvuldigen, - machten van matrices berekenen.
MS3	De methode van het rijherleiden gebruiken voor het oplossen van m x n-stelsels van de eerste graad (met $m \leq 3$ en $n \leq 3$).
MS4	Vraagstukken oplossen die te herleiden zijn tot het een stelsel van de eerste graad.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Matrices en bewerkingen met matrices kunnen ingevoerd worden vanuit toepassingen. De matrix wordt dan gedefinieerd als een handige opslagplaats voor een blok gegevens. In sommige gevallen kan een matrix gemakkelijker worden opgesteld nadat het probleem eerst geschematiseerd en gevisualiseerd werd d.m.v. een pijlenschema of een graf.

In de context van probleemsituaties liggen de bewerkingen met matrices voor de hand, o.m. de som van matrices en het veelvoud van een matrix. De vermenigvuldiging is voor leerlingen niet zo vanzelfsprekend. Nochtans kan mits gepaste voorbeelden ook deze bewerking voorafgaandelijk intuïtief geïllustreerd worden. Bijvoorbeeld: bij een gegeven productiematrix van verschillende producten per regio en de matrix met de winst per product kan men de totale winst per regio laten berekenen.

Aan de hand van cijfervoorbeelden kan men illustreren dat niet alle eigenschappen die bij bewerkingen met getallen gelden, ook vanzelfsprekend geldig zijn bij bewerkingen met matrices o.a. het niet commutatief zijn van de vermenigvuldiging.

De evolutie van blokken gegevens is een interessante toepassing op de klassieke matrixvermenigvuldiging waarvan er veel in een vereenvoudigde vorm in de klas aan bod kunnen komen. Hierbij ligt de klemtoon op het mathematiseren: het vertalen van het concrete probleem en het zoeken naar de juiste wiskundige bewerkingen om het probleem op te lossen. Hierbij kan men gebruik maken van schema's om het geheel te visualiseren. Mogelijke toepassingen op deze evoluties van blokken zijn: de evolutie van het koopgedrag bij een groep consumenten, de evolutie van een populatie dieren (Lesliematrices), het migratiepatroon van de bevolking in een bepaalde regio (migratiematrices) of het aantal wegen tussen bepaalde grootsteden (verbindingsmatrices).

Een van de voornaamste toepassingen van matrices is wellicht het oplossen van stelsels. Men beperkt zich in principe tot m x n-stelsels, met m en n maximum drie. De methode van de combinaties die de leerlingen misschien kennen vanuit hun vooropleiding wordt veralgemeend tot deze van het rijherleiden. De uitwerking in een aantal beperkte voorbeelden moet hen inzicht geven in hoe een stelsel kan opgelost worden. De klemtoon zal echter niet zo zeer op het rekentechnische aspect liggen, dan wel op het gebruiken van deze methodiek bij het oplossen van stelsels uit concrete problemen. De nadruk ligt op het mathematiseren van de situatie, d.w.z. op het opstellen van het stelsel en het interpreteren van het gevonden resultaat. Men zal ook rekening houden met mogelijke rekenvaardigheidproblemen bij de leerlingen. Daarom is het zinvol bij de uitvoering ICT in te schakelen.

Als *uitbreiding* kan men problemen onderzoeken die aanleiding geven tot stelsels waarbij m en n groter zijn dan drie. Hier zal men bij het oplossen gebruik maken van ICT.

5.2.12 Lineaire programmatie

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

Aanbeveling lestijden: ***ca. 15 lestijden***

BASISDOELSTELLINGEN

LP1	Vraagstukken oplossen die leiden tot een ongelijkheid van de eerste graad met één onbekende en de oplossing grafisch voorstellen en/of symbolisch noteren.
LP2	Een ongelijkheid van de eerste graad met twee onbekenden oplossen en de oplossing grafisch voorstellen.
LP3	Een stelsel van twee ongelijkheden van de eerste graad met twee onbekenden oplossen en de oplossing grafisch voorstellen.

LP4	Een eenvoudig probleem op lineair programmeren met twee veranderlijken oplossen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de realiteit worden we vaak geconfronteerd met verschillende wegen om een bepaald probleem of situatie te bekijken. Soms zijn we geïnteresseerd in een minimale oplossing (bijv. een minimale kost) of een maximale oplossing (bijv. maximaal rendement of voordeel). De veranderlijken die een rol spelen zijn vaak aan beperkende voorwaarden onderhevig (bijv. een positief aantal, cf. productieaantallen, of een fabriek kan niet meer dan 24 uur per dag open zijn, de capaciteit van een productieketen is beperkt). Dit leidt tot ongelijkheden en/of vergelijkingen. De vraag naar minimale of maximale doelmatigheid leidt tot een 'doelfunctie'. De oplossing is de optimalisering van die functie. De voorwaarden samen maken een stelsel van ongelijkheden en/of vergelijkingen. De oplossing van het stelsel geeft de verzameling van de mogelijkheden aan. Daarvan kan de 'optimale' waarde gezocht worden (met isolijnen).

Een voorwaarde om problemen van lineaire programmatie te kunnen oplossen is dat de leerlingen ongelijkheden en stelsels van ongelijkheden kunnen oplossen. De ongelijkheden van de eerste graad met één onbekende werden al behandeld in leerplan a. Wellicht is een herhaling van de werkwijzen zinvol. Voor de andere leerlingen is een aanbreng van het oplossen van ongelijkheden van de eerste graad in een onbekende nog noodzakelijk. Zowel het algebraïsch als het grafisch oplossen kan hierbij aan bod komen. Een mogelijke oplossingsweg voor ongelijkheden is deze m.b.v. de tekenverandering van de verwante eerstegraadsfunctie.

Nieuw is alleszins het oplossen van ongelijkheden van de eerste graad in twee onbekenden. Daarbij wordt de oplossing ook grafisch voorgesteld in het vlak. Het begrip halfvlak werd voordien nog niet analytisch behandeld. Ook de oplossing van stelsels moet grafisch voorgesteld worden, waarbij de doorsnede van twee halfvlakken aan bod komt.

Omdat dit onderdeel gericht is op eenvoudige oefeningen op lineaire programmatie kan hier eventueel al een begrenzing aangebracht worden van positieve veranderlijken (cf. realistische situaties zijn allicht met positieve veranderlijken).

Het oplossen van een probleem op lineaire programmatie verloopt in een aantal stappen. Achtereenvolgens:
- een formule voor de doelfunctie opstellen,
- de beperkende voorwaarden omzetten in ongelijkheden (of vergelijkingen),
- het toegestane gebied in een assenstelsel aangeven (door middel van het oplossen van het stelsel van ongelijkheden),
- het optimum van de doelfunctie berekenen,
- de gevonden waarde(n) interpreteren in de context.

Zowel voor het oplossen van het stelsel als voor het grafisch voorstellen van de oplossingen kan ICT ingeschakeld worden.

Vermits het de eerste kennismaking betreft met dit soort problemen en de leerlingen maar over beperkte kennis beschikken in verband met het oplossen van stelsels (vergelijkingen en ongelijkheden) zal men zich beperken tot eenvoudige duidelijke en haalbare problemen. Een beperking van het aantal 'voorwaarden' tot vier is daarom zinvol.

5.2.13 Ruimtemeetkunde

ALGEMENE SITUERING

In dit onderdeel ruimtemeetkunde kunnen de leerlingen hun ruimtelijk inzicht en ruimtelijk voorstellingsvermogen verder ontwikkelen. Bij ruimtelijke probleemsituaties zal men een voorstelling maken, waarbij het probleem van zichtbare en onzichtbare gedeelten en de vertekening door perspectief een rol speelt. Door concrete toepassingen en vragen aan te pakken kunnen de leerlingen leren behoorlijk een probleem te onderzoeken, vermoedens te formuleren en hun besluit te argumenteren.

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

Aanbeveling lestijden: **ca. 20 lestijden**

BASISDOELSTELLINGEN

RM1	In concrete situaties de onderlinge ligging van twee rechten, van een rechte en een vlak en van twee vlakken onderzoeken en ruimtelijk voorstellen.
RM2	Eigenschappen over de ligging van rechten en vlakken in de ruimte onderzoeken en formuleren.
RM3	Situaties waarin de ruimtelijke onderlinge ligging van rechten niet getrouw wordt weergegeven in een vlakke voorstelling ervan, ruimtelijk aanwijzen en in een tekening voorstellen.
RM4	Eenvoudige problemen oplossen in verband met ruimtelijke situaties door gebruik te maken van eigenschappen van vlakke figuren.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Het hoofddoel van dit onderdeel ruimtemeetkunde is het verder ontwikkelen van ruimtelijk inzicht en ruimtelijk voorstellingsvermogen. Dit wordt niet bereikt door een aantal theoretische beschouwingen, maar vooral door actief ruimtelijke (probleem)-situaties te onderzoeken, vermoedens te formuleren en ze te toetsen en te verklaren. De klemtoon op het actief onderzoeken door de leerlingen houdt in dat er nog altijd vrij intuïtief kan gewerkt worden.

In de eerste en de tweede graad werden allerlei ruimtefiguren onderzocht en voorgesteld in twee dimensies. Daarbij werd het begrippenarsenaal over de onderlinge ligging van rechten en vlakken vrij intuïtief gehanteerd zonder het te expliciteren. Nu wordt dit systematischer aangepakt. Daarbij verdient het aanbeveling uit te gaan van *onderzoeksactiviteiten op concrete ruimtefiguren*, zoals balk en kubus en op de voorstelling ervan. Zo kunnen bijvoorbeeld aan bod komen: de onderlinge ligging van grond- en bovenvlak, van zijvlakken van kubus en balk, van snijlijnen van grond- en bovenvlak met een zijvlak, van rechten in twee vlakken waarvan de onderlinge ligging gekend is, van rechten en/of vlakken die bepaald worden door ribben en/of punten op ribben, …. Hierbij komt zowel de evenwijdigheid als de loodrechte stand van rechten en vlakken aan bod.
Een aantal problemen wordt bij het tekenen opgelost door bijvoorbeeld lijnconventies in te voeren (cf. zichtbare en onzichtbare delen). Hier kan geïllustreerd worden dat afhankelijk van de gekozen perspectivische voorstelling andere conventies gelden en andere voorstellingsproblemen voorkomen.

De bedoeling is *elementaire eigenschappen* te verwerven die inzicht geven in de ligging van rechten en vlakken ten opzichte van elkaar. Deze eigenschappen kunnen gebruikt worden bij het onderzoeken van ruimtefiguren (bijv. welke consequenties heeft het evenwijdig zijn van grondvlak en bovenvlak van een ruimtefiguur op de snijlijnen met de zijvlakken). Vandaar dat het zinvol is deze eigenschappen zelf in concrete ruimtelijke situaties te ontwikkelen. Zo kunnen een aantal eigenschappen ontdekt worden door de doorsnede van een kubus of een balk met een vlak te onderzoeken.
Bij het aanbrengen van eigenschappen zal aandacht besteed worden aan een duidelijke verwoording, aan een adequate voorstelling ervan zowel in een ruimtelijke situatie als op een tekening en aan het gebruik ervan in toepassingen. De leerlingen kunnen een lijst van fundamentele eigenschappen aanleggen voor verder gebruik in oefeningen. Die kan dan als een soort vademecum gebruikt worden.

Deze eigenschappen worden gebruikt om constructies en redeneringen te verklaren. Deze verklaringen zal men intuïtief houden. Voor de leerlingen moet wel het onderscheid duidelijk zijn tussen expliciet geformuleerde en geargumenteerde eigenschappen en intuïtieve veralgemeningen die ze in toepassingen en onderzoeksopdrachten maken.

De leerlingen hebben in de eerste en de tweede graad al kunnen ervaren dat bij de voorstelling van de driedimensionale ruimte in een vlakke voorstelling informatie verloren gaat (bijv. loodrechte stand, hoek, …). De bespreking van dit onderdeel ruimtemeetkunde biedt de gelegenheid deze ervaring te verdiepen en/of nauwkeuriger te omschrijven. Expliciet kunnen aan bod komen: kruisende rechten die als 'snijdende rechten' kunnen worden voorgesteld; de hoek tussen rechten (bijv. de ribben van een balk of kubus) wordt niet noodzakelijk in ware grootte voorgesteld; de loodrechte stand van rechten of een rechte en een vlak; de vorm van bepaalde zijvlakken van een ruimtefiguur, …. Door de leerlingen te confronteren met reële ruimtelijke figuren en met verschillende voorstellingen ervan, kunnen ze oog krijgen voor het al of niet getrouw weergeven van de ruimtelijke onderlinge ligging.
Als toepassing kan het maken van *eenvoudige doorsneden* aan bod komen, omdat daarin zowel de problematiek van het voorstellen als die van de eigenschappen ter sprake komt.

De leerlingen beschikken nu over een ruime kennis van eigenschappen uit de vlakke meetkunde die hier kan toegepast worden op *problemen in ruimtelijke situaties*. Het is daarbij zinvol telkens voldoende aandacht te besteden aan het zichtbaar maken van de vlakke situatie waarin de eigenschappen worden toegepast (bijv. op een ruimtefiguur, op een tekening; zo bijvoorbeeld hoeft een gelijkzijdige driehoek helemaal niet als gelijkzijdig voorgesteld te worden in een tekening). Op zich versterkt dit al het ruimtelijk inzicht en het ruimtelijk voorstellingsvermogen.

Problemen die aan bod kunnen komen zijn: toepassingen van eigenschappen van evenwijdige rechten, van gelijkvormige driehoeken (evenwijdige snijvlakken in een driezijdige piramide), de stelling van Pythagoras, berekeningen van oppervlakte en inhouden, de vorm en de oppervlakte van een doorsnede van een kubus of balk met een vlak, de hoek gevormd door snijdende rechten die de hoekpunten van een balk verbinden, de lengte berekenen van een bepaalde route afgelegd op een ruimtefiguur, de verhouding van beeld en origineel bij een fototoestel in functie van de afstand tot de camera, de verhouding van de oppervlakte van een schijfje en zijn schaduw in functie van de afstand tot de lichtbron, het berekenen van de omtrek van een breedtecirkel als de aardstraal gegeven is, de snelheid van een geostationaire satelliet, de bereikbaarheid van een antenne voor signalen van een satelliet, ….

5.2.14 Financiële algebra A

ALGEMENE SITUERING ONDERWERP

Financiële algebra is niet alleen een vormend maar ook een belangrijk praktisch onderdeel van de wiskunde. In hun later leven zullen heel wat leerlingen geconfronteerd worden met vormen van beleggen of vormen van lenen. Daarom heeft de studie van financiële algebra zowel een wiskundig als een sociaal-maatschappelijk aspect. Beide aspecten zijn even belangrijk en moeten bijgevolg allebei voldoende aandacht krijgen.

Wiskundige begrippen die kunnen toegepast worden zijn o.a. de eerstegraadsfunctie (bijvoorbeeld: enkelvoudige interest), de exponentiële functie (bijvoorbeeld: samengestelde interest, de opeenvolgende aflossingsbestanddelen bij een schuldaflossing met constante annuïteit), meetkundige rij (bijvoorbeeld: kapitaalsvorming), iteratie (bijvoorbeeld: het bepalen van het jaarlijkse kostenpercentage bij een consumentenkrediet). Het probleemoplossend denken wordt bevorderd door de leerlingen te confronteren met verschillende praktische situaties.

De theoretische kennis mag niet losgekoppeld worden van de realiteit. De leerlingen moeten, als toekomstige consumenten, vaardig worden in het evalueren van het ruime aanbod binnen de financiële wereld. Het is niet mogelijk dat alle bestaande vormen van beleggen en lenen besproken worden. Bovendien ontstaan er voortdurend nieuwe vormen. Het is nodig dat de leerlingen zo opgeleid worden dat zij de transfer kunnen maken naar bestaande of nieuwe vormen.

Financiële algebra is sterk gebonden aan economische conjunctuur en wetgeving. Bijgevolg moet de leraar zich op de hoogte houden van bijvoorbeeld wijziging van rentevoeten, van roerende voorheffing, van wettelijke regels enz.

zodat deze wijzigingen onmiddellijk kunnen opgenomen worden in de lessituatie. Informatie vindt men in de economische bladzijden van dagbladen en tijdschriften, bij de financiële instellingen en op het internet.

Met de leerlingen kan besproken worden wat de voor- en nadelen zijn van een zichtrekening, van een spaarrekening, van bepaalde soorten beleggingen (termijnrekening, kasbons, fondsen, ...), wat de gemiddelde kostprijs is van een bouwgrond en van een woning, hoeveel een gezinsinkomen moet bedragen om een bepaalde lening aan te kunnen gaan, of een bepaald goed beter gekocht wordt door middel van een consumentenkrediet of door gebruik te maken van spaargeld, enz.

Bij het oplossen van een probleem moeten de leerlingen een goed onderscheid kunnen maken tussen enkelvoudige en samengestelde interest, tussen kapitaalsvorming en schuldaflossing, tussen de aard van de annuïteit (dadelijk ingaand of uitgesteld), tussen de aard van de rentevoet (jaarlijks, semestrieel, ...), enz.

De ervaring leert dat heel wat leerlingen moeite hebben om deze leerstof te verwerken. De leerlingen moeten zich niet alleen kunnen inleven in de materie maar moeten hun kennis ook geregeld actualiseren. Daarom zal men voldoende tijd nemen om de doelstellingen te realiseren.

In studierichtingen waar in het lessenrooster een economisch leervak voorkomt (bedrijfshuishoudkunde, bedrijfsbeheer) is het aangewezen dat er overleg is met de betrokken leerkrachten.

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

Aanbeveling lestijden: ***ca. 35 lestijden***

BASISDOELSTELLINGEN

FA1	Het verschil uitleggen tussen enkelvoudige en samengestelde interest.
FA2	Een jaarlijkse rentevoet omzetten in een gelijkwaardige maandelijkse, trimestriële of semestriele rentevoet en omgekeerd
FA3	Een aantal beleggingsvormen vergelijken en het nettorendement ervan berekenen.
FA4	Het verschil uitleggen tussen een post- en een prenumerando annuïteit.
FA5	De eindwaarde en het termijnbedrag berekenen bij een postnumerando kapitaalsvorming.
FA6	Het te lenen bedrag en het termijnbedrag berekenen bij een schuldaflossing met dadelijk ingaande annuïteit en met uitgestelde annuïteit.
FA7	Het bedrag berekenen dat moet betaald worden als de schuld wordt afgelost voor de eindvervaldag.
FA8	Het termijnbedrag berekenen bij een variabele rentevoet.
FA9	Het verschil uitleggen tussen een lening met constante annuïteit en een lening met constante kapitaalsaflossing.
FA10	Een aflossingstabel opstellen met behulp van ICT en interpreteren.
FA11	De soorten consumentenkrediet kennen.
FA12	Het jaarlijkse kostenpercentage en het termijnbedrag bij een consumentenkrediet berekenen.
FA13	In verband met de aangeleerde begrippen informatie verzamelen en interpreteren.
FA14	De aangeleerde begrippen kaderen binnen de actuele situatie.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Bij *enkelvoudige en samengestelde interest* kan men uitgaande van de hoofdformules de formules voor het berekenen van beginwaarde, rentevoet en tijd afleiden. Maar het is evengoed mogelijk in de hoofdformule de gegevens in te vullen en de gevraagde parameter te berekenen zoals bij een vergelijking. Belangrijke toepassingen zijn de zichtrekening, de spaarrekening en de termijnrekening. Oefeningen op het berekenen van de netto-interest bij een zichtrekening of een spaarrekening hebben geen zin. Hoewel er algemene regels zijn voor het bepalen van de valutadata zijn er teveel afwijkingen naargelang de soort verrichting en de financiële instelling. Bij een spaarrekening moet er bovendien rekening worden gehouden met een getrouwheids- en een aangroeipremie. Deze premies zijn ook aan bepaalde voorwaarden verbonden. Dit alles maakt het moeilijk om een juiste interestberekening te laten maken door de leerlingen. Om deze begrippen te illustreren kan men gebruik maken van bankdocumenten zonder dat dit aanleiding moet geven tot berekeningen.

Heel wat aandacht moet besteed worden aan het sociaal-maatschappelijke aspect van *diverse beleggingsvormen* zoals kasbons, verzekeringsbons, fondsen, e.d. Hierbij zal voldoende nadruk gelegd worden op de verschillen tussen deze beleggingen. Bij het berekenen van het nettorendement moet rekening gehouden worden met de inschrijfkosten en de uitbetalingkosten. Er kan ook op gewezen worden dat andere factoren zoals inflatie en mogelijke fiscale mindering ook invloed hebben op het nettorendement.

Bij toepassingen op *gelijkwaardige rentevoeten* moeten de leerlingen inzien dat afrondingen tot niet te verwaarlozen verschillen kunnen leiden. Men kan er de leerlingen op wijzen dat in de praktijk hierover geen eenduidigheid bestaat.

De studie van de *kapitaalsvorming* d.m.v. periodieke stortingen kan zich beperken tot het bepalen van de eindwaarde en het termijnbedrag. Het verschil tussen een post- en een prenumerando rente wordt onderzocht. Belangrijker is de studie van de *schuldaflossing.* Het te lenen bedrag komt overeen met de beginwaarde van een kapitaalsvorming. Dit bedrag V kan dan afgeleid worden uit de gelijkheid $V.u^n = A_n$ (met $u = 1 + i = 1 + \frac{p}{100}$ en A_n is de eindwaarde van een kapitaalsvorming na n perioden). Bij het berekenen van het te lenen bedrag of het termijnbedrag zal men rekening houden met de gelijkwaardige rentevoet als de periodieke stortingen maandelijks, trimestrieel of semestrieel gebeuren. Ook de vraag naar het totaal af te betalen bedrag en het reële bedrag dat men terugbetaalt bij een schuldaflossing kan hier gesteld worden. Leningen met veranderlijke rentevoet komen momenteel veel voor. Daarom is het belangrijk de gevolgen te bestuderen bij een verandering van de rentevoet. Bij het vervroegd terugbetalen van de resterende schuld wordt er een wederbeleggingsvergoeding berekend. Als voor de schuldrest een lagere interestvoet kan bekomen worden kan het interessant zijn de schuldrest om te zetten in een nieuwe lening hetzij bij dezelfde financiële instelling, hetzij bij een andere. Hierbij moet er wel rekening gehouden worden met bijkomende kosten. Bij dezelfde financiële instelling kunnen die kosten zich beperken tot dossierkosten. Wordt de nieuwe lening aangegaan bij een andere financiële instelling dan moet men buiten de wederbeleggingsvergoeding ook rekening houden met o.a. dossierkosten, notariskosten, inschrijvingskosten, e.d.

Bij het opstellen van *een aflossingsplan* toont men aan dat het termijnbedrag kan opgesplitst worden in een aflossingsbestanddeel en een rentebestanddeel evenals dat bij een schuldaflossing met constante annuïteit elk aflossingsbestanddeel gelijk is aan het voorgaande vermenigvuldigd met $u = 1 + i$. In economisch gerichte studierichtingen kan er op gewezen worden dat de verschillende waarden uit een aflossingstabel op verschillende rekeningen geboekt worden. Ook in de belastingsaangifte worden rente- en aflossingsbestanddeel verschillend genoteerd.

De verschillende soorten *consumentenkrediet* (verkoop op afbetaling, lening op afbetaling, financieringshuur (leasing)) kunnen door voorbeelden geïllustreerd worden. Men kan nagaan of de bedragen of het jaarlijkse kostenpercentage die in advertenties worden weergegeven wel juist zijn. Voor het berekenen van het jaarlijkse kostenpercentage wordt in het KB van 04.08.92 een iteratiemethode aangegeven. De berekeningen gebeuren met behulp van ICT. Ze worden stopgezet als vijf cijfers na de komma dezelfde zijn. Het kostenpercentage wordt afgerond tot twee cijfers na de komma.
Het jaarlijkse kostenpercentage kan echter ook goed benaderd worden d.m.v. de regula falsi, zoals bij het bepalen van de rentevoet bij een schuldaflossing. Het maandelijkse lastenpercentage is tegenwoordig niet meer van toepassing. Controle op het juist zijn van de weergegeven getallen in een advertentie kan gebeuren met behulp van de formules: $M = \frac{k.\sqrt[12]{u^n}.(\sqrt[12]{u} - 1)}{\sqrt[12]{u^n} - 1}$ of $k = \frac{M}{\sqrt[12]{u} - 1}.(1 - \frac{1}{\sqrt[12]{u^n}})$ waarbij $u = 1 + \frac{JKP}{100}$, JKP = jaarlijks kostenpercentage ,

k = contante waarde - eventueel voorschot , M = de maandelijkse termijn en n = aantal stortingen . (Vergelijk deze formules met deze bij een schuldaflossing).

Bij eenvoudige oefeningen is het gebruik van een formularium te verkiezen boven de ingebouwde financiële functies (bijv. in Excel). Het gebruik van ICT is wel nuttig bij het opstellen van een aflossingstabel of voor het onderzoeken van verschillende simulaties, bijvoorbeeld: de invloed van een renteverandering bij een lening op de aflossingstabel, het onderscheid tussen verschillende vormen van lening, het virtueel aankopen van een huis, binnen de actuele situatie de meest aangewezen belegging onderzoeken, … Daardoor leren de leerlingen diverse informatiebronnen en –kanalen kritisch selecteren, raadplegen, analyseren en toepassen waardoor voldaan wordt aan een aantal vakoverschrijdende eindtermen in verband met ‘leren leren’.

UITBREIDINGSDOELSTELLINGEN

FA15	Het aantal stortingen en de rentevoet bepalen bij een kapitaalsvorming.
FA16	Het aantal stortingen en de rentevoet bepalen bij een schuldaflossing met dadelijk ingaande annuïteit.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Wanneer men het aantal stortingen berekent, komt het meermaals voor dat het resultaat geen natuurlijk getal is. Verschillende mogelijke oplossingen kunnen dan besproken worden o.a. aanpassing van de annuïteit, het betalen van een bijkomende storting, …
Het bepalen van het percent gebeurt met behulp van een iteratiemethode, bijv. de regula falsi. Het inschakelen van ICT-hulpmiddelen is hierbij aangewezen.

5.2.15 Financiële algebra B

ALGEMENE SITUERING ONDERWERP

Financiële algebra is niet alleen een vormend maar ook een belangrijk praktisch onderdeel van de wiskunde. In hun later leven zullen heel wat leerlingen geconfronteerd worden met vormen van beleggen of vormen van lenen. Daarom heeft de studie van financiële algebra zowel een wiskundig als een sociaal-maatschappelijk aspect. Beide aspecten zijn even belangrijk en moeten bijgevolg allebei voldoende aandacht krijgen.

Wiskundige begrippen die kunnen toegepast worden zijn o.a. de eerstegraadsfunctie (bijvoorbeeld: enkelvoudige interest), de exponentiële functie (bijvoorbeeld: samengestelde interest, de opeenvolgende aflossingsbestanddelen bij een schuldaflossing met constante annuïteit), meetkundige rij (bijvoorbeeld: kapitaalsvorming). Het probleemoplossend denken wordt bevorderd door de leerlingen te confronteren met verschillende praktische situaties.

De theoretische kennis mag niet losgekoppeld worden van de realiteit. De leerlingen moeten, als toekomstige consumenten, vaardig worden in het evalueren van het ruime aanbod binnen de financiële wereld. Het is niet mogelijk dat alle bestaande vormen van beleggen en lenen besproken worden. Bovendien ontstaan er voortdurend nieuwe vormen. Het is nodig dat leerlingen zo opgeleid worden dat zij de transfer kunnen maken naar bestaande of nieuwe vormen.

Financiële algebra is sterk gebonden aan economische conjunctuur en wetgeving. Bijgevolg moet de leraar zich op de hoogte houden van bijvoorbeeld wijziging van rentevoeten, van roerende voorheffing, van wettelijke regels enz. zodat deze wijzigingen onmiddellijk kunnen opgenomen worden in de lessituatie. Informatie vindt men in de economische bladzijden van dagbladen en tijdschriften, bij de financiële instellingen en op het internet.

Met de leerlingen kan besproken worden wat de voor- en nadelen zijn van een zichtrekening, van een spaarrekening, van bepaalde soorten beleggingen (termijnrekening, kasbons, fondsen, ...), wat de gemiddelde kostprijs is van een bouwgrond en van een woning, hoeveel een gezinsinkomen moet bedragen om een bepaalde lening aan te kunnen gaan, of een bepaald goed beter gekocht wordt door middel van een consumentenkrediet of door gebruik te maken van spaargeld, enz.

Bij het oplossen van een probleem moeten de leerlingen een goed onderscheid kunnen maken tussen enkelvoudige en samengestelde interest, tussen kapitaalsvorming en schuldaflossing, tussen de aard van de rentevoet (jaarlijks, semestrieel, ...), enz.

De ervaring leert dat heel wat leerlingen moeite hebben om deze leerstof te verwerken. De leerlingen moeten zich niet alleen kunnen inleven in de materie maar moeten hun kennis ook geregeld actualiseren. Daarom zal men voldoende tijd nemen om de doelstellingen te realiseren.
Als op het lessenrooster van de studierichting het leervak bedrijfsbeheer voorkomt, kunnen deze onderwerpen behandeld worden in samenspraak met de betrokken leerkracht.

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

Aanbeveling lestijden: ***ca. 25 lestijden***

BASISDOELSTELLINGEN

FA1	Het verschil uitleggen tussen enkelvoudige en samengestelde interest.
FA2	Een jaarlijkse rentevoet omzetten in een gelijkwaardige maandelijkse, trimestriële of semestriele rentevoet en omgekeerd.
FA3	De eindwaarde en het termijnbedrag berekenen bij een postnumerando kapitaalsvorming.
FA4	Het te lenen bedrag en het termijnbedrag berekenen bij een schuldaflossing met dadelijk ingaande annuïteit.
FA5	Het bedrag berekenen dat moet betaald worden als de schuld wordt afgelost voor de eindvervaldag.
FA6	Het verschil uitleggen tussen een lening met constante annuïteit en een lening met constante kapitaalsaflossing.
FA7	Een aflossingstabel interpreteren.
FA8	Uit een reclameaanbieding het soort consumentenkrediet herkennen en de gegevens ervan controleren.
FA9	In verband met de aangeleerde begrippen informatie verzamelen en interpreteren.
FA10	De aangeleerde begrippen kaderen binnen de actuele situatie.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Bij *enkelvoudige en samengestelde interest* kan men uitgaande van de hoofdformules de formules voor het berekenen van beginwaarde en rentevoet afleiden. Maar het is evengoed mogelijk in de hoofdformule de gegevens in te vullen en de gevraagde parameter te berekenen zoals bij een vergelijking. Belangrijke toepassingen zijn de zichtrekening, de spaarrekening en de termijnrekening. Oefeningen op het berekenen van de netto-interest bij een zichtrekening of een spaarrekening hebben geen zin. Hoewel er algemene regels zijn voor het bepalen van de valutadata zijn er teveel afwijkingen naargelang de soort verrichting en de financiële instelling. Bij een spaarrekening moet er bovendien rekening worden gehouden met een getrouwheids- en een aangroeipremie. Deze premies zijn ook aan bepaalde voorwaarden verbonden. Dit alles maakt het moeilijk om een juiste interestberekening te laten maken door de leerlingen. Om deze begrippen te illustreren kan men gebruik maken van bankdocumenten zonder dat dit aanleiding moet geven tot berekeningen.

Heel wat aandacht moet besteed worden aan het sociaal-maatschappelijke aspect van *diverse beleggingsvormen* zoals kasbons, verzekeringsbons, fondsen, e.d. Hierbij zal voldoende nadruk gelegd worden op de verschillen tussen deze beleggingen.

Bij toepassingen op *gelijkwaardige rentevoeten* moeten de leerlingen inzien dat afrondingen tot niet te verwaarlozen verschillen kunnen leiden. Men kan er de leerlingen op wijzen dat in de praktijk hierover geen eenduidigheid bestaat.

De studie van de *kapitaalsvorming* d.m.v. periodieke stortingen kan zich beperken tot het bepalen van de eindwaarde en het termijnbedrag bij een postnumerando rente. Belangrijker is de studie van *de schuldaflossing*. Het te lenen bedrag komt overeen met de beginwaarde van een kapitaalsvorming. Dit bedrag V kan dan afgeleid worden uit de gelijkheid $V.u^n = A_n$ (met $u = 1 + i = 1 + \frac{p}{100}$ en A_n is de eindwaarde van een kapitaalsvorming na n perioden). Bij het berekenen van het te lenen bedrag of het termijnbedrag zal men rekening houden met de gelijkwaardige rentevoet als de periodieke stortingen maandelijks, trimestrieel of semestrieel gebeuren. Ook de vraag naar het totaal af te betalen bedrag en het reële bedrag dat men terugbetaalt bij een schuldaflossing kan hier gesteld worden. Bij het vervroegd terugbetalen van de resterende schuld wordt er een wederbeleggingsvergoeding berekend.

Bij het interpreteren van *een aflossingsplan* kan men wijzen op het feit dat het termijnbedrag kan opgesplitst worden in een aflossingsbestanddeel en een rentebestanddeel, evenals dat bij een schuldaflossing met constante annuïteit elk aflossingsbestanddeel gelijk is aan het voorgaande vermenigvuldigd met $u = 1 + i$.

De verschillende soorten *consumentenkrediet* (verkoop op afbetaling, lening op afbetaling, financieringshuur (leasing)) kunnen door voorbeelden geïllustreerd worden. Het begrip maandelijkse lastenpercentage is niet meer van toepassing. Controle op het juist zijn van de weergegeven getallen in een advertentie kan gebeuren met behulp van de formules: $M = \frac{k.\sqrt[12]{u^n}.(\sqrt[12]{u} - 1)}{\sqrt[12]{u^n} - 1}$ of $k = \frac{M}{\sqrt[12]{u} - 1}.(1 - \frac{1}{\sqrt[12]{u^n}})$ waarbij $u = 1 + \frac{JKP}{100}$, $JKP = \text{jaarlijks kostenpercentage}$, $k = \text{contante waarde - eventueel voorschot}$, M = de maandelijkse termijn en n = aantal stortingen. (Vergelijk deze formules met deze bij een schuldaflossing).

Bij eenvoudige oefeningen is het gebruik van een formularium te verkiezen boven de ingebouwde financiële functies (bijv. in Excel). Het gebruik van ICT is wel nuttig bij het opstellen van een aflossingstabel of voor het onderzoeken van verschillende simulaties, bijvoorbeeld: de invloed van een renteverandering bij een lening op de aflossingstabel, het onderscheid tussen verschillende vormen van lening, het virtueel aankopen van een huis, binnen de actuele situatie de meest aangewezen belegging onderzoeken, … Daardoor leren de leerlingen diverse informatiebronnen en –kanalen kritisch selecteren, raadplegen, analyseren en toepassen waardoor voldaan wordt aan een aantal vakoverschrijdende eindtermen in verband met ‘leren leren’.

5.2.16 Statistiek

BEGINSITUATIE

De vooropleiding van de leerlingen is afhankelijk van het aantal wekelijkse lestijden wiskunde en het leerplan dat de leerlingen hebben verwerkt in de tweede graad. Zo is er een onderscheid in de wijze waarop de spreidingsmaten werden besproken.

ALGEMENE INLEIDING

Het onderdeel statistiek kan in de derde graad geïnterpreteerd worden als het opstellen van, het uitvoeren van en het trekken van conclusies uit een enquête of een bevraging in de klas, op school of in de buurt, leefomgeving of familie van de leerlingen. Door een dergelijk statistische onderzoekje kunnen de leerinhouden van de tweede graad opgefrist worden. De nieuwe leerinhouden worden dan ingepast in een praktisch kader.

In het leerproces moet de klemtoon vooral liggen op het inzicht in de verwerking van statistische gegevens en op de interpretatie van de bekomen parameters of voorstellingen. Het turven van een veelheid van gegevens wordt achterwege gelaten, door de gegevens in frequentietabel aan te bieden of het turfwerk te laten uitvoeren met behulp van ICT. Het gebruik van de statistische functies en grafische mogelijkheden van rekenmachine of computer is dus onvermijdbaar. Zo is het ook mogelijk de randomgenerator van het toestel te gebruiken om een verzameling gegevens (bijv. resultaten van kansexperimenten zoals het werpen van dobbelstenen) te laten aanmaken.

Statistiek is het onderdeel bij uitstek waar realistische verbanden met onderdelen buiten de wiskunde kunnen gelegd worden. Het verdient aanbeveling ook toepassingen te zoeken in de specifieke vakken van het studierichtinggedeelte.

Statistiek is ook het onderdeel waar gemakkelijk in groep kan gewerkt worden, bij het verzamelen van gegevens, het inbrengen en/of interpreteren van gegevens.

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

Aanbeveling lestijden: **ca. 20 lestijden**

BASISDOELSTELLINGEN

S1	Statistische gegevens, centrum- en spreidingsmaten en grafische voorstellingen van statistische gegevens interpreteren.	
S2	Met voorbeelden het belang duidelijk maken van de representativiteit van een steekproef voor het formuleren van statistische besluiten over de populatie.	14
S3	Met behulp van ICT het rekenkundige gemiddelde en de standaardafwijking berekenen van statistische gegevens.	15
S4	Het rekenkundige gemiddelde en de standaardafwijking gebruiken als karakteristieken van een normale verdeling.	16

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerlingen kennen al een aantal statistische begrippen uit hun vooropleiding. Zo kennen ze voor niet-gegroepeerde gegevens verschillende begrippen: frequentie, gemiddelde als centrummaat en interkwartielafstand als spreidingsmaat. Ze zijn al vertrouwd met het verzamelen van gegevens en een statistische verwerking ervan.

Toch lijkt het zinvol deze begrippen even te hernemen. Daarbij worden de verschillende begrippen herhaald en aangevuld. Best gaat men daarbij uit van de grafische voorstelling, waarbij men een aantal gerichte vraagjes kan stellen: bijv. geeft de grafiek weer wat er aan de hand is of gebruikt men hier best het gemiddelde of de mediaan als maat, of welk is het effect van uitschieters in de gegevens. Het is ook een gelegenheid om de betekenis van het begrip steekproef beter te onderbouwen. Herhaling kan ook naar aanleiding van een onderzoek, bijv. in de eigen groep. Daarbij beperkt men zich niet tot het berekenen van de parameters, maar bespreekt men ook de wijze waarop de gegevens verzameld worden en het onvermijdelijke verlies aan informatie. Zo komt men op het spoor van nieuwe inzichten. Een onderzoek naar de gemiddelde schoenmaat zal verschillen naargelang de klasgroep (bijv. verschillende graad, leerlingen uit het basisonderwijs of uit het secundair onderwijs). Dat kan veralgemeend worden naar dezelfde situatie bij bijv. een groep basketbalspelers of een groep pygmeeën. De vraag naar eenzelfde onderzoek bij de gehele Vlaamse bevolking leidt dan naar de vraag van de haalbaarheid ervan en het kiezen van een representatieve deelgroep, een steekproef. Dit biedt de kans om enkele steekproefproblemen te bespreken: waarom een steekproef, wanneer de volledige populatie, de omvangrijkheid van de populatie, de kostprijs, de aard van de test, ….

Men kan hier ook ingaan op het al of niet vertekend beeld dat resultaten bij steekproeven geven. Steekproeven waarbij mensen vrijwillig beslissen om mee te doen (televoting, …) en opportunistische steekproeven (de eenheden zijn gemakkelijk of goedkoop te bereiken, bijv. een enquête in een winkelstraat) leveren meestal onbetrouwbare informatie op met betrekking tot de hele populatie. De leerlingen moeten bij concrete voorbeelden kunnen aangeven of een steekproef mogelijk vertekend is en wat het effect daarvan is op een statistische uitspraak op basis van die steekproef.

De leerlingen hebben voorheen gewerkt met niet-gegroepeerde gegevens. Bij een groot aantal gegevens wordt echter best met groepering in klassen gewerkt. Dit zelf uitvoeren (indelen, turven, rekenen met klassenmiddens, …) valt buiten de verwachtingen ten aanzien van deze leerlingen. Daartegenover staat dat rekenmachine en computer vaak automatisch met klassen werken. Zelfs een groot aantal gegevens kan nog individueel worden ingegeven, maar wordt gegroepeerd weergegeven via instellingen in de software. Deze instellingen aanpassen biedt de mogelijkheid te illustreren welke de effecten kunnen zijn van de keuze van klassenbreedte, aantal klassen, … Zo kunnen leerlingen toch begrijpen welke de kernelementen zijn van een gegroepeerde verwerking, zonder dat ze effectief met de berekeningen geconfronteerd worden.

Aansluitend bij deze uitdieping naar gegroepeerde gegevens kan aandacht besteed worden aan het lezen en interpreteren van en voorstellen in histogrammen. Daarbij wordt erop gewezen dat de totale oppervlakte van het histogram gelijk is aan de steekproefgrootte of populatiegrootte.

Voor het samenvatten in een getal van de spreiding van de gegevens wordt een nieuw begrip ingevoerd: de standaardafwijking. Hierbij moet erop gewezen worden dat er twee vormen bestaan om ze te berekenen (steekproef of populatie). De detaillering hiervan valt buiten de doelstellingen voor deze leerlingen. Bij deze leerlingen werkt men verder met de algemene formule voor de steekproef.

Door het bespreken van enkele gegeven situaties (of een statistisch onderzoek) kan men aannemelijk maken dat voor een aantal aspecten, zeg maar ‘variabelen’, de verdeling van de gegevens een bijzondere vorm benadert, die van de klokvorm, of Gausskromme (bijv. een lengtetest bij een bevolking in een diagram uitzetten met behulp van gegroepeerde gegevens; meetgegevens over het exacte gewicht, inhoud, … van een groot aantal verpakkingen van eenzelfde product (melkflessen, suiker, koffie, …) gegroepeerd uitzetten).

Het is niet de bedoeling bij deze leerlingen de normale verdeling wiskundig te onderbouwen. Wel worden een aantal voorbeelden en tegenvoorbeelden (bijv. lonen) ter illustratie van de relevantie ervan aangeboden. Bij voorbeelden van de normale verdeling moet de aandacht gevestigd worden op een aantal belangrijke intervallen op basis van de karakteristieken gemiddelde en standaardafwijking. Zo bevat $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$ ongeveer 68 % van de gegevens, $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$ ongeveer 95 % en $[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$ praktisch alle gegevens. Dit kan in enkele concrete gevallen, waar men ook over de gegevens beschikt, nagerekend worden. Dit inzicht maakt van rekenkundig gemiddelde en standaardafwijking interessante parameters over een groep gegevens, tenminste als die ‘normaal’ verdeeld is. Daarnaast is het belangrijk dat de leerlingen beseffen dat de oppervlakte onder de krommen van de normaalverdeling altijd gelijk is aan 1 (100 %).

Omdat de wiskundige onderbouw bij deze leerlingen ontbreekt, kan het functioneel beschrijven van de normale verdeling hier weinig bijkomend inzicht brengen.
Wel kunnen vragen aan bod komen als:

- gegeven een frequentieverdeling (grafiek), geef aan of ze min of meer een normale verdeling volgt en lees daarop een benadering af voor de parameters zoals gemiddelde en standaardafwijking;
- een aantal gegeven grafieken van verdelingsfuncties koppelen aan gegeven verdelingen van bepaalde populaties;
- proberen een verklaring te geven voor het al of niet normaal verdeeld zijn van bepaalde gegevenssituaties, bijv. zo zou lengte in een bepaalde klasse wel normaal verdeeld zijn en daartegenover gewicht niet; de verdeling van de voetlengte binnen de populatie van de leden van gezinnen met ouders jonger dan 35 jaar is niet normaal verdeeld, waarom;
- proberen een verklaring te geven voor bepaalde kenmerken van normaalverdelingen, bijvoorbeeld ‘hoe smaller de klok, hoe hoger de top’.

- via ‘lineaire’ interpolatie een schatting berekenen voor de kans op een lichaamslengte boven (of onder) een bepaalde grens, uitgaande van een gegeven normale verdeling en met gegeven parameters gemiddelde en standaardafwijking.

5.2.17 Telproblemen en kansrekening

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

Aanbeveling lestijden: ***ca. 15 lestijden***

BASISDOELSTELLINGEN

TK1	In eenvoudige situaties een telprobleem oplossen door gebruik te maken van een boomdiagram, een venndiagram of een schema.
TK2	Het aantal elementen bepalen van de doorsnede, de vereniging, het verschil of het complement van eindige verzamelingen in functie van het op te lossen telprobleem.
TK3	De kans berekenen van een uitkomst in een situatie waarin alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.
TK4	Kansen berekenen door gebruik te maken van een kansboom of de somregel.
TK5	Het begrip kans interpreteren in termen van relatieve frequenties.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In allerlei situaties moeten op een verstandige of handige wijze aantallen geteld worden (bijv. hoeveel autonummerplaten kunnen in het Belgische systeem uitgereikt worden). Zonder de gebruikelijke formules van de combinatieleer op te stellen kunnen *eenvoudige telproblemen* toch meer systematisch aangepakt worden, bijvoorbeeld door ze voor te stellen met een boomdiagram, een venndiagram of een ander schema. Tellen is dan het aantal wegen, deelverzamelingen, mogelijke gebieden zoeken. Hier komt vooral de schematische aanpak van een probleem tot uiting.

Naarmate opgaven complexer worden, moet ook het arsenaal aan hulpmiddelen worden uitgebreid. Voor het tellen moeten we soms de doorsnede, de unie, het verschil of het complement van eindige verzamelingen bepalen.

Het is niet de bedoeling voor deze leerlingen het begrip kans axiomatisch op te bouwen. Een minimale terminologie is echter wel vereist (bijv. gebeurtenis, uitkomst, …). Het gooien van een eerlijk muntstuk of van een normale dobbelsteen zijn voorbeelden van *kansexperimenten* waarbij elke uitkomst *even waarschijnlijk* is. Door middel van gepaste voorbeelden zoals het opgooien van een punaise of van de kwaliteitscontrole van gloeilampen kan gewezen worden op voorbeelden waarbij niet altijd elke uitkomst even waarschijnlijk is.

Om zinvol op het begrip kans te kunnen ingaan moeten leerlingen het onderscheid leren maken tussen situaties met uitkomsten met een gelijke waarschijnlijkheid (bijv. op grond van symmetrieoverwegingen) en situaties met uitkomsten waarbij dat niet geldt. In het ene geval kan de kans ‘berekend’ worden bijvoorbeeld met de formule van Laplace (het aantal gunstige gevallen gedeeld door het aantal mogelijke gevallen), in het andere geval zal men de kans experimenteel moeten schatten. Er dient dus op gewezen dat de formule van Laplace alleen kan gebruikt worden in een kansexperiment waarbij alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.
Bij de voorbeelden beperkt men zich niet tot het berekenen van individuele of enkelvoudige uitkomsten. Ook verzamelingen van uitkomsten kunnen berekend worden, maar vermits begrippen zoals variatie en combinatie (zie uitbreiding) niet aan bod komen kan dit beperkt blijven tot eenvoudige situaties.

Bij de berekening van kansen waarbij de uitkomsten niet even waarschijnlijk zijn, kan het gebruik van schema’s zoals boomdiagrammen een uitweg bieden en komt de leerstof in verband met de telproblemen van pas.

Het begrip kans kan op natuurlijke wijze gekoppeld worden aan *relatieve frequentie* uit de beschrijvende statistiek. Zeggen dat de kans op vijf ogen bij het gooien van een dobbelsteen gelijk is aan een zesde is zo te interpreteren, dat ongeveer een zesde van het aantal worpen een 5 oplevert bij een groot aantal keer opgooien. Het verband tussen (het meer theoretische) kansbegrip en relatieve frequentie moet geregeld geëxpliciteerd worden, zowel bij het aanbrengen van het kansbegrip, als bij de interpretatie van resultaten.

Tot slot kan men de leerlingen laten inzien dat vele voorbeelden tot eenzelfde model kunnen worden teruggebracht. Bijv. de kans op drie slechte lampen in een doos van tien als de kans op een slechte gloeilamp 4 % is; de kans op één of twee slechte eieren bij het bakken van een taart als je twaalf eieren nodig hebt en de kans op een slecht ei 2 % is; …

UITBREIDINGSDOELSTELLINGEN

TK6	Telproblemen oplossen waarin de volgorde al dan niet belangrijk is.
TK7	Kansen berekenen door gebruik te maken van de productregel en complementregel.
TK8	Kansen schatten met behulp van relatieve frequenties in een situatie met statistische gegevens.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Omdat de mogelijkheden bij het tellen soms groot worden, dringt een meer algemenere aanpak zich op. Bij het tellen merken we duidelijk twee soorten: tellen waarbij de volgorde belangrijk is en tellen waarbij de volgorde niet belangrijk is. De begrippen variatie, permutatie (als speciale variatie) en combinatie worden aangebracht samen met hun formules. Het herkennen van deze nieuwe begrippen in opdrachten is voor de leerlingen niet altijd gemakkelijk. Voldoende en geleidelijke inoefening is noodzakelijk.

Het begrip kans is al verbonden met het begrip relatieve frequentie. De leerlingen kunnen nu vanuit een groot aantal experimenten met behulp van relatieve frequentie kansen bepalen. Bijv. wat is het aandeel van een uitkomst in het totale aandeel? Dit biedt de mogelijkheid om ruimere problemen te bestuderen en bijv. kansexperimenten aan te pakken waarbij niet alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.

Een interessante toepassing is het raadplegen van sterftetabellen i.v.m. overlevingskansen van bepaalde leeftijdsgroepen, zoals in gebruik in de actuariële wiskunde. Hier wordt de gelegenheid geboden kansen te berekenen vanuit tabellen opgebouwd uit statistisch onderzoek. De leerlingen kunnen zo aanvoelen dat niet alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn en dat dus niet steeds de formule van Laplace aangewezen is voor kansberekeningen.

5.2.18 Regressie

ALGEMENE INLEIDING

Lineaire regressie is een verder bouwen op wat al in beschrijvende statistiek gezien werd. In beschrijvende statistiek werd het aantal variabelen, dat werd geobserveerd, beperkt tot één. Bij lineaire regressie is dit anders. Er wordt een mogelijke samenhang of correlatie onderzocht tussen twee veranderlijken.
Met dit onderwerp kan de zelfactiviteit, de creativiteit van de leerlingen gestimuleerd worden. De leerlingen kunnen zelf bepaalde verbanden tussen veranderlijken formuleren, daarna de nodige gegevens (meetresultaten) verzamelen en controleren of er inderdaad een afhankelijkheid bestaat tussen de twee variabelen.
Ook bij labo-oefeningen in de nijverheidstechnieken kan dit onderwerp van pas komen.

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

Aanbeveling lestijden: **ca. 15 lestijden**

BASISDOELSTELLINGEN

RG1	De betekenis van onafhankelijk en afhankelijke stochastische veranderlijke onderscheiden in praktische situaties.
RG2	De relatie tussen twee stochastische veranderlijken grafisch voorstellen met behulp van ICT-middelen.
RG3	Aan de hand van een spreidingsdiagram de samenhang (correlatie) tussen twee stochastische veranderlijken weergeven.
RG4	De verschillende soorten correlatie aangeven aan de hand van figuren.
RG5	De correlatiecoëfficiënt berekenen met behulp van ICT-middelen.
RG6	De correlatiecoëfficiënt interpreteren in verband met het verband tussen de veranderlijken.
RG7	Omschrijven waarom een rechte de best passende rechte is.
RG8	Aan de hand van ICT, de vergelijking van de regressielijn bepalen.
RG9	Voorstellen van de regressielijn op het spreidingsdiagram.
RG10	Vraagstukken in verband met lineaire regressie oplossen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Belangrijk bij correlatie tussen twee stochastische veranderlijken is te beslissen welke variabele als onafhankelijke genomen wordt en welke de afhankelijke veranderlijke is. Wil men de samenhang bestuderen tussen twee veranderlijken, dan is het eveneens nodig na te gaan welk soort verband tussen de variabelen bestaat (bijv. lineair, kwadratisch, exponentieel, …). Aan de hand van voorbeelden kan dit duidelijk gemaakt worden.

Na de keuze van de onafhankelijke en afhankelijke variabele, is het mogelijk om de gegevens grafisch voor te stellen. Die grafische voorstelling noemt men een spreidingsdiagram. De onafhankelijke variabele wordt uitgezet volgens de x-as en de afhankelijke veranderlijke volgens de y-as. Het is nuttig dat voor een beperkt aantal gegevens het spreidingsdiagram eens manueel getekend wordt. Maar er wordt natuurlijk zo vlug mogelijk overgegaan op het gebruik van ICT-middelen om de grafiek te construeren.

Aan de hand van goed gekozen voorbeelden, worden verschillende mogelijkheden van correlatie aangebracht. Met behulp van ICT is het mogelijk verschillende soorten van verbanden te illustreren. Meetresultaten uit labooefeningen van fysica, chemie, elektriciteit, elektronica, mechanica kunnen als basis dienen. De leerlingen moeten kunnen verwoorden over welke samenhang het gaat.

Het berekenen van de correlatiecoëfficiënt mag niet het enige doel zijn. Het is belangrijker dat de leerlingen de correlatiecoëfficiënt (een getal) in verband kunnen brengen met de soort samenhang tussen de twee variabelen. Het nodige rekenwerk gebeurt met behulp van ICT. De leerlingen moeten eveneens het verband tussen de twee variabelen verwoorden binnen de context van het probleem.

Het onderzoek naar correlatie heeft vooral als doel om vanuit die meetresultaten van de twee variabelen en de onderlinge samenhang, voorspellingen te kunnen maken. Dan komen we in het domein van de regressie.
Om voorspellingen te maken, is het belangrijk dat het verband tussen de twee variabelen in een formule uitgedrukt wordt. De kromme die ontstaat door de formule voor te stellen op het spreidingsdiagram is de regressiekromme. Bij een lineair verband spreekt men van regressielijn. De berekening van de coëfficiënten gebeurt aan de hand van de methode van de kleinste kwadraten. Voor de leerlingen is het belangrijk de idee achter de methode te vatten, niet zo zeer hoe men tot die formules komt. Dit neemt niet weg dat bij leerlingen die meer onder-

legd zijn in wiskunde, de berekeningswijze niet kan afgeleid worden. Traditioneel gebeurt die met behulp van partiële afgeleiden. Maar het kan ook anders door te steunen op het functieonderzoek van een tweedegraadsfunctie.
Bij twee veranderlijken bestaan er twee regressielijnen van y op x en van x op y. Deze lijnen vallen meestal niet samen. De ligging van beide lijnen ten opzichte van elkaar is afhankelijk van de correlatie tussen de twee variabelen. Dit heet het regressie-effect.

De leerlingen moeten gebruik makend van ICT de vergelijking van de regressielijn kunnen bepalen. Gebruik makend van de verkregen vergelijking kunnen de leerlingen vraagstukken in verband met interpolatie en extrapolatie beantwoorden.

De leerlingen dienen er ook attent op gemaakt worden dat een hoge correlatie niet noodzakelijk het gevolg is van een oorzakelijk verband. De onderzochte variabelen kunnen beïnvloed worden door andere veranderlijken. De hoge correlatie kan van het toeval afhangen. Het is best mogelijk dat het verband niet met een eerstegraadsfunctie maar door een exponentiële functie beschreven kan worden. Daarbij is de voorstelling in een spreidingsdiagram belangrijk om een eerste impressie te krijgen van een mogelijk verband. Daarnaast geven statistische verbanden vaak slechts globale tendensen en geen strenge regels aan. Bijvoorbeeld: hoewel rokers gemiddeld eerder sterven dan niet-rokers, zijn er mensen die 90 jaar oud worden terwijl ze toch veel roken. Dit is de reden waarom in de praktijk het extrapoleren gevaarlijk kan zijn.

UITBREIDINGSDOELSTELLINGEN

RG11	De correlatie tussen twee stochastische veranderlijken wiskundig benaderen.
RG12	Machts-, exponentiële verbanden onderzoeken met behulp van de technieken van lineaire regressie.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

Met een duidelijk voorbeeld van lineaire correlatie, stellen we een wiskundig mechanisme op waardoor die correlatie wordt weergegeven. Vanaf hier beperken we ons tot lineaire correlatie in het verdere verhaal.
Zo groeien de begrippen covariantie en correlatiecoëfficiënt. Indien mogelijk, kan er even stilgestaan worden waarom de correlatiecoëfficiënt een betere maat voor samenhang is als covariantie.

Door gebruik te maken van logaritmen kan men een machts- en een exponentieel verband omzetten in een lineair verband waarop dan de methode van de lineaire regressie kan toegepast worden. Denk maar aan het gebruik van enkelvoudig en dubbel logaritmisch papier.

5.2.19 Mathematiseren en oplossen van problemen

ALGEMENE INLEIDING

De leerlingen worden binnen en buiten de context van de wiskundevorming geconfronteerd met allerlei problemen, die soms relatief ingewikkeld kunnen zijn. Door hun wiskundekennis adequaat aan te wenden kan deze complexiteit vereenvoudigd worden. Daartoe moeten ze het probleem vlot kunnen onderzoeken of analyseren en er de wiskundige elementen van herkennen en onderscheiden. Door het probleem met een wiskundig model te beschrijven kan het verhelderd worden. Vaak komt het er op neer op zoek te gaan naar de juiste gegevens, de vraag correct en helder te formuleren, de relaties die de context aanreikt in wiskundige termen uit te drukken. Het resultaat is een vergelijking, een stelsel, een meetkundige situatie, …. Met behulp van de beschikbare wiskundekennis kan dan het (verwiskundigd) probleem aangepakt worden met vertrouwde oplossingsmethoden. Het resultaat moet uiteraard geïnterpreteerd worden in de context om te onderzoeken of het daar betekenisvol is.

Bij de probleemstelling gebruiken de leerlingen heuristiek die vaak transfereerbaar is naar andere probleemsituaties. De wiskundige inhouden zijn hier slechts ondersteunend voor het ontwikkelen van deze probleemoplossende vaardigheden.
Zo kunnen leerlingen onder meer leren

- een goede voorstelling van een probleem te maken, o.m. herkenbaarheid van een probleem, herkenbaarheid van wiskundekennis;
- de relaties binnen het probleem te analyseren, bijv. noodzakelijke en overbodige informatie onderscheiden, bijkomende informatie zoeken;
- een oplossingsplan op te stellen als nodig, bijv. het probleem opsplitsen in deelproblemen, een restrictie maken op de probleemstelling (i.c. het beperken van onderdelen om een wiskundige beschrijving mogelijk te maken), een vermoeden formuleren en dit toetsen;
- adequaat hulpmiddelen in te schakelen, bijv. vakspecifieke informatie, vademecum, aanwending van ICT;
- oog te hebben voor de interpretatie van resultaten;
- een gecontroleerde houding te ontwikkelen van terugkijken zowel op de fase van het stellen en/of het analyseren van het probleem, als die van het effectief oplossen;
- na te denken over de gevolgde oplossingsweg en hieruit conclusies te trekken naar de aanpak van een volgend probleem, bijv. hun wiskundekennis verhogen of beter structureren, bepaalde vaardigheden oefenen, betere kennisschema's uitwerken, onderdelen herhalen.

Het verwerken van problemen met behulp van wiskunde kan bij de leerlingen opvattingen en houdingen ontwikkelen over wiskunde. Zo zullen ze zich realiseren dat wiskunde meer is dan een stel regels, maar effectief kan ingezet worden om problemen uit het reële leven op te lossen of tenminste om er inzicht in te verwerven.
Ze kunnen inzien dat de vaardigheden verworven bij de aanpak van problemen binnen de wiskundevorming ook ingezet kunnen worden bij het oplossen van andere problemen. Zo kan een onderzoekende houding aangewend worden in elk probleemproces (bijv. verzamelen, aanvullen van informatie, opzoeken of herhalen van kennis, kritische houding ten aanzien van informatie). Zo ontwikkelt een wiskundige probleemaanpak vaak het doorzettingsvermogen en de zin voor nauwkeurigheid. Een houding van systematisch reflecterend terugkijken op een oplossingsproces kan hen leren fouten te vermijden en bij te sturen. Daardoor zal de tevredenheid over de uitvoering van een opdracht toenemen, en van daaruit kan het geloof in de eigen capaciteiten en hun zelfvertrouwen groeien.

Deze houdingen zijn ook van fundamenteel belang bij het leren zelf, i.c. een onderzoekende houding, doorzettingsvermogen, geloof in eigen kunnen, gecontroleerd uitvoeren van een plan, reflecterende feedback, ….

LEERPLANDOELSTELLINGEN EN WENKEN

Aanbeveling lestijden: **ca. 20 lestijden**

BASISDOELSTELLINGEN

MA1	Problemen herkennen, analyseren en de probleemstelling verhelderen met behulp van hun wiskundekennis.
MA2	Heuristische methodes gebruiken om een probleem aan te pakken.
MA3	Resultaten interpreteren binnen de context van het gestelde probleem.
MA4	Een reflecterende houding verwerven door gecontroleerd terugkijken op de oplossingsweg en de uitgevoerde berekeningen.
MA5	Vertrouwen verwerven door hun wiskundekennis zinvol in te schakelen.

PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de praktijk kunnen allerlei situaties aanleiding zijn tot interessante probleemstellingen.

- Problemen onderzoeken die aangereikt worden binnen andere vakken, i.h.b. de technische vakken.
- Het ondersteunen van het wiskundig begrijpen van toepassingen binnen andere vakken, bijv.

    - het gebruik van het ruimtelijk inzicht bij het afstellen van CNC-machines en het verklaren van de werkwijze,
    - het gebruik van verschillende coördinatenstelsels (toestel, voorwerp) bij machinegebruik, bijv. gradatie van patronen, freesmachines, …
- Het ondersteunen van een wiskundig gedeelte van de geïntegreerde proef.
- Maatschappelijke problemen en situaties:
    - statistische informatie, enquêtes;
    - problemen en enquêtes binnen de schoolcontext;
    - maatschappelijke gedragingen (rijgedrag, rookgedrag, drugs, besteding inkomen, …);
    - milieuproblematiek;
    - samenlevingsproblemen;
    - verkiezingen;
    - verwerking en kritische bevraging van informatie in televisie, kranten en tijdschriften.

Ook de leerinhouden die de leerlingen verwerken vanuit het leerplan bevatten allerlei situaties om deze methodiek van probleemaanpak in de praktijk te brengen.

Het wiskundige instrumentarium van de leerlingen is niet zo uitgebreid en waarschijnlijk ook niet erg flexibel in het gebruik. Men zal dus de leerlingen voldoende begeleiden op de weg van probleemaanpak, die zeker niet eenvoudig is voor deze leerlingen vanuit zelfstandig werken met wiskunde. Sommige leerlingen hebben wellicht het meeste leerkansen als de leraar zijn aanpak voldoende transparant kan maken.
Bij dergelijk zelfstandig verwerken van een opdracht zal men de opdracht en de leerlingen gericht opvolgen om ze voldoende succeservaring te bieden. Zo is het zinvol verschillende wegen om tot een oplossing te komen zichtbaar te maken en te waarderen. Alleszins moeten de leerlingen terugkoppeling verwerven op het eigen proces van aanpakken.

Een aantal opdrachten kunnen individueel gegeven worden. Maar het lijkt ook zinvol ruimere probleemstellingen te behandelen in de vorm van groepstaken. Hierbij zullen leerlingen, weliswaar op hun niveau, over wiskunde en probleemaanpak moeten communiceren. Hiermee zal hun (wiskundige) taalvaardigheid aangescherpt worden (bijv. nauwkeurigheid, correct gebruik wiskundige begrippen). En zoals bij elke vorm van groepswerk bestaat hier de kans op (verdere) ontwikkeling van de sociale vaardigheden (van onderlinge communicatie, spreken en luisteren, openheid, respecteren van afspraken, respecteren van elkaars persoon, aanbrengen van en/of aanvaarden van een andere mening).

Dit onderdeel moet uiteraard opgenomen worden binnen de evaluatie. Het zou van een te beperkte visie reflecteren als dit onderdeel alleen zou beoordeeld worden op de uiteindelijke oplossing van een probleem. Permanente evaluatie, begrepen als een permanente feedback op het oplossingsproces, is hier het meest aangewezen.

6 EVALUATIE

Het is niet moeilijk in te zien dat leerprocessen beter (vlotter) zullen verlopen als de leerling regelmatig informatie krijgt over zijn vorderingen en als de leerkracht een goed inzicht heeft in de aard van de eventueel optredende problemen. Evaluatie is daartoe een uitgelezen middel en vormt aldus een belangrijk onderdeel van het onderwijsleerproces.

SCHOOLCULTUUR

De gehanteerde terminologie in verband met evaluatie, de verschillende opvattingen over de functie, de organisatievorm, de rapportering, ... zijn echter *niet eensluidend*. Deze verscheidenheid wordt geïllustreerd door de verschillende betekenissen die bijvoorbeeld gegeven worden aan termen als toets, examen, permanente evaluatie, formatieve evaluatie, dagelijks werk, enz. Daarom is evaluatie van leerlingen en wat ermee gebeurt vaak verbonden met *een schooleigen cultuur*. Evaluatie van wiskunde moet hierin uiteraard passen, omdat evaluatie naar de leerlingen toe over de vakken en de jaren heen wel een zekere eenvormigheid moet vertonen.

FUNCTIES VAN EVALUEREN

Evalueren is het *waarderen* van iets of iemand. De term evalueren wordt in het onderwijs gebruikt voor waardering als deze niet 'uit de lucht komt vallen', maar opgenomen is in de rij meten, waarderen, beslissen. Evaluaties gebeuren dus intentioneel. Evaluaties zijn niet vrijblijvend, omdat ze leiden tot een bepaalde *beslissing*. De functies van evalueren zijn verbonden met de aard van de beslissingssituaties.

Evaluatie kan de functie hebben van *resultaatsbeoordeling*. Over een periode van langere duur wordt het rendement van het onderwijsleerproces vastgesteld. Meestal gebeurt dit aan de hand van examens of summatieve toetsen. Deze vorm is allicht het meest vertrouwd.

Evaluatie kan de functie hebben van *plaatsing, oriëntering en selectie*. Evaluatiegegevens worden bijvoorbeeld gebruikt om leerlingengroepen samen te stellen, om differentiatie mogelijk te maken, om leerlingen te oriënteren naar de meest geschikte onderwijsvorm en studierichting, of toe te laten tot een bepaalde studierichting.

Evaluatie kan de functie van *diagnose* krijgen. Diagnose kan elke activiteit van de leerkracht zijn die erop gericht is een beeld te krijgen van de vorderingen van de leerlingen. Op de vaststelling van de aard en de oorzaak van de leermoeilijkheden kan dan een plan volgen om dit tekort te remediëren of bij te sturen.

In dezelfde zin kan een diagnose opgemaakt worden van de vorderingen van de leerlingen in verband met *redeneer- en probleemoplossende vaardigheden*. Vanuit een goed inzicht in de mogelijkheden en feitelijke situatie kunnen de leerlingen beter begeleid worden in hun leerproces.

Evaluatie kan de functie krijgen van *sturing van het onderwijsleerproces*. Er wordt informatie verzameld over de vorderingen van de leerlingen om het leerproces beter te organiseren. Dit soort evaluatie gebeurt voortdurend tijdens het leerproces. De leerling krijgt voortdurend informatie over zijn vorderingen, de leerkracht krijgt voortdurend informatie over het verloop van het leerproces.

In de derde graad kunnen bepaalde klasgroepen samengesteld worden met leerlingen met een diverse vooropleiding wiskunde. Daarom kan een bijzondere plaats gegeven worden aan het evalueren van de *beginsituatie*, bijv. in verband met een aantal routinevaardigheden. Dit kan leiden tot een georganiseerde herhaling in de lessen (als het een ‘klassikaal’ probleem blijkt te zijn), tot een gedifferentieerde aanpak, maar even zinvol tot gerichte herhalings- of remediëringspakketten die door de leerlingen zelfstandig (als taak) worden verwerkt.

Evaluatie is medebepalend voor de 'beslissing' op de scharniermomenten van het lesverloop. De verkregen informatie kan door de leerkracht gebruikt worden om zijn didactisch handelen te beoordelen en te sturen. Bijsturing kan betrekking hebben op een aantal uiteenlopende factoren, bijvoorbeeld de leerinhoud kan te moeilijk zijn, de doelstellingen te hoog gegrepen, het tempo te hoog (of te laag), het beginniveau kan verkeerd ingeschat zijn, er kunnen problemen zijn van motivationele aard, ... De leerkracht kan hierop inspelen door bijvoorbeeld een bijkomend voorbeeld te geven, de formulering van een definitie of een eigenschap te hernemen, de voorziene oefeningen te beperken of aan te vullen. Sturing kan ook betekenen dat de leerkracht *gedifferentieerd* ingaat op de mogelijkheden van de leerlingen met aangepast oefeningenmateriaal, met remediëring, met ondersteuning van het leerproces door het leren van wiskunde te bespreken. Dergelijke sturing kan ook positief onderscheidend werken, bijv. door aan bepaalde leerlingen optimale ontwikkelingskansen te bieden door hen te confronteren met meer open problemen, meer eigen tips over hun oplossingsproces, gerichte aanwijzingen over heuristische methoden, ….

Evaluatie in de brede betekenis heeft zowel betrekking op het beoordelen van de leerlingen en de beslissingen die hieraan verbonden worden, als op de informatie over het verloop van het onderwijsleerproces zowel voor de leerling als voor de leerkracht. Ze kan betrekking hebben op een sanctionering met ingrijpende gevolgen of op een meer vrijblijvende begeleiding.

VAN EVALUATIE NAAR ZELFEVALUATIE

In de informatieve functie maakt evaluatie integrerend deel uit van het onderwijsleerproces. Belangrijk is alleszins dat de leerling *zelf informatie krijgt over zijn leren*, zowel wat betreft het proces als het eindresultaat. Zo zal in het leerproces van probleemoplossende vaardigheden niet slechts de beoordeling van het eindresultaat belangrijk zijn. De informatie over zijn wijze van aanpakken en de vorderingen daarin geeft de leerling inzicht in de nodige bijsturing.

Procesevaluatie is een aangewezen weg om leerlingen te leren vragen stellen bij de leerinhouden. In die zin is het een goede ondersteuning bij het verwerven van leervaardigheden. Procesevaluatie is een aangewezen weg om de leerling bewust te maken van de eigen mogelijkheden. In die zin en in het kader van het levenslang leren (waarbij niet alle vorderingen 'getoetst' zullen worden) kan vertrouwd worden met procesevaluatie de groei naar zelfevaluatie bevorderen. Een mogelijke ondersteuning wordt hier geboden door opdrachten waarbij de leerlingen zelf zinvol leren gebruik maken van een correctie- of een antwoordsleutel.

Het betrekken van leerlingen bij de evaluatie of fasen ervan, het bespreken van evaluatiegegevens en het formuleren van werkpunten vanuit een gesprek kan de evaluatiegevoeligheid merkelijk aanscherpen. Het afsluiten van een leerproces, een werkopdracht, ... met een evaluerend terugkijken laat leerlingen toe zelf elementen van evaluatie in te brengen. Een dergelijke bespreking binnen een groepje verantwoordelijk voor een taak, bijvoorbeeld op basis van een observatielijst, geeft hen meer inzicht in het proces zelf, maar uiteraard ook in geven, krijgen, nuanceren en aanvaarden van feedback.

EVALUATIE VAN KENNIS EN INZICHT

De essentie van wiskundekennis is de kennis van en het *inzicht in begrippen en eigenschappen*. Dit houdt in: het kunnen geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden, het herkennen van het begrip of eigenschap in contextsituaties, het kennen van de betekenis ervan, het kennen van een formulering van een definitie of de eigenschap, het kunnen toepassen ervan in diverse contextsituaties.

Evaluatie van het inzicht in begrippen en eigenschappen zou de verschillende aspecten moeten onderzoeken. Het kennen van een eigenschap impliceert niet vanzelfsprekend dat ze kan *toegepast* worden en omgekeerd. Dit impliceert dat ook in de evaluatie *in de loop van het onderwijsleerproces* meer aandacht moet besteed worden aan deze aspecten, zoals het begrijpen, het kunnen geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden, de formulering, het toepassen van de eigenschap.

Evaluatie zou er toe moeten leiden, dat de leerkracht nog tijdens het onderwijsleerproces informatie verwerft over de misverstanden over begrippen, eigenschappen en methoden bij de leerlingen. Ze kunnen dan sneller bijgestuurd worden. Voor een leerling is het belangrijk te weten op welk niveau een begrip moet gekend zijn en waar hij zich in het leerproces bevindt. Zo kan hij de aangepaste leermethode kiezen.

Van een aantal begrippen en eigenschappen kan gesteld worden dat ze tot de *parate kennis* van de leerlingen moeten behoren. Deze parate kennis moet dan ook als paraat getoetst worden en dus geregeld in de loop van het jaar. Kennis waarvan aanvaard is dat ze niet meteen paraat moet beheerst worden, maar bijvoorbeeld wel is opgenomen in een vademecum, kan getoetst worden met gebruik van het vademecum. Voorwaarde is natuurlijk dat leerlingen er ook buiten de evaluatiemomenten functioneel mee leren werken.

Over het algemeen wordt aangenomen dat in het geheel van de toetsing een goede spreiding van de leerinhouden over de verschillende beheersingsniveaus (kennis, inzicht en toepassing) wenselijk is.

EVALUATIE VAN VAARDIGHEDEN

In het huidige leerplan wordt het verwerven van een aantal vaardigheden benadrukt. Ook op de evaluatie moet dit zijn weerslag hebben. Daarbij moet een vaardigheid als vaardigheid geëvalueerd worden. Het is zinvol een zogenaamde vaardigheidsanalyse te maken, d.w.z. een overzichtelijke lijst te maken van welke stappen leerlingen kunnen (moeten) zetten om de vaardigheid te verwerven of aan te wenden. Deze lijst wordt dan gebruikt om leerlingen in het leerproces (stapsgewijze) te observeren. Vanuit dergelijke feedback kan de leerling zich dan beter bijsturen.

De leerling moet wiskundige procedures, methoden en technieken behoorlijk en efficiënt kunnen uitvoeren. Dit betekent dat ook de *procedure* (bijvoorbeeld de verschillende stappen) moet geëvalueerd worden en niet slechts het eindresultaat. Hierin is ook ruimte voor evaluatie van de zelfcontrole van de leerling en voor het gecontroleerd uitvoeren (bijv. schatten, grootteorde, elementaire fouten vermijdend). Ook hier geeft de terugkoppeling die leerlingen krijgen over de uitvoering tijdens het leerproces zelf, hen sneller inzicht in hun fouten.

Voor de toetsing van vaardigheden kan overwogen worden een in de tijd gespreide toetsing uit te voeren. Dit betekent dat het bezitten van een vaardigheid niet afhankelijk gemaakt wordt van het bezit ervan op dat ene examenmoment.

In de evaluatie van vaardigheden neemt die van *probleemoplossende vaardigheden* een bijzondere plaats in. Aandacht voor het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden leidt tot het aanbieden van meer open gestelde problemen, meer aan (nieuwe) situaties gebonden vraagstukken, enz. Het oplossen van dergelijke problemen is een complex proces. Meer nog dan elders is feedback zowel *over het proces* als over het eindproduct belangrijk. De leerling moet informatie krijgen over zijn kennis en de vaardigheid waarmee hij die kan hanteren, over de wijze van vraagstelling, het gebruik van gegeven informatie, het formuleren van vermoedens, over de vaardigheid waarmee heuristische methoden gehanteerd worden, over de sturing van zijn oplossingsproces en de wijze van interpreteren en verifiëren van resultaten. Evaluatie van probleemoplossende vaardigheden heeft maar zin als *tijdens het proces* de wijze van werken van de leerling *systematisch, weloverwogen en voortdurend wordt opgevolgd*. Evaluatie kan het vertrouwen van de leerling in zijn mogelijkheden sterk beïnvloeden.

Maar ook de leerkracht krijgt belangrijke feedback, bijvoorbeeld over welke problemen uitdagend zijn, welke instructief, welke interesse wekken, welke niet succesvol zijn.

EVALUATIE VAN ATTITUDES

In dit leerplan wordt gepleit voor het ontwikkelen van attitudes. Nog meer dan bij vaardigheden moet de leerkracht bij de evaluatie ervan oog hebben voor de individuele inspanning die de leerling doet om die doelen te bereiken. Enige omzichtigheid is geboden, want niet bij alle leerlingen is de spontane uitingsvorm de juiste weerspiegeling van de inzet. En sommige leerlingen hebben van nature uit meer tijd en inzet nodig om eenzelfde resultaat te bereiken.

Een hulpmiddel bij het evalueren van attitudes is een *observatielijst*, waarin een *aantal concrete gedragingen* opgesomd staan. Daarbij kan men een aantal niveaus van verwachting aangeven die beantwoorden aan een verbale uitdrukking voor de ‘beoordeling’. Zo komt men tot een categoriale beoordeling van attitudes, die de basis kunnen zijn voor feedbackgesprek met de leerling.

Zeker voor attitudes geldt dat terugkoppeling tijdens het leerproces de meest effectieve weg van bijsturen is. Aanmoediging zal meer vermogen dan neerbuigend afkeuren. Een verbale waardering kan naast een 'resultaat' voor de inhoudelijke toetsing een blijk van waardering zijn voor de inzet van de leerling.

ICT-HULPMIDDELEN

In de leerplannen is het gebruik van ICT-hulpmiddelen opgenomen, zowel voor illustratie en demonstratie van begrippen en eigenschappen, als voor het effectieve gebruik ervan door de leerlingen bij het uitvoeren van berekeningen, het onderzoeken van eigenschappen en het verwerken van informatie.

De evaluatie van onderdelen waarbij in de ontwikkelingsfase en de verwerkingsfase een rekenmachine, een grafische rekenmachine of een computer gebruikt werd, zal hieraan aangepast zijn. Dat betekent dat bij de toetsing hetzelfde materiaal ter beschikking van de leerlingen moet staan.

Het spontane en accurate gebruik van ICT wordt geëvalueerd als onderdeel van de nagestreefde vaardigheid.
Voorbeelden

- Het heeft geen zin leerlingen in de verwerkingsfase ICT te laten gebruiken en op de evaluatiemomenten manuele automatismen te verwachten.
- Bij observatie in de klas zal men leerlingen wijzen op inefficiënt gebruik.
- Op dezelfde wijze moet gewezen worden op inadequaat gebruik als leerlingen bijvoorbeeld tussenresultaten noteren, eventueel zelf terug invoeren, al of niet na afronding, wat merkwaardige rekenverschillen kan veroorzaken.
- Als de doelstelling het interpreteren van statistische gegevens is, zal men geen (evaluatie)tijd besteden aan het turven ervan, maar wel statistische software gebruiken.
- Met meetkundige software kan men een vermoeden laten onderzoeken door de techniek van het verveelvoudigen (cf. het slepen van bepaalde punten). In dit geval is de computer echter een veredeld tekenblad, waarop de redenering wordt uitgevoerd. Ook voorheen moesten de leerlingen een tekening maken en maakte die deel uit van de evaluatie. Met het gebruik van een figuur op een machine kan dat dus evenzeer.

Bij dit soort evaluatie past wellicht een permanente evaluatie tijdens het leerproces zelf, dan wel de vaardigheid te testen met een reeks gekunstelde oefeningen.

In de observatie moet een onderscheid gemaakt worden tussen enerzijds de vaardigheid in het gebruik van het toestel (bijv. de vlotheid bij het intikken bij computergebruik) en anderzijds het inzicht in het gebruik van de toestelgebonden wiskundige werkwijze.

Bedieningsvaardigheid op zich kan niet het enige doel zijn van wiskundelessen. Binnen het 'vak wiskunde' mag bijvoorbeeld klaviervaardigheid geen hypotheek leggen op het gebruik van de computer bij berekeningen of dataverwerking. Voor wiskunde kan een relatief vlotte omgang met de machine volstaan. En die staat in functie van het wiskundige leerproces. Uiteraard zal een veelvuldig gebruik in de wiskundelessen bijdragen tot de algemene vlotheid. Er is geen principieel bezwaar tegen de beschikbaarheid van de handleiding van het toestel.

De evaluatie van deze vaardigheid moet vooral gezien worden als aanmoedigend met het oog op een vlotter verlopen van het wiskundige proces. Zo moet een evaluatie gespreid over het jaar een beeld geven van de vorderingen van de leerlingen en van hun effectieve vooruitgang. Dit impliceert ook dat de leerlingen voldoende oefenkansen krijgen. Het vlotte gebruik van een machine of software vraagt dus meer dan een incidenteel gebruik in de les. Dit vraagt van de school en de leerkracht een inspanning voor de leerlingen die niet zelf over het aangewezen materiaal kunnen beschikken.

Als men het gebruik van bepaalde werkwijzen met computer of rekenmachine als specifieke doelstelling heeft nagestreefd (bijv. gebruik bepaalde software, bepaalde functietoetsen), zal dit uiteraard deel uit maken van de evaluatie.

Overleg in de vakgroep is nodig om vertrouwd te worden met deze voor wiskunde 'nieuwe' evaluatiesituaties. Afspraken moeten gemaakt worden over de aangewezen evaluatievorm, de wijze van werken, de gestelde eisen, … en de afstemming tussen de leerkrachten. Zo kan men afspreken het technische gebruik van ICT niet op het examen zelf te toetsen, maar bijvoorbeeld via de jaartoetsing, omdat 'permanente' of 'gespreide' evaluatie dan meer mogelijk wordt. Leerlingen moeten alleszins een duidelijk beeld krijgen van wat te verwachten is bij de evaluatie.

ORGANISATIE VAN DE TOETSING

In de organisatie van de toetsen bestaat een ruime verscheidenheid tussen de scholen. Hoe die ook gebeurt, belangrijk is dat ze aansluit bij de onderwijspraktijk. Dit wil zeggen dat ze moet aansluiten bij de doelstellingen en de verwerkingsniveaus die tijdens het leerproces en de verwerkingsopdrachten werden nagestreefd.

Wat betreft de criteria die aan toetsen als meetinstrument moeten worden opgelegd, zoals validiteit (meet de toets wat beoogd wordt te meten?) en betrouwbaarheid (is het resultaat een zo adequaat mogelijke weerspiegeling van het bereiken van de doelstellingen door de leerling?), wordt verwezen naar de geëigende literatuur.

Verder wordt aangenomen dat de evaluatie zich niet mag beperken tot enkele momenten. Geregeld toetsen (zowel mondeling als schriftelijk) laat toe adequaat in te spelen op de problemen die zich stellen. Wel mag verwacht worden dat leerlingen ook al grotere leergehelen leren beheersen, bijv. voor een ruimere summatieve toets.

7 OVEREENKOMST EINDTERMEN EN DOELSTELLINGEN

7.1 Eindtermen Wiskunde TSO derde graad

1 ALGEMENE EINDTERMEN

De leerlingen kunnen

1 wiskundige informatie analyseren, schematiseren en structureren.
2 gebruik maken van wiskundige technieken zoals figuren maken en tabellen opstellen.
3 bij het oplossen van problemen functioneel gebruik maken van ICT.
4 bij het oplossen van een vraagstuk:
- relevante gegevens scheiden van niet relevante;
- gegevens met elkaar en met de probleemstelling in verband brengen;
- gegevens en gevraagde weergeven in een geschikt wiskundig model;
- het vraagstuk planmatig uitwerken.

5 wiskundige rekenregels en conventies correct hanteren en toepassen.
6 keuzes m.b.t. representatie en gevolgde werkwijze verantwoorden.
7 voorbeelden geven van het gebruik van wiskunde in andere vakgebieden en in de maatschappij.

De leerlingen

8 * zijn kritisch tegenover het gevonden resultaat.
9 * zijn bereid hun leerproces bij te sturen op basis van reflectie over de wijze waarop ze wiskundige problemen oplossen en wiskundige informatie verwerven en verwerken.

2 REËLE FUNCTIES EN ALGEBRA

De leerlingen kunnen

10 bijzonderheden van grafieken, eventueel aangevuld met tabellen, aflezen zoals periodiciteit, symmetrieën, stijgen en dalen, extreme waarden, lineaire en exponentiële groei.
11 grafieken tekenen van enkele eenvoudige functies (mede met behulp van ICT).
12 veranderingen beschrijven en vergelijken met behulp van differentiequotiënten.
13 problemen, waarbij een functioneel verband gegeven is, oplossen en die oplossing interpreteren (eventueel met behulp van ICT).

3 STATISTIEK

De leerlingen kunnen

14 aan de hand van voorbeelden het belang uitleggen van de representativiteit van een steekproef voor het formuleren van statistische besluiten over de populatie.
15 met behulp van ICT gemiddelde en standaardafwijking berekenen van statistische gegevens.
16 het gemiddelde en de standaardafwijking gebruiken als karakteristieken van een normale verdeling.

De leerlingen

17 * staan kritisch tegenover het gebruik van statistiek in de media.

* Met het oog op de controle door de inspectie werden de attitudes met een * aangeduid in de kantlijn.

7.2 Overeenkomst

Et	leerplan b
1	V2, V3, V4, V5, A11
2	V1, V2, V3
3	V1, V2, V4, V5
4	V4 V5
5	V1, V2, V5, A9
6	V2, V3, V4, V5, A9
7	A13
8	V5, A9
9	V5, V7, A8, A9, A10, A11
10	GO2, GO5, GO6
11	GO3
12	VF4
13	GO1
14	S2
15	S3
16	S4
17	S1, A9

8 BIBLIOGRAFIE

BOEKEN

ASPEELE, M.-J., DELAGRANGE, N., DE ROO, F., *Wiskundedidactiek, een inleiding*. Leuven, Acco, 1987.
BARNETT, R.A., ZIEGLER, M.R., *College Algebra 4th edition.* New York, McGraw-Hill, 1989.
BUIJS, A., *Statistiek om mee te werken.* Leiden, Stenfort Kroese, 1989.
BURTON, D., *The history of mathematics. An introduction*. Boston, Allyn and Bacon Inc., 1985.
CENTRE DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'a dix-huit ans*. Nivelles, CREM, 1995.
CHOATE, J., e.a., *Iterations a tool kit of dynamics activities*, Key Curriculum Press, 1999.
CHOATE, J., e.a., *Fractals a tool kit of dynamics activities*, Key Curriculum Press, 1991.
DE VEAUX, R.D., VELLEMAN, P.F., *Intro Stats,* Pearson Education, 2004.
DOCHY, F., SCHELFHOUT, W., JANSSENS, S., *Anders evalueren*, Heverlee, Lannoo-campus, 2003.
DOUMA, S.W., *Lineaire programmering als hulpmiddel bij besluitvorming.* Academic Service, 1982.
EBBENS, S., ETTEKOVEN, S, VAN ROOIJEN, J., *Effectief leren in de les*, Groningen, Wolters-Noordhoff, 1996.
ENGEL A., *Problem-Solving Strategies*, New York, Springer-Verlag, 1998.
FENTEM, R., *Statistics.* London, Collins Educational, 1996.
FREEDMAN, D., PISAU, R., PURVES, R., *Statistics*, Norton & Company, 1998.
FREUDENTHAL, H., *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Reidel Publ. Comp., 1973.
GOODMAN, A., HIRSCH, L., *Precalculus.* Englewood Cliffs - New Yersey, Prentice-Hall, 1994.
GRAVEMEIJER, K.P.E., *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, CD Press, 1994.
GROUPE D'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE, *Les fonctions c'est aussi autre chose.* Louvain-la-Neuve, GEM, 1982.
HERR, T., JOHNSON, K., *Problem solving strategies.* Berkeley, Key Curriculum Press, 1994.
HUFF, D., *How to lie with statistics*. London, Norton & Company, 1954.
JACOBS, H., *Mathematics a human endeavor.* New York, Freeman, 1982.
KAISER, H., NÖBAUER, W., *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht*. München, Freytag, 1984.
KLINGEN, H., OOT, A., *Computereinsatz im Unterricht, der pädagogische Hintergrund.* Stuttgart, Metzler Verlag, 1986.
KRABBENDAM, H., *Informatieverwerking en statistiek voor de lerarenopleiding.* Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 1994.
LAFARGUE-SORT, J., MARQUIS, B., *Les méthodiques pour résoudre des problèmes*. Paris, Hatier, 1992.
LAGERWERF, B., *Wiskundeonderwijs in de basisvorming*. Groningen, Wolters-Noordhoff, 1994.
LEHMANN, E., *Mathematik-Unterricht mit Computer-Einsatz.* Bonn, Dümmler, 1988.
LOWYCK, J., VERLOOP, N., e.a., *Onderwijskunde*. Leuven, Wolters, 1995.
MANKIEWICZ, R., *Het verhaal van de wiskunde.* Abcoude, Uitgeverij Uniepers, 2000.
MOORE, D. , McCABE, G. *, Statistiek in de praktijk*, *Theorieboek*, Academic Service, Den Haag, 2001
MOORE, D. , McCABE, G. *, Statistiek in de praktijk, Opgavenboek,* Academic Service, Den Haag, 2001
NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, *Curriculum and Evaluation Standards for school mathematics* . Reston, Virginia USA, NCTM, 1989.
OLDKNOW, R., TAYLOR, A., Teaching mathematics with ICT. London, Continuum, 2000.
POLYA, G., *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving.* New York, Willey, 1981.
POSAMENTIER, A.S., STEPELMAN, J., *Teaching secondary school mathematics*. New York, Merill Publishing Company, 1990.
SCHOENFELD, A. H., *Mathematical problem solving*. London, Academic Press, 1985.
STEUR, H., *Levende wiskunde. Toepassingen geordend naar wiskundig onderwerp*. Culemborg, Educaboek, Tjeenk-Willink, 1980.
STEWART, J., REDLIN, L., e.a., *Precalculus, 3th edition.* Pacific Grove, Brooks/Cole Publishing Company, 1998.
STRUIK, D.J., *Geschiedenis van de wiskunde*. Utrecht, Het Spectrum, 1990.
SULLIVAN, M., SULLIVAN III, M., *Precalculus graphing and data analysis*, Prentice Hall, 1998.

THAELS, K., e.a., *Van ruimtelijk inzicht naar ruimtemeetkunde.* Deurne, Wolters Plantyn, 2001.
VAN DER BLIJ, F., *Wiskunde met verve.* Groningen, Wolters-Noordhoff, 2000.
VAN DORMOLEN, J., *Aandachtspunten*. Utrecht, Bohn, Scheltema en Holkema, 1982.
VAN LOOY, L., e.a. *Zelfstandig en coöperatief leren*, Brussel, VUBPress, 2002.
VAN PETEGEM, P., VANHOOF, J., *Evaluatie op de testbank*, Mechelen, Wolters-Plantyn, 2002.
VON HARTEN, G., STEINBRING, H., *Stochastik in der Sekundarstufe I.* Köln, Aulis Verlag, 1984.
WANER, S., COSTENOBLE, S.R., *Calculus applied to the real world,* New York, Harper Collins, 1996.

TIJDSCHRIFTEN

UITWISKELING. Driemaandelijks tijdschrift, Groenstraat 18, 3221 Nieuwrode.
WISKUNDE EN ONDERWIJS. Driemaandelijks tijdschrift van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraren (VVWL), C. Huysmanslaan 60, bus 4, 2020 Antwerpen.
EUCLIDES. Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, De Schalm 19, 8251 LB Dronten.
NIEUWE WISKRANT. Tijdschrift voor Nederlands wiskunde onderwijs, Freudenthal Instituut, Postbus 9432, 3506 GK Utrecht.
PYTHAGORAS. Wiskundetijdschrift voor jongeren, Wiskundig Genootschap, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht.

INTERNET ADRESSEN

Portaalsite voor wiskunde	http://users.pandora.be/wiskunde/
Het wiskundelokaal van de digitale school	http://www.digischool.nl/wi/index.phtml
Mathworld	http://mathworld.wolfram.com/
Wiskundeweb	http://www.wiskundeweb.nl/
Applets	http://www.fi.uu.nl/wisweb/
Analyse	http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/
Calculus	http://homepages.seresc.net/~sray/alvirne.html
Problem Solving (1)	http://www2.hawaii.edu/suremath/home.html
Problem Solving (2)	http://www.nzmaths.co.nz/PS/
Problems	http://komal.elte.hu/verseny/feladatok.e.shtml
Vlaamse wiskundeolympiade	http://www.kulak.ac.be/vwo/nl/vwowwwnl.html
Vragenbank	http://www.gricha.bewoner.antwerpen.be/
Nederlandse wiskunde olympiade	http://olympiads.win.tue.nl/nwo/
Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraren	http://www.vvwl.be
Uitwiskeling	http://www.uitwiskeling.be
Geboeid door wiskunde en wetenschappen	http://www.luc.ac.be/scholennetwerk/index.html
Nederlandse vereniging voor wiskundeleraren	http://www.nvvw.nl/
Freudenthalinstituut	http://www.fi.ruu.nl/
Nieuwe Wiskrant	http://www.fi.uu.nl/wiskrant/
Tijdschrift Pythagoras	http://www.pythagoras.nu/mmmcms/public/
Vlaamse statistieken	http://aps.vlaanderen.be/
Statistische gegevens	http://statbel.fgov.be/home_nl.htm
Centraal Bureau voor Statistiek	http://www.nrc.nl/W2/Lab/Profiel/Statistiek/
Sparen en beleggen	http://www.testaankoop.be/index_NL.html
Hypotheeklening en fiscaliteit	http://www.immotheker.be