Leerplan wiskunde

Eerste graad

Eerste leerjaar A

Tweede leerjaar

September 2009
VVKSO – Brussel – D/2009/7841/003
(vervangt D/1997/0279/032 vanaf
1 september 2009)

Inhoud

1 Situering van het leerplan

Dit leerplan werd opgemaakt op basis van *de eindtermen wiskunde* van de eerste graad van het secundair onderwijs. Het is bestemd voor alle leerlingen van de A-stroom. Het treedt in voege op 1 september 2009 en wordt progressief per leerjaar ingevoerd. Het vervangt het leerplan met referentie D/1997/0279/032.

Voor het aantal lestijden wordt gerefereerd aan *de lessentabellen* – Voltijds secundair onderwijs – Eerste graad van het Vlaams Verbond van het Katholiek Onderwijs (www.vvkso.be>lessentabellen) die voor de basisvorming vier wekelijkse lestijden wiskunde voorzien.

Bij de uitwerking van het leerplan werd gerefereerd aan *de visietekst voor de eerste graad* “Werken in de eerste graad” van het Vlaams Verbond van het Katholiek Onderwijs (M-VVKSO-2005-158).

Zowel in het eerste leerjaar als in het tweede leerjaar kan het aantal lestijden wiskunde aangevuld worden met *een of twee wekelijkse lestijden.* Die kunnen nuttig besteed worden aan de *differentiatie*, die in de heterogene samengestelde leerlingengroepen van de eerste graad noodzakelijk is. Differentiatie kan betekenen dat aandacht besteed wordt aan het onderbouwen van het normale basisbeheersingsniveau, door zo nodig extra inoefening en/of remediëring te voorzien. Dat kan ook betekenen dat voldoende verdiepende elementen worden aangereikt, zodat leerlingen met een intrinsiek hoger beheersingsniveau voor wiskunde voldoende leermotivatie meekrijgen.

De eerste graad heeft een belangrijke bijdrage in *de keuze* die leerlingen maken *voor een studierichting met meer of minder wiskunde*. Het aanbieden van een brede waaier van doelstellingen moet de leerlingen in staat stellen hun wiskundige mogelijkheden te ervaren en vanuit die leermotivatie te kiezen. Datzelfde spectrum zal de leraar toelaten een onderbouwd *advies voor oriëntering* te formuleren.

Het leerplan sluit aan op het leerplan wiskunde van het basisonderwijs van het Vlaams Verbond van het Katholiek Basisonderwijs. Het leerplan biedt een voorbereiding op de wiskundevorming in de tweede graad (aso/kso/tso). Daar wordt wiskunde aangeboden met zes verschillende leerplannen.

<table>
<tr><td colspan="6">Leerplan wiskunde basisonderwijs</td></tr>
<tr><td colspan="6">Leerplan eerste graad A-stroom</td></tr>
<tr><td>Leerplan 5
aso
5 lestijden</td><td>Leerplan 4
aso
4 lestijden</td><td>Leerplan a
kso/tso
5 lestijden</td><td>Leerplan b
tso
4 –5 lestijden</td><td>Leerplan c
tso
4 –5 lestijden</td><td>Leerplan d
kso/tso
3 lestijden</td></tr>
<tr><td>Grieks
Latijn
Sport
Wetenschappen</td><td>Economie
Humane wetenschappen
Latijn-Grieks</td><td>Beeldende en architecturale vorming
Biotechnische wetenschappen
Bouw- en houtkunde
Grafische communicatie
Industriële wetenschappen (5-6)
Techniek-wetenschappen (5-6)</td><td>Elektriciteit-elektronica
Elektromechanica</td><td>Handel</td><td>Artistieke opleiding
Audiovisuele vorming
Beeldende en architecturale kunsten
Muziek
Woordkunst-drama
Bio-esthetiek
Bouwtechnieken
Brood en banket
Creatie en mode.
Dierenzorgtechnieken
Elektrotechnieken
Fotografie
Grafische media
Handel-talen
Hotel
Houttechnieken
Landbouwtechnieken
Lichamelijke opvoeding en sport
Mechanische technieken
Slagerij en vleeswaren
Sociale en technische wetenschappen
Textieltechnieken
Toerisme
Tuinbouwtechnieken
Voedingstechnieken</td></tr>
</table>

2 Wiskunde en wiskundevorming

Om de wiskundevorming in de eerste graad te beschrijven wordt uitgegaan van een algemene kadering van wiskunde en wiskundevorming.

Vanuit een omschrijving van wat wiskunde als vakgebied kan aanreiken, volgt dat het bij wiskundevorming eerder gaat om het doormaken van het wiskundige (zoek)proces, dan wel over het verwerven van een statische wiskundekennis. Om inzicht in dat proces te verwerven, wordt algemeen beschreven op welke kennis, vaardigheden, houdingen en opvattingen iemand, die competent is in dat wiskundeproces, een beroep zal doen. Competenties worden maar gerealiseerd doorheen een vormingsproces van meerdere jaren.

Deze competentieontwikkeling heeft een brede vormende waarde, omdat ze enerzijds een deel van de basis (m.n. de wiskundige basiskennis) verleent, die nodig is om in een complexe maatschappij te functioneren en anderzijds omdat ze een aantal vaardigheden en attitudes bijbrengt, die breed inzetbaar zijn in redeneer-, oplossings- en leerprocessen.

2.1 Wiskunde

Het Nederlandse woord *wiskunde* is ingebracht door Simon Stevin in de zeventiende eeuw als *wisconst* (kunst van het gewisse of zekere). Dit woord verwijst naar een bepaalde opvatting van wiskunde, waarin men met logische redeneringen probeert zekerheid te verwerven over uitspraken (stellingen), over gedefinieerde objecten en over de verbanden daartussen. In de meeste talen (Engels: *mathematics*, Duits: *Mathematik*, Frans: *mathématiques*) is het woord voor wiskunde afgeleid van het Griekse woord μάθημα (*máthèma*) dat wetenschap, kennis of leren betekent. Hier wordt intrinsiek verwezen naar een wijze van verwerven van kennis door denken en redeneren.

Het wetenschapsgebied wiskunde is een breed vakgebied geworden met vele onderzoeksdomeinen en vele toepassingen. Het is een vakgebied dat teruggaat tot zeer verscheiden culturen van eeuwen geleden, maar dat ook vandaag nog in volle ontwikkeling is.

De ontwikkeling van wiskunde kunnen we, uiteraard vereenvoudigd, beschrijven als het volgende proces.

- Situaties in de leefwereld leiden tot *problemen, vragen* … Voor zo'n probleem wil men een oplossing (kwantitatief of kwalitatief). Daarbij wordt vaak vooraf al de vraag gesteld naar hoe realistisch de oplossing is, en met welke waarschijnlijkheid die zal optreden.
- Een aantal van deze problemen zijn *wiskundig stelbaar*. Dat betekent dat er binnen de wiskunde een concept, *een model* kan gevonden of geconstrueerd worden, waarmee de situatie en het probleem kan beschreven worden. Het probleem is nu een wiskundig probleem. Dit is de fase van *het mathematiseren:* het onder wiskunde brengen van het probleem.
  Belangrijk in de wiskundevorming is de wiskundige begrippen te verbinden met betekenisvolle situaties. Zo zal de gebruiker ze bij een oplossingsproces vlot herkennen en kunnen inzetten.
- *Het uitvoeren van technieken* die in de wiskunde binnen modellen zijn uitgewerkt, kan leiden tot *een wiskundige oplossing*.
- Dan volgt de fase van *het demathematiseren*. De wiskundige oplossing moet *geïnterpreteerd* worden. Dat wil zeggen dat ze terug in de context van de situatie moet bekeken worden. Niet elke wiskundige oplossing is noodzakelijk een oplossing in de realiteit. Niet elke wiskundige oplossing voldoet als antwoord.
- Doorheen het hele proces is het belangrijk voortdurend *een controlerende houding* aan te nemen. Daarbij liggen vragen voor als: wordt het geschikte model gekozen; worden niet te veel beperkingen ingevoerd; worden de rekentechnieken correct uitgevoerd; zijn er beginvoorwaarden, bestaansvoorwaarden …?

Volgens dit schema is doorheen de geschiedenis heel wat wiskundekennis ontwikkeld. Ook vandaag nog wordt er in onderzoek op deze wijze gewerkt (m.n. het vinden van concrete oplossingen voor concreet gestelde problemen, bijv. digitale omzetting en codering van berichten via telefoon en internet, beeldvormingstechnieken voor digitale beeldoverdracht, econometrie …).

Dit proces staat model voor *een algemeen proces van probleemoplossing* en biedt een werkschema aan de "wiskundegebruiker".

Daarnaast worden *andere ontwikkelingswijzen van wiskunde* gebruikt, die terugvallen op de interne ontwikkeling van wiskunde.

- Enerzijds zijn er vragen zoals: *hoe functioneren de modellen; wanneer zijn ze toepasbaar; welke bestaansvoorwaarden zijn er; kan men een verantwoording geven voor de gebruikte technieken; in welke mate is een bepaalde wiskundige aanpak veralgemeenbaar naar andere (algemene) situaties …?* Het zijn vragen naar de correcte toepassing van wiskundekennis in de modellen zelf.
- Anderzijds rijzen vragen zoals: *hoe wordt wiskundige kennis correct en eenduidig geformuleerd; hoe kan de wiskundekennis geordend en gestructureerd worden zodat ze gemakkelijk toegankelijk is; hoe kunnen methoden, technieken, regels ... verantwoord worden tegen de achtergrond van een vaste basiskennis; hoe kan verdere wiskundekennis ontwikkeld worden … en kan dat vanuit de eerder geabstraheerde kaders*?

Het zijn vragen naar de meer abstracte ontwikkeling van wiskundige concepten, de structuren waarbinnen ze passen en de eigen wiskundetaal en redeneerstijl die daarvoor werden ontwikkeld. Vanuit vragen intern aan wiskunde zelf over toepasbaarheid, veralgemeenbaarheid en ordening van de ontwikkelde wiskundekennis rijzen vragen naar samenhang en verantwoording van de toegepaste wiskundekennis. In dergelijke processen werd in het verleden ook nieuwe wiskunde gecreëerd.

Binnen deze ordening van wiskundige concepten zijn er doorheen de geschiedenis van de wiskunde *grotere gehelen* ontstaan, zoals *getallenleer, algebra, meetkunde, functieleer, statistiek* … De wiskundevorming van het secundair onderwijs zal de leerlingen vertrouwd maken met deze inhoudelijke gehelen.

Binnen die wiskundevorming moeten we oog hebben voor de interne wiskundige ontwikkeling. De wiskundevorming in de eerste graad, waarbij de leerlingen nog in relatief heterogene groepen samen zitten, kan daartoe maar een beperkte aanzet bieden. Toch is de wijze waarop een leerling met dit aspect van de wiskundeontwikkeling omgaat een aanwijzing bij *de oriëntering*.

2.2 Wiskundevorming

2.2.1 Veranderende opvattingen over wiskundevorming

Wiskundeonderwijs hield zich in het verleden vooral bezig met het aanleren van de belangrijkste items uit getallenleer, algebra, functieleer en meetkunde. Het ging daarbij om *het aanleren van een aantal algoritmen* (het rekenen, in het bijzonder het rekenen met breuken, het oplossen van vergelijkingen, het ontbinden in factoren, het gebruik van meetkundestellingen, later het oplossen van stelsels, het berekenen van afgeleiden …) en *het uitgebreid oefenen om die algoritmen vlot te beheersen*. Dat was nodig, want wie wiskunde wilde gebruiken, moest die algoritmen nauwkeurig en snel zelf kunnen uitvoeren. Toepassingen op de wiskundekennis kwamen sporadisch aan bod.

Vanaf het einde van de zestiger jaren kwam er een kentering in dat onderwijs van de wiskunde. In een eerste periode van verandering werd vooral aandacht besteed aan *het ontwikkelen van de algemene structuren*, waarin 'moderne' wiskunde werd georganiseerd. De rekenalgoritmen (en het indrillen) werden minder belangrijk. De aandacht voor de interne opbouw was dermate groot dat nog weinig aandacht werd besteed aan het betekenisvol invullen van begrippen en het toepassen van de wiskundekennis in problemen buiten de wiskunde.

Ondertussen is *het denken over het leren van wiskunde* geëvolueerd vanuit inzichten in wat wiskundekennis is, en vanuit inzichten in het leren in het algemeen en in het leren van wiskunde in het bijzonder. De constructivistische leeropvatting stelt dat kennis beter actief geconstrueerd wordt door de lerende. Kennis kan niet zomaar passief overgedragen worden. Het proces van kennisverwerving moet rekening houden met de ervaringen van de lerende zelf en gebeurt niet in een daarvan onafhankelijke wereld. Wiskundevorming biedt meer dan een voltooid bouwwerk van objectieve, abstracte, formele kennis. *Het gaat om een proces van structureren en generaliseren van de eigen ervaringen.* In die zin heeft de wiskundevorming een belangrijke bijdrage in de algemene vorming van jongeren.

Steeds meer mensen worden in hun praktijk met toepassingen van wiskunde geconfronteerd. Vandaar dat de maatschappelijke vraag om meer aandacht te besteden aan contextgerichte wiskunde gerechtvaardigd is. Door *de beschikbaarheid van ICT-hulpmiddelen* kan de rekendrempel opgeheven worden. Meer mensen kunnen wiskunde toepassen, ook als ze niet beschikken over de nodige vaardigheid in de rekenalgoritmen. Het gebruik van ICT werkt tijdsbesparend, zowel in de praktijk als in de wiskundelessen.

2.2.2 Ordeningskaders in functie van verschillende opvattingen

Voor de wiskundevorming bestaan er een aantal opvattingen om de vorming zelf en de doelen daarvoor samen te brengen en te ordenen. Ze zijn op te vatten als de bril waarmee je naar wiskunde en wiskundevorming kijkt.

We bespreken achtereenvolgens de ordening uitgaande van:

- inhoudelijke samenhang;
- ontwikkelingsfasen van wiskunde;
- ontwikkeling van vaardigheden;
- competentiedenken.

1 Inhoudelijke samenhang

Een eerste ordeningscriterium is *de inhoudelijke samenhang*. Vanuit de ontwikkelingen in de voorgeschiedenis is wiskunde geordend in een aantal deelgebieden, bijv. *getallenleer, algebra, meetkunde, functieleer, dataverwerking*. Traditioneel worden doelstellingen geordend volgens deze deelgebieden. De opbouw in deze onderdelen verloopt meestal parallel. Er is vaak weinig overlapping tussen de deelgebieden. Toch zijn een aantal denkwijzen en opvattingen over de aanpak gemeenschappelijk.

De leerlingen moeten een minimale kennis en vaardigheid verwerven in het wiskundige *instrumentarium* van deze deelgebieden. Daarmee verwerven ze de basis om goed te kunnen functioneren in een maatschappij, waar wiskunde in vele toepassingen gebruikt wordt.

Anderzijds draagt de wiskundevorming bij tot een fundamentele *denk- en attitudevorming*. Bij het verwerven van wiskundekennis en wiskundige methoden worden *meer algemene denkmethoden* (bijv. het analyseren, het synthetiseren, het hanteren van symmetrie en analogie, het systematisch en methodisch werken), *verwervingstechnieken van kennis* (bijv. herhaling, verbanden leggen, toetsing, verdere abstractie) en *attitudes en opvattingen* ontwikkeld (bijv. het opbouwen van vertrouwen in het eigen kunnen, nauwkeurigheid, doorzettingsvermogen en kritische zin).

Bij het mathematiseren en het oplossen van problemen kunnen leerlingen oplossingsvaardigheden en oplossingsstrategieën verwerven die breder toepasbaar zijn. In het proces van het argumenteren en het bespreken van de kwaliteit van een wiskundige oplossing zal wiskunde bijdragen tot het verwerven van *een kritische houding*, ook ten aanzien van *het eigen denken en handelen*.

2 Ontwikkelingsfasen van wiskundekennis

Een andere ordening wordt gegeven door *de ontwikkelingsfase* (het niveau) waarin wiskundekennis zich bevindt.

Een eerste, belangrijke ontwikkelingsfase is deze waarin *concepten* (begrippen, eigenschappen) ontwikkeld worden. Aansluitend bij het schema van hoe wiskundekennis zich kan ontwikkelen, bouwen we wiskunde op vanuit een proces, waarin begrippen in betekenisvolle situaties gedistilleerd worden uit voorbeelden en tegenvoorbeelden en waarin ze zo goed mogelijk worden geformuleerd. In de aanvang is dit vaak intuïtief, maar doorheen het proces wordt deze verwoording alsmaar beter en in de laatste fase formeler.

Een tweede stap in de ontwikkeling van wiskundekennis wordt gezet, wanneer de aangeleerde begrippen worden gebruikt in berekeningen en/of redeneringen. Het gaat vooral om *procedures en vaardigheden* die concreet worden verworven in de uitvoering van de ontwikkelde algoritmen of reken- en denkregels.

Een derde fase is die van *de ruime toepassing van de verworven concepten* bij het oplossen van problemen uit de leefwereld of uit wetenschappen en techniek. De concepten en de bijbehorende vaardigheden functioneren als *wiskundige modellen*.

Een vierde fase is die van het opzoeken van *de fundamenten van de wiskundekennis*. Zoals al gezegd, wordt in wiskunde getracht nieuwe begrippen en eigenschappen of het geheel ervan te ordenen en te onderbouwen vanuit een brede wiskundige samenhang. Deze laatste fase komt in de eerste graad uiteraard maar beperkt aan bod en is vaak maar weggelegd voor leerlingen die een doorgedreven wiskundevorming verkiezen. Hierin past de fundamentele *denk- en attitudevorming* waarnaar hiervoor al werd verwezen.

3 Ontwikkeling van vaardigheden

Een derde kijkwijzer naar de wiskundevorming is die van *de ontwikkeling van vaardigheden*. Uiteraard zijn binnen deze vaardigheden zoals ze hier geformuleerd worden de kenniselementen een noodzakelijke voorwaarde.

In de praktijk wordt onderscheid gemaakt tussen volgende vaardigheden:

- rekenvaardigheden;
- meet- en tekenvaardigheden;
- wiskundige taalvaardigheden;
- denk- en redeneervaardigheden;
- probleemoplossende vaardigheden;
- leervaardigheden.

Het zijn geen afzonderlijke gehelen. Ze vertonen onderlinge verbanden.

4 Competentiedenken

Een actuele denkwijze over wiskundevorming gaat uit van *competenties*. Het gaat om een breed geheel van vorming, aansluitend bij een aantal algemene competenties en de constructivistische gedachte dat leerlingen best zelf die competenties ontwikkelen. In de vorming worden de verschillende aspecten van kennis, vaardigheden, attitudes en opvattingen geïntegreerd.

In de vakliteratuur worden meestal een achttal fundamentele wiskundige competenties beschreven. Ze beschrijven telkens een van de essentiële aspecten van het wiskundeproces.

Enerzijds gaat het over competenties betreffende *het vermogen (en de bekwaamheid) om vragen te stellen en te beantwoorden over en met wiskunde*.

De leerlingen ontwikkelen het vermogen tot:

- wiskundig denken;
- het aanpakken en oplossen van problemen;
- het formuleren van wiskundige argumenten;
- het wiskundig modelleren van situaties.

Anderzijds betreft het competenties die *het vermogen* aangeven *om wiskundetaal en wiskundige hulpmiddelen in te zetten*.

De leerlingen ontwikkelen het vermogen tot:

- het representeren van situaties met behulp van wiskunde;
- het hanteren van een specifieke wiskundetaal (o.m. symbolen en formalisme);
- het communiceren in en met wiskunde;
- het gebruiken van hulpmiddelen.

In 2.3 worden deze competenties verder toegelicht.

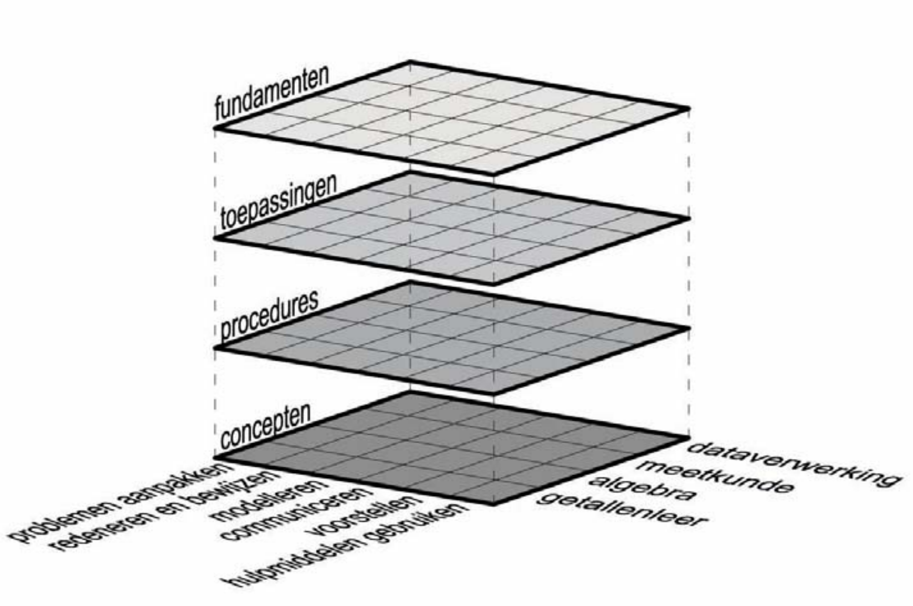
De gelijkenis met de kijkwijzer vanuit vaardigheden valt op. Toch is het belangrijk te beseffen dat hier niet alleen de vaardigheden een rol spelen. De kenniselementen zijn evenwaardig. Het is precies in de integratie en in het evenwichtig uitbouwen van alle aspecten dat de rijkdom van deze opvatting ligt.

Belangrijk is te beseffen dat de wiskundevorming in de eerste graad niet het eindpunt van die vorming is. Ze geeft een belangrijke aanzet, maar het vormingsproces moet in de bovenbouw verder gezet worden. *Daarbij bestaat dan de keuze tussen een ruime en brede, meer onderbouwde wiskundevorming, waarbij wiskunde dragend vak van die vorming is, of een verdere basisvorming waarbij wiskunde hoofdzakelijk als ondersteunend vakgebied aan bod zal komen.*

5 Meerdimensionale kijkwijzer

Het leerplan wil wijzen op de rijkdom van elk kijkpunt. In actueel wiskundeonderwijs heeft het geen zin meer om uitsluitend te focussen op de inhoudelijke ordening. Daardoor gaat de kijk op de algemeen vormende aspecten van de wiskundevorming verloren. Maar zoals al aangegeven hebben vaardigheden en competenties geen zin zonder adequaat functionerend kennisbestand.

Meer heil valt te verwachten van een kijk vanuit een raster waarbij de verschillende aspecten overlappen. In het hierna volgend schema zijn zowel de inhoudelijke als de vaardigheidsaspecten aangegeven. Ze vormen de vezels van een hecht raster wiskunde. Voor de duidelijkheid nemen we competenties als ‘wiskundetaal hanteren’ en ‘communiceren’ samen, en nemen we het algemenere ‘wiskundig denken’ op in de verschillende andere competenties. Merk op dat de vaardigheden, met uitzondering van de leervaardigheden, volledig zijn opgenomen in de competenties.



Dergelijke invalshoek biedt de mogelijkheid om de vele verschillen die in de wiskundevorming (van de eerste graad) mogelijk zijn, een kader te geven. Het raster zal maar sterk zijn als voldoende onderdelen binnen voldoende competenties ontwikkeld zijn. De gelaagdheid, die gesuggereerd wordt in de ontwikkelingsniveaus van wiskunde, laat inzien dat leerlingen voor een onderdeel al op een hoger niveau kunnen functioneren en voor een ander niveau nog in de intuïtieve verkenningsfase van concepten kunnen zijn. Ook voor verschillende leerlingen in een klasgroep zijn verschillende ontwikkelingsniveaus mogelijk. Dergelijke interpretatie vraagt een flexibel leerplan en een flexibele interpretatie ervan. Dergelijke interpretatie suggereert dat uitgaande van de bestaande ‘kennis’ van leerlingen verschillende mogelijkheden bestaan om die te verrijken, bijv. een andere competentie of vaardigheid ontwikkelen, een andere inhoud aanpakken, een ander ontwikkelingsniveau nastreven. Een wiskundeaanpak zal dus een gedifferentieerde aanpak zijn, voortbouwend op de situatie van de leerling en zijn mogelijkheden.

2.3 Wiskundige competenties

Wiskundige competenties bezitten, duidt op het vermogen van een individu om wiskunde te begrijpen, te gebruiken en te beoordelen in een breed gamma van contexten. Externe contexten zijn situaties uit de leefwereld, waarin wiskunde gebruikt wordt voor het beschrijven, het verklaren, het beheren … Meteen is duidelijk dat iemand wiskundige competenties kan bezitten op een beperkt extern terrein (bijv. binnen een bepaalde soort toepassing). Ook de wiskunde zelf kan context aanreiken om het proces van onderzoeken, beschrijven en/of verklaren te ontwikkelen.

Wiskundig competent zijn, betekent *beschikken over wiskundige kennis, vaardigheden, houdingen en opvattingen, en zo dat die optimaal kunnen gebruikt worden bij het aanpakken en oplossen van problemen binnen en buiten de wiskunde of waarbij wiskunde een rol speelt.*

De wiskundige competenties worden in dit deel geconcretiseerd tegen de achtergrond van de wiskundevorming in de eerste graad door ze te verbinden aan wiskundige activiteiten.

1 Wiskundig denken

Concretisering in wiskundige activiteiten:

- Leerlingen kunnen *wiskundige vragen stellen*:
  - kwantitatieve vragen
    (vragen naar een hoeveelheid, een aantal, een resultaat van een bewerking ...);
  - kwalitatieve vragen
    (vragen naar een onderlinge relatie of onderlinge ligging, naar een functioneel verband zoals rechtevenredig zijn, naar een beoordeling van een resultaat, een vermoeden of een bewering, naar het waarom van de voorgestelde oplossing).
- Leerlingen weten *welk type van antwoorden* bij *welk type van vragen* hoort (beweringen, bewerkingen).
  Ze maken *onderscheid tussen verschillende wiskundige omschrijvingen* (voorbeelden, definities, eigenschappen, vermoedens, hypothesen, veronderstellingen, aannames al of niet geconditioneerd door situaties).
  Ze kunnen de (wiskundige) waarde van een antwoord inschatten (een voorbeeld weegt niet zo sterk als een eigenschap, een tegenvoorbeeld heeft wel bewijskracht).
- Leerlingen hebben *inzicht in het proces* van wiskundige conceptvorming (zowel bij het opbouwen van begrippen, als bij het onderzoeken en formuleren van eigenschappen, regels, algoritmen, methoden).
  Ze kennen de mogelijkheden en beperkingen, die bij de concepten horen en kunnen die hanteren (bijv. delen door nul kan niet, bij de aftrekking mag je aftrektal en aftrekker niet van plaats verwisselen).
- Leerlingen hebben *inzicht in het opbouwen van concepten vanuit veralgemening van onderzochte situaties* (voorbeelden en tegenvoorbeelden). Ze kunnen concepten concretiseren in een bepaalde context. Ze stellen zich de vraag of een concept ruimer toepasbaar is dan de concrete situatie waaruit het is opgebouwd.
- Leerlingen beschikken over hanteerbare denkschema's, waardoor ze vlot kunnen omgaan met *de interne samenhang* van hun wiskundige kennis.

2 Wiskundig problemen aanpakken en oplossen

Concretisering in wiskundige activiteiten:

- De leerlingen kunnen (en durven) verschillende soorten (wiskundige) *problemen stellen* (toegepaste problemen, zuiver wiskundige problemen, open en gesloten probleemsituaties).
  Ze gebruiken wiskundige kennis en vaardigheden bij het analyseren van situaties en het afbakenen van de probleemstelling.
- Leerlingen kunnen problemen oplossen met *het gebruik van heuristiek*:
  - *een tekening of een schets maken* om de situatie en de samenhang te verduidelijken;
  - *een (werk)hypothese of vermoeden formuleren*, al enigszins rekening houdend met de vastgestelde wiskundige relaties;
  - het probleem onderzoeken voor *bijzondere gevallen* (bijv. randvoorwaarden); een vermoeden een eerste maal toetsen met behulp van getallenvoorbeelden;
  - *een patroon of symmetrie zoeken* in de situatie (bijv. bij bewerkingen, bij reeksen gegevens, bij figuren);
  - *ontbrekende informatie* opzoeken;
  - *de omgekeerde redenering* opzetten (bijv. van achter naar voor werken);
  - het probleem *herformuleren*; bijv. eerst een gemakkelijker (equivalent) probleem oplossen;
  - een probleem *opsplitsen in deelproblemen*; bijv. door in een situatie, gegeven met een formule, een van de veranderlijken constant te houden.

- De leerlingen kunnen verschillende *oplossingswijzen* (ook van anderen) *vergelijken* en bespreken, bijv. met oog voor eenvoud, effectiviteit, een brede toepasbaarheid, de mogelijke veralgemening of algoritmisering, de elegantie van de oplossing ...
- De leerlingen kunnen evenwichtig omgaan met kritische overwegingen bij een oplossing die ze voorstellen.

3 Wiskundig modelleren

Concretisering in wiskundige activiteiten:

- De leerlingen kunnen *wiskundige modellen gebruiken* in een bepaalde context. Ze kunnen bij het analyseren en het structureren van een situatie een gekend wiskundig model herkennen en de situatie daarmee wiskundig beschrijven (mathematiseren).

  Voorbeelden
  - bewerkingen, evenredigheden, vergelijkingen, (later stelsels, functies);
  - onderlinge ligging van punten en rechten;
  - meetkundige situaties waarin lengten van lijnstukken, hoekgrootte, vorm, congruentie, symmetrie, ruimte … een rol spelen;
  - statistische maten, diagrammen, grafieken.
- Ze kunnen omgekeerd een wiskundig model, of de resultaten die ermee verworven zijn, *interpreteren en terugkoppelen* naar de context (demathematiseren).
- Ze kunnen de technische handelingen in een (gekend) model effectief uitvoeren (bijv. *berekeningen maken, vergelijkingen oplossen*).
- De leerlingen ontwikkelen het vermogen om *een bestaand wiskundig model te onderzoeken,* te begrijpen, het toe te passen, de werking ervan te controleren en de toepasbaarheid kritisch te bespreken. Ze kennen de beperkingen van modellen en kunnen die inbrengen in het proces als nodig (bijv. een vergelijking heeft niet altijd een oplossing).
- *Ze reflecteren op het gebruik van modellen* en de modelvorming zelf. Ze kunnen het gebruik en het misbruik van modellen bespreken (bijv. grafieken, diagrammen in de media).

4 Wiskundig argumenteren

Concretisering in wiskundige activiteiten:

- De leerlingen kunnen *een gegeven argumentering begrijpen en evalueren*.
- De leerlingen kunnen *wiskundige argumenten* geven, *heuristiek* gebruiken, formeel en niet-formele argumenten onderscheiden en een meer intuïtieve redenering ombuigen tot een onderbouwde verklaring.
- De leerlingen *begrijpen wat wiskundig bewijzen betekent* en hoe deze redeneringen te onderscheiden zijn van andere vormen van wiskundig redeneren (bijv. door middel van heuristiek).
- Ze kunnen omgaan met de vaagheid van een informele redenering, maar die specificeren als daartoe de noodzaak ontstaat.
- Ze kunnen evenwichtig omgaan met kritische overwegingen bij een opgestelde redenering.

5 Wiskundige voorstellingen maken

Concretisering in wiskundige activiteiten:

- De leerlingen kunnen o*nderscheid maken tussen verschillende voorstellingen* (representaties) van wiskundige objecten en situaties (bijv. tabelvorm, diagram, grafiek, formule). Ze kunnen die correct interpreteren en de onderlinge verbanden aangeven tussen de voorstellingen.
- De leerlingen *maken gebruik van verschillende wiskundige voorstellingen*, naargelang van de situatie of het doel, maar ook in functie van de wiskundige mogelijkheden van de representatie.

Voorbeelden

- de vorm kiezen waarin gegevens worden voorgesteld (tabel, grafiek, diagram);
- een schets, een tekening of een constructie gebruiken naargelang de noodzaak;
- weten welke informatie kan verloren gaan bij gebruik van tabellen, diagrammen, een gemiddelde of een mediaan;
- weten welke informatie kan verloren gaan bij het voorstellen van een ruimtelijke situatie in een vlakke figuur.

6 Wiskundige taal hanteren (o.m. symbolen, formele taal)

Concretisering in wiskundige activiteiten:

- De leerlingen kunnen *taalvaardigheden* hanteren uit de dagelijkse taal (*lezen, schrijven, luisteren, spreken*).

  Voorbeelden
  - bij het analyseren van opdrachten en probleemsituaties;
  - bij het verwoorden van wiskundige situaties;
  - bij het beantwoorden van gestelde vragen.
- De leerlingen kunnen de *grafische taal* hanteren eigen aan de wiskunde.

  Voorbeelden
  - meetkundige voorstellingen en constructies;
  - ruimtelijke voorstellingen met hun beperkingen (tot twee dimensies);
  - grafieken en diagrammen.
- De leerlingen kunnen *symbolische, formele en (reken)technische taal* van de wiskunde zelf hanteren. Ze hanteren wiskundetaal met nauwkeurigheid al naargelang de situatie dat vereist.
  In het bijzonder kunnen ze symbolen begrijpen en correct verwoorden.
- De leerlingen kunnen *gewone taal vertalen* naar een meer symbolische en formele wiskundetaal en omgekeerd. Ze kunnen *de visuele taal* van beeld en tekeningen vertalen naar gewone taal en omgekeerd.
  In het bijzonder hanteren ze *letters als onbekenden, in veralgemeningen, in formules en als veranderlijken*.
- Ze hanteren een *correcte terminologie* in verband met begrippen (definities), eigenschappen, stellingen ...

7 Wiskundig communiceren

Concretisering in wiskundige activiteiten:

- De leerlingen kunnen *communiceren over hun wiskundige aanpak*, hun wiskundig denken verwoorden, mondeling en schriftelijk (in gewone taal, in wiskundetaal en in visuele, grafische taal).
- De leerlingen kunnen *een wiskundige redenering* van anderen *begrijpen*, zowel als de informatie mondeling, schriftelijk als visueel gepresenteerd wordt.

8 Hulpbronnen en hulpmiddelen gebruiken

Concretisering in wiskundige activiteiten:

- De leerlingen kunnen in externe bronnen (bijv. internet) *datagegevens* (contextinformatie) *opzoeken* in functie van het oplossen van een gesteld probleem.
- De leerlingen *gebruiken verschillende hulpmiddelen* die wiskundige activiteiten ondersteunen.

  Voorbeelden
  - *een rekenmachine* (ook de handleiding);
  - *beperkte softwaretoepassingen* (ook de handleiding en de werkkaarten);
    - voor berekeningen;

- voor voorstellingen (meetkundesoftware, diagrammen en grafieken);
- voor het opzoeken, het bewaren en het uitwisselen van informatie (cf. begeleid zelfstandig leren, elektronisch leerplatform);
- voor training en remediëring;
- *een vademecum of een formularium*.

- De leerlingen kennen de *beperkingen* van hulpmiddelen. Ze kunnen *kritisch omgaan met de informatie* verkregen met behulp van hulpbronnen en hulpmiddelen (bijv. kritisch omgaan met een resultaat van een rekenmachine).

9 Competentieontwikkeling, een werk van lange adem

De wiskundevorming streeft ernaar de fundamentele competenties bij alle leerlingen te ontwikkelen. De ontwikkeling ervan is een opdracht voor het geheel van de vorming (basisonderwijs en secundair onderwijs). Naargelang de keuze die de leerlingen (zullen) maken voor wiskunde, zal competentieontwikkeling met wiskunde al of niet uitgebreider aan bod komen. In de eerste graad kan hiervoor al een belangrijke aanzet gegeven worden. Omdat de klasgroepen meestal heterogeen zijn samengesteld, zal een evenwicht gezocht worden tussen verwachtingen, mogelijkheden en kansen, waarbij alle leerlingen tot hun recht komen. Dat kan bijvoorbeeld In functie van de keuze die leerlingen al of niet willen maken voor wiskunde of in functie van de wiskundige onderbouw die nodig is voor hun vervolgstudie.

Noodzakelijk voor wiskundige competenties is het bezitten van *een goed georganiseerde basiskennis wiskunde en een aantal technische vaardigheden* (zoals bijv. reken-, meet- en tekenvaardigheid). Ze zijn noodzakelijk maar als geïsoleerde kennis of vaardigheid volstaan ze niet. Ze moeten geïntegreerd ingezet kunnen worden. Toch is het zinvol bij voorbaat het belang van deze basiskennis te onderkennen. Als ze niet aanwezig is, zal ook de competentie niet aanwezig kunnen zijn. Dit verantwoordt echter niet het geïsoleerd werken aan kennisverwerving. Kennis wordt beter verworven doorheen *een actief leerproces.*

Inzicht in de ontwikkeling van competenties geeft aan dat dit maar kan in een geleidelijk ontwikkelingsproces met een groeiend beheersingsniveau in een competentie (kennis, vaardigheid, attitude). Verschillende elementen kunnen op verschillende beheersingsniveaus aanwezig zijn. Zo zullen bepaalde onderdelen voorkomen op verkenningsniveau (als lerende), andere al op een hoger wiskundig niveau (als geroutineerd gebruiker) of op een formeel niveau (als professional of expert).

Voorbeelden

- Rekenvaardigheid met getallen (hoofdrekenen, handmatig rekenen, schatten en gebruik rekenmachine) zou in de eerste graad op het expertniveau moeten aanwezig zijn.
- Bewijsvaardigheid zal in de eerste graad nog volop op verkenningsniveau functioneren.
- Bepaalde begrippen worden in de basisschool op gebruikersniveau ontwikkeld (bijv. vierkant, rechthoek, diagram, grafiek). Als deze begrippen in de verdere wiskundevorming meer formeel moeten functioneren, volstaat een dergelijke benadering niet en moet een bruikbare definitie gegeven worden.

3 Wiskundevorming in het basisonderwijs

Het streefdoel voor het leergebied wiskunde is dat leerlingen de nodige competenties (kennis en kunde) en de juiste ingesteldheid tot op zekere hoogte verwerven en integreren (Leerplan wiskunde - VVKBaO p. 22).

3.1 De algemene doelen van het wiskundeonderwijs in het basisonderwijs

In het basisonderwijs worden zes algemene doelen nagestreefd:

- Fundamentele wiskundige kennis, inzichten en vaardigheden verwerven.
- Wiskundige kennis, inzichten en vaardigheden in verband brengen met en gebruiken in betekenisvolle situaties, ook in andere leergebieden en buiten de school.
- De nodige wiskundetaal begrijpen en gebruiken, zowel in de wiskundeactiviteiten en -lessen als daarbuiten.
- Een onderzoeksgerichte ingesteldheid ontwikkelen.
- Zoekstrategieën (heuristiek) ontwikkelen om (wiskundige) problemen op te lossen en de vaardigheid verwerven om na te denken over eigen (wiskundige) denk- en leerprocessen en om die bij te sturen.
- Een juiste opvatting over en waardevolle houdingen bij wiskunde verwerven.

Voor de concrete uitwerking zie het leerplan wiskunde VVKBaO pagina 19 – 22.

3.2 Krachtlijnen in het leerplan

- Het wiskundeonderwijs in de basisschool heeft onder meer als doelstelling wiskundige vaardigheden te verwerven die nodig zijn om dagdagelijkse praktische problemen aan te kunnen. Het leerplan streeft ernaar dit aspect duidelijk te maken voor de leerlingen. Zo wordt gestreefd naar een positievere houding ten opzichte van wiskunde.
- Vertrekken van *betekenisvolle situaties* en opgaven en intuïtieve inzichten (begrip lijn, vlak ...) is een belangrijk uitgangspunt. Veel belang wordt gehecht aan het begrijpen van een probleem en de vertaling naar de wiskunde. Schatten, interpreteren van resultaten en het nuttig gebruik van een zakrekenmachine als hulpmiddel en controlemiddel komen geregeld aan bod.
- Er is ruimte voorzien voor inoefening, automatisering en verwerving van *parate kennis.*
- De hoeveelheid parate kennis (bijv. formules, metend rekenen, metriek stelsel) en de moeilijkheidsgraad (bijv. breuken, percentrekening) is *beperkt*. Formules komen slechts bij het einde van het begripsproces (bijv. het bedekkingsproces bij de oppervlakte).
- Veel nadruk ligt op *inzicht* in de opbouw van formules en algoritmen en op het gebruik maken van deze inzichten om zelf nieuwe formules af te leiden.
- Dit uit zich in de *domeinoverschrijdende doelstellingen*. Hier gaat de aandacht naar algemeen toepasbare strategieën die de leerlingen kunnen gebruiken, naar reflectie over het bedrijven van wiskunde en naar een positieve houding ten opzichte van wiskunde.
- Aan de *actieve inbreng* van de leerlingen wordt veel waarde gehecht. Leerlingen brengen oplossingswegen aan en leren verschillende oplossingswegen vergelijken.
- *Verzamelingen, relaties en logisch denken* worden functioneel gebruikt. Dit betekent dat de leerlingen nog wel verzamelen (bijv. zoek de delers van 20), maar het formeel noteren (venndiagram, opsomming, omschrijving) komt niet aan bod.

3.3 Een overzicht van de leerdomeinen

Er zijn *vijf leerdomeinen:*

- getallenkennis
- bewerkingen
- meten en metend rekenen
- meetkunde
- domeinoverschrijdende doelen

3.3.1 Getallenkennis

Natuurlijke getallen

- Natuurlijke getallen worden intuïtief als aanduiding van een *hoeveelheid* aangebracht. Nadien volgen andere functies van getallen zoals *rangorde*, *verhouding*, in een *bewerking* en als *code* (bijv. bij een fietsslot).
- Getallen tot *1 000 000 000* gebruiken.
- *Herstructureren van getallen*: bijv. 96 is ‘4 minder dan 100’; 96 is ‘80 en 16’. Dit gebeurt ook bij kommagetallen en breuken.
- *Andere talstelsels verkennen* om het inzicht in het wiskundig systeem te verdiepen.
- De *kenmerken van deelbaarheid* (2, 4, 5, 10, 25, 100, 1000, 3, 9) kunnen gebruiken.
- Het begrip *priemgetal* staat niet in het leerplan.

Breuken

- Breuken interpreteren en gebruiken als:
  - *operator* (een stuk (deel) van, een verdeling, een vermenigvuldigingsfactor);
  - *(rationaal) getal* (getallenas, resultaat van een deling);
  - *verhouding* (o.m. als aanduiding voor kans).
- De nadruk bij breuken ligt op het werken met *eenvoudige breuken*.

Kommagetallen

- Het aantal *cijfers na de komma* is beperkt tot 3.
- De *omzetting* van een breuk naar een kommagetal gebeurt enkel in eenvoudige en zinvolle gevallen.

Negatieve getallen

- Deze getallen enkel gebruiken *in concrete situaties* (parkeergarage, verdiepingen, temperatuur).
- Bewerkingen met negatieve getallen komen *niet* aan bod.

Schatten en afronden

- De graad van nauwkeurigheid wordt bepaald door het doel van het afronden en door de situatie.

Toepassingen

- De leerlingen sporen *orde, regelmaat, verbanden, patronen en structuren* tussen en met getallen op en ze onderzoeken en bedenken zelf voorbeelden.
- Ze kunnen *tabellen, grafieken, staaf- en cirkeldiagrammen* interpreteren en opstellen.

3.3.2 Bewerkingen

- Leerlingen kunnen de *samenhan*g leggen *tussen een bewerking en een situatie* en omgekeerd. Hier komt heel wat wiskundetaal bij te pas.
- *Eigenschappen* van (schakelen ...) en *relaties tussen bewerkingen* door ervaring ontdekken en kunnen toepassen.
- *Terminologie*:
  - "van plaats wisselen" in plaats van "commutativiteit";
  - "schakelen" in plaats van "associativiteit";
  - "splitsen en verdelen" in plaats van "distributiviteit".
- Bij het *hoofdrekenen* gaat veel aandacht naar de *automatisering* van de optelling en de aftrekking tot 20 en de tafels tot 10. *Toch zal een beperkt aantal leerlingen de tafels niet volledig geautomatiseerd krijgen*.
  Daarnaast vraagt het leerplan dat de leerlingen *flexibel een doelmatige oplossingsmethode* kiezen. Leerlingen kunnen uit het hoofd vermenigvuldigingen met en delingen door 2, 10, 100, 1000, 10 000, 5 en 50 uitvoeren.
- *Bewerkingen met breuken* worden beperkt tot eenvoudige breuken, voornamelijk in praktische gevallen. De volgende gevallen komen aan bod:
  - optellen en aftrekken van gelijknamige en ongelijknamige breuken;
  - een natuurlijk getal maal een breuk;
  - een breuk maal een breuk;
  - een breuk gedeeld door een natuurlijk getal;
  - een natuurlijk getal gedeeld door een stambreuk (*niet:* een natuurlijk getal gedeeld door een willekeurige breuk en een breuk gedeeld door een breuk).
- *Hoofdrekenen met kommagetallen* wordt beperkt tot eenvoudige gevallen.
- *Percenten* berekenen in eenvoudige en praktische situaties.
- Bij bewerkingen komt *schattend rekenen* als een aparte rubriek aan bod. Het wordt gebruikt om een uitkomst bij benadering te bepalen of een grootteorde te kennen. Bijkomend worden *schatprocedures* gebruikt om onvolledige of ontbrekende gegevens aan te vullen.
- Bij het *cijferen* worden de groottes van de getallen beperkt. De nadruk ligt op het inzicht in de cijferalgoritmes. De *negenproef is geen leerstof*.
- De *zakrekenmachine* wordt als handig hulpmiddel ingeschakeld.
- Als toepassingen zijn er *vraagstukken* over:
  - verhoudingen bepalen;
  - recht en omgekeerd evenredige grootheden;
  - mengen;
  - wisselen;
  - groeipercentages berekenen;
  - gemiddelde en mediaan, ongelijke verdeling;
  - bruto, tarra en netto.

3.3.3 Meten en metend rekenen

- De indeling is als volgt:
  - kwalitatief vergelijken zonder een maateenheid te gebruiken;
  - meten met natuurlijke maateenheden (bijv. handen, voeten ...);
  - meten met standaardmaateenheden;
  - toepassingen.

- *Referentiematen* kennen uit het dagelijks leven van de leerlingen (1 kg is het gewicht van een doos suiker, 1 l is de inhoud van een doos melk ...) zijn van belang om goed te kunnen schatten.
- *Herleidingen* worden beperkt tot zinvolle gevallen tussen hoofdeenheid en een afgeleide eenheid ($1\,m^2 = 10\,000\ cm^2$) en tussen frequent gebruikte maateenheden (1 dl = 10 cl).
- Het *metriek stelsel* wordt sterk beperkt:

- lengte	km, m, dm, cm, mm;			
- oppervlakte	km^2, m^2, dm^2, cm^2	en	ha, a, ca	(en het verband);
- inhoud en volume	l, dl, cl, ml	en	m^3, dm^3, cm^3, cc	(en het verband);
- gewicht	ton, kg, g.			

Lengte

- Lengtemetingen: de *omtrek van vlakke figuren* berekenen en hierbij de eigenschappen van de zijden gebruiken.
- De lengte van grillige lijnen bij benadering bepalen.

Oppervlakte

- De *oppervlakteformules* van een rechthoek, een vierkant, een parallellogram (basis x hoogte) en een driehoek paraat kennen en gebruiken.
- De techniek van het *omstructureren* kennen (bijv. de oppervlakte van een ruit vinden door er met knip- en plakwerk een rechthoek van te maken waarvan de oppervlakteformule gekend is).
- Inzien dat de *oppervlakte van een cirkel* berekend wordt via de benadering met een veelhoek en dat de formule $r \times r \times \pi$ is.
- De oppervlakte van grillige figuren bij benadering bepalen.
- Inzien dat de oppervlakte van een kubus, een balk en een cilinder gelijk is aan de som van de oppervlakten van de grensvlakken (de formules zijn geen parate kennis).

Inhoud en volume

- De formule (oppervlakte grondvlak x hoogte) kennen en gebruiken bij een kubus, een balk en een cilinder.
- Het volume van grillige lichamen bij benadering bepalen.

Gewicht

- Ervaren dat het gewicht afhankelijk is van andere dingen dan het volume.

Tijdstip en tijdsduur, geldwaarden, temperatuur en hoekgrootte

Toepassingen

- Bevatten de klassieke *vraagstukken:*
  - prijsberekeningen;
  - winst, verlies;
  - tijd, afstand, snelheid;
  - sparen, kapitaal, enkelvoudige intrest;
  - korting;
  - soortelijk gewicht.
- Aandacht voor het indirect meten, *tabellen, het interpreteren van grafieken en staafdiagrammen, verhoudingen, schaal* ...

3.3.4 Meetkunde

De doelen en leerinhouden voor meetkunde zijn in vier grote rubrieken geordend.

Ruimtelijke oriëntatie

In de eerste en tweede graad van het basisonderwijs houdt ruimtelijke oriëntatie vooral het opbouwen van *ruimtelijke ervaringen* en het verwerven van woordenschat in.

Voor de hogere leerjaren komen *verschillende gezichtspunten* aan bod zoals voor-, boven- en zijaanzichten, maar ook andere voorstellingswijzen als maquettes, plattegronden ...

Vormleer

Punten, lijnen, vlakken, hoeken

De ervaringen van leerlingen bij de *meetkundige verkenning van voorwerpen en figuren* leggen een basis voor vormleer. Begrippen als punt, rechte, lijn, vlak, hoek ... worden vanuit de intuïtie begrepen. De leerlingen moeten ze niet kunnen omschrijven. Het aantal termen is beperkt (bijv. hoek wordt omschreven als het gebied afgebakend door twee benen; halfrechte wordt niet gebruikt; het woord cirkel wordt zowel gebruikt voor de lijn als voor de schijf).

Vlakke figuren

Ervaringen met voorwerpen en vlakke figuren geven invulling aan begrippen als driehoekig, rond, vierhoekig, puntig. Eerst worden vierkant en rechthoek meetkundig verkend. Later komen de ruit, het parallellogram, het trapezium, veelhoeken en de cirkel aan bod. De leerlingen leren de verschillende soorten driehoeken kennen, benoemen en tekenen.

Classificaties volgens een toenemend of een afnemend aantal eigenschappen gebeuren alleen in het zesde leerjaar m.b.v. een schema.

Ruimtefiguren

Een kubus, een balk, een piramide, een bol, een cilinder en een kegel benoemen.

Meetkundige relaties

Evenwijdigheid, loodrechte stand, symmetrie, gelijkheid van vorm en grootte en gelijkvormigheid eerst ontdekken en nadien toepassen in eenvoudige tekenconstructies.

Het gebruik van de geodriehoek staat expliciet op het leerplan. Constructies met behulp van een passer worden niet gevraagd.

Toepassingen

Bij de toepassingen zijn er doelen als:
- figuren vervormen;
- met voorschriften constructies uitvoeren;
- oplossingen bedenken bij een ruimtelijk probleem;
- werken met schaduwbeelden en kijklijnen;
- tekenopdrachten uitvoeren;
- patronen herkennen (en verder tekenen);
- meetkundige vraagstukken oplossen;
- vlakke figuren tekenen volgens een gegeven verhouding.

3.3.5 Domeinoverschrijdende doelen

De domeinoverschrijdende doelen kunnen met kinderen slechts *geleidelijk* aan gedurende hun hele onderwijsloopbaan worden bereikt. Ze worden gegroepeerd in drie rubrieken.

Wiskundige problemen leren oplossen

- Strategieën kennen en gebruiken.
- Zoekstrategieën ontwikkelen.
- Nadenken over het eigen oplossingsproces en dat sturen.
- Doeltreffende houdingen tegenover het oplossen van wiskundige problemen ontwikkelen.

Wiskundige leertaken leren aanpakken

- Methodes leren om wiskunde te studeren.
- Nadenken over hoe men te werk gaat om wiskundige leertaken aan te pakken.
- Doeltreffende opvattingen over en houdingen ontwikkelen tegenover het leren van wiskunde.

Leren communiceren over wiskunde

- Samenwerken en communiceren.
- De communicatieve functie van wiskundetaal ervaren.
- Nadenken over communicatie bij wiskunde.
- Doeltreffende opvattingen over en houdingen ontwikkelen tegenover communicatie bij wiskunde.

4 Wiskundevorming in de eerste graad

4.1 Algemene doelstellingen voor wiskunde

Competenties

Zoals in de onderdelen 2.2 en 2.3 is uitgewerkt, is in wiskunde het nastreven van kennisdoelen, vaardigheidsdoelen en attitudedoelen belangrijk op zich. Nochtans krijgen ze pas hun volle waarde in een proces van integratie in competentiedoelen gericht op denken, redeneren, modelleren, communiceren, probleem oplossen ...

Kennis en inzicht

De leerlingen ontwikkelen:

- een wiskundig basisinstrumentarium van begrippen, eigenschappen en methoden uit de meetkunde en uit de getallenleer, met inbegrip van een aanzet in de algebra en de dataverwerking;
- het inzicht in verbanden tussen wiskundige leerinhouden onderling en tussen wiskundige leerinhouden en andere vakdisciplines;
- het inzicht in het verwerken van numerieke informatie en beeldinformatie;
- een aantal wiskundige denkmethoden om verbanden te leggen, te ordenen en te structureren.

Vaardigheden

De leerlingen ontwikkelen:

- rekenvaardigheden;
- meet- en tekenvaardigheden;
- wiskundige taalvaardigheden;
- denk- en redeneervaardigheden;
- probleemoplossende vaardigheden;
- leervaardigheden.

Attitudes

De leerlingen ontwikkelen:

- zin voor nauwkeurigheid en orde;
- zin voor helderheid, bondigheid, eenvoud van taalgebruik;
- kritische zin;
- zelfvertrouwen, zelfstandigheid en doorzettingsvermogen;
- zelfregulatie;
- zin voor samenwerking en overleg;
- waardering voor wiskunde als een dynamische wetenschap en als een component van cultuur.

Verwerking in het leerplan

De vaardigheden en attitudes worden voorzien voor de gehele eerste graad en worden verwerkt in het onderdeel 5.1.

De wiskundige *leerinhouden* worden verwerkt in het onderdeel inhoudelijke leerplandoelstellingen (5.2 en 5.3).

De concrete leerinhouden voor de eerste graad worden opgedeeld in twee grote componenten: *de getallenleer* met een numeriek en een algebraïsch onderdeel en *de meetkunde*. De doelen over dataverwerking worden geïntegreerd in het deel getallenleer. Verbanden tussen de getallenverzamelingen worden aangezet. Ook het verband tussen de getallenleer en de meetkunde komt aan bod.

Aansluiting met het basisonderwijs

Het deel *getallenleer* sluit aan bij de onderdelen *getallenkennis* en *bewerkingen* uit de basisschool. Het deel *meetkunde* sluit aan bij de onderdelen *meten en metend rekenen* en *meetkunde*. Voor meten en metend rekenen mag gesteld worden dat de fundamentele, maatschappelijke doelen in principe bereikt zijn in de basisschool. In de eerste graad worden deze doelen niet systematisch hernomen, maar komen ze wel onvermijdelijk aan bod als kennis en vaardigheid bij het oplossen van vraagstukken en problemen. Het onderdeel *domeinoverschrijdende doelen* van het basisonderwijs wordt in dit leerplan verder gezet in het onderdeel *vaardigheden en attitudes,* in het bijzonder bij *probleemoplossende vaardigheden* en *leervaardigheden.*

Hoofdstuk 3 biedt een duidelijke kijk op de beginsituatie van de leerlingen. Het geeft een overzicht van de leerinhouden van het leerplan van de basisschool, zoals ze verwerkt worden in de praktijk.

In het algemeen is het aangewezen om via diagnostisch toetsen op te meten welke het residu is (wat netto aanwezig is aan kennis en vaardigheden) van de vorming in het basisonderwijs. Op basis daarvan kan een gerichte bijsturing en/of herhaling of eventueel remediëring opgezet worden.

4.2 Algemene pedagogisch didactische wenken

Kennis en inzicht

In de eerste graad moet voldoende aandacht besteed worden aan *de begripsvorming*. Een eerste abstractie van nieuwe begrippen wordt ondersteund door voorbeelden, die onder meer kunnen aansluiten bij de ervaringswereld van de leerlingen of bij de historische ontwikkeling van het begrip. In een onderzoeksfase kunnen de leerlingen zelf ervaren wat de relevante en niet-relevante kenmerken van een begrip zijn. Bij het verbinden van nieuwe ervaringen aan het begrip of het niet meer behoorlijk functioneren van het begrip kunnen leerlingen hierop terugvallen. De aanbreng van nieuwe eigenschappen kan op gelijkaardige wijze aangepakt worden.

Naast het aanzetten van nieuwe begrippen en eigenschappen zal ernaar gestreefd worden een aantal begrippen en eigenschappen uit te diepen en op *een hoger verwoordingsniveau* te brengen, waarbij de vaktaal al met een redelijke exactheid wordt gehanteerd. Dit betekent niet dat de leerlingen meteen met de gehele achterliggende wiskundetheorie moeten geconfronteerd worden.

Het inbrengen van vaktaal kan leiden tot *een eerste formalisering* van de omgangstaal. Vakterminologie, notaties en symbolen zijn geen doel op zich, maar zijn een middel om de gemaakte redeneringen adequaat en beknopt uit te drukken. Dit leerproces is een groeiproces, waarbij rekening moet gehouden worden met de mogelijkheden van de leerlingen. Het vlot beheersen van de wiskundetaal, voor sommige leerlingen zelfs het vlot omgaan met de gebruikelijke schooltaal, stelt soms problemen. Daarom zal in de eerste graad veel aandacht besteed worden aan het ontwikkelen van (wiskundige) taal en aan *het opvangen van taalproblemen*.

Omdat het verwerven van het inzicht in de wiskundekern zelf belangrijker is en het abstraheren beter geleidelijk gebeurt, worden leerlingen best niet te snel geconfronteerd met ingewikkelde uitdrukkingen, waarvan ze het nut niet inzien. Daarom zal met het gebruik van kwantoren gewacht worden tot de leerlingen over de wiskundige maturiteit beschikken om hiermee zinvol om te gaan.

Inzicht in de aangeleerde begrippen en eigenschappen impliceert dat de verworven kennis kan *toegepast* worden. Waar mogelijk zullen de leerlingen geconfronteerd worden met zinvolle en haalbare toepassingen binnen en buiten de wiskunde.

Leerlingen moeten ook leren *spreken over* hun wiskundekennis en over hun wiskundig bezig zijn en dit in een behoorlijke en vlotte taal.

Vaardigheden

Technieken en routineprocedures worden verder ingeoefend en aangevuld. Naast het ontwikkelen van *reken-, meet- en tekenvaardigheid* moet aandacht besteed worden aan vaardigheden zoals *verwoorden, probleem stellen en probleem oplossen, redeneren en verantwoorden.*

Het geregeld gebruik van ICT in de wiskundelessen zal aan leerlingen de kansen bieden om *ICT-vaardigheden* te verwerven, zoals ze beschreven zijn in het raamplan ICT en in de vakoverschrijdende eindtermen.

De leerkracht dient te beseffen dat vaardigheden slechts progressief opgebouwd worden. Hierop wordt uitvoerig ingegaan in de pedagogisch-didactische wenken bij 5.1.

Attitudevorming

Doorheen de wiskundevorming kunnen leerlingen *een aantal attitudes* en in het bijzonder *leerattitudes*, verwerven, zoals *orde, nauwkeurigheid, doorzettingsvermogen, zelfvertrouwen, kritische zin, zelfregulatie ...* Het aanpakken van problemen kan leiden tot *een onderzoeksgerichte houding* en tot *methodisch en planmatig werken*. Geregeld terugkijken op het oplossingsproces en op het eigen leerproces zal bij leerlingen *een reflectieve houding* ontwikkelen. Een leerproces waarin oplossingen worden vergeleken en getoetst, kan bijdragen tot samenwerking, overleg, structurering, zin voor helderheid, bondigheid, eenvoud in taalgebruik, waardering voor andere oplossingen.

Bij het bespreken van oplossingsmethoden en door het kritisch onderzoeken van mekaars oplossing kan *waardering voor een andere mening* aangeleerd worden en daardoor waardering voor de persoon van de andere. Zo kan binnen het wiskundeonderwijs aandacht besteed worden aan waarden en relationele vaardigheden.

Ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit realiteitsbetrokken situaties kan bij de leerlingen het besef doen groeien van *de bruikbaarheid en de werkelijkheidswaarde van wiskunde.* Ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit *een historische context* kan belangstelling en waardering opwekken voor de historische en culturele aspecten van wiskunde in het algemeen.

Activerende werkvormen

In de basisschool hebben leerlingen veelal kennisgemaakt met hoeken- en contractwerk en andere vormen van activerend of begeleid zelfstandig leren. Ook in het secundair onderwijs moet het leren vertaald worden *in aangepaste en activerende werkvormen.* Dat kan door leerlingen de kans te geven actief aan het leren deel te nemen en ze te betrekken bij het ontwikkelen van de leerinhouden.

Begrippen en eigenschappen kunnen in goed gekozen didactische situaties door de leerlingen zelf onderzocht worden. Die leermomenten kunnen in leer- of klassengesprekken verwoord en aan de ervaring van anderen getoetst worden. Reflecties over dit proces zelf zijn aangewezen momenten om technieken in verband met 'leren leren' (bijv. zich vragen stellen) aan te reiken. De (zelf)ontdekte samenhang tussen de eigenschappen zal aanleiding geven tot de eerste vragen naar inhoudelijke ordening en verantwoording. Leerlingen die actief wiskunde doen, zullen zeker ervaren dat wiskunde meer is dan een streng theoretisch vak.

In een actief leerproces leren leerlingen communiceren over wiskundige onderwerpen. De manier waarop leerlingen onder elkaar en naar de leerkracht toe informatie over hun denkproces overdragen, mag zich niet beperken tot het debiteren van een rijtje wiskundige symbolen. Ook in de wiskundelessen is het hanteren van een verzorgde en behoorlijke taal belangrijk.

Aandacht voor taal

Leerinhouden worden in taal en beeld verpakt. Bij een aantal instromende leerlingen is de beheersing van de schooltaal onvoldoende om het secundair onderwijs aan te vatten. De verdere verwerving van *schooltaal* is een algemene opdracht voor de eerste graad.

Ook in de wiskundelessen, waarin de Nederlandse taal, zowel *dagelijkse taal, schooltaal, formele en informele vaktaal en de beeldtaal* een belangrijke functie hebben, moet dus aandacht besteed worden aan de specifieke taalontwikkeling. Uiteraard is dit in taalarme middens een nog dwingendere opdracht, die zich kan vertalen in *een ondersteunende didactische aanpak,* met onder meer:

- aansluiting bij en activering van de voorkennis;
- duidelijke begripsopbouw vanuit betekenisvolle voorbeelden en tegenvoorbeelden;
- aandacht voor het analyseren, zo nodig ‘vertalen’ van gebruikte teksten;
- explicitering van schooltaalwoorden;
- aanreiking van visuele ondersteuning;
- duidelijke en transparante lesstructuur;
- gebruik van interactieve denkactiviteiten;

- gebruik van een heldere instructietaal in lessen, opdrachten, toetsen en proefwerken;
- maatregelen voor leerlingen met leerstoornissen.

Wiskunde voor elke leerling

Enerzijds wordt voor alle leerlingen van de A-stroom in de eerste graad *eenzelfde minimale wiskundige basisvorming* vereist. Anderzijds zijn de leerlingengroepen in de eerste graad meestal nog vrij *heterogeen* samengesteld. Bovendien staan leerlingen op het einde van de eerste graad voor *een keuze in verband met hun vervolgopleiding wiskunde.*

Om aan deze brede verwachtingen te voldoen moeten bepaalde onderdelen en doelstellingen *gedifferentieerd* aangeboden worden. Leerlingen moeten de kans krijgen *op hun niveau* wiskunde te verwerven. *Dit impliceert dat zowel bijzondere aandacht kan gaan naar de wiskundig minder begaafde leerling, als naar de leerling met meer wiskundige mogelijkheden.*

Oriëntering

Vooral in het tweede jaar is het belangrijk *de oriëntering* voor te bereiden, die op het einde van de eerste graad moet gebeuren. Daartoe zal getracht worden *de keuzevaardigheid bij de leerlingen zelf* te bevorderen. De verwerking van de leerinhouden (basis en/of verdieping) moet voldoende uitdaging bevatten, opdat leerlingen zich een reëel beeld kunnen vormen van hun mogelijkheden en van de consequenties van hun keuze. (Zie ook onder 4.3 beheersingsniveaus.)

Relatie met het opvoedingsproject van de school

Een school wil haar leerlingen méér meegeven dan louter vakkennis. Haar intentieverklaring in dit verband is te vinden in het opvoedingsproject, waarin ook *waardenopvoeding en christelijke duiding* zijn opgenomen.

Een vakleerkracht in een school van het katholieke net zal geen andere wiskunde geven dan de collega's in een ander net. Wel heeft hij de taak om, waar de kans zich voordoet, naar het opvoedingsproject of een aspect daarvan te refereren. Als mededrager van het christelijk opvoedingsproject is elke leerkracht alert voor de kansen die het school- en klasgebeuren biedt om de diepere dimensie aan te reiken. Ook wiskundelessen bieden hiertoe de kans, niet in het minst in de persoonlijke contacten tussen leerlingen en leerkracht. Waardering voor de leerling, zijn groeiproces en zijn leefomgeving kan de openheid creëren om vragen van levensbeschouwelijke aard op te roepen en bespreekbaar te maken.

4.3 Werken met beheersingsniveaus

De beheersing van de kennis en de inhoudelijk gebonden vaardigheden is in de klassen van de eerste graad meestal heel divers, zelfs als scholen proberen meer homogene leerlingengroepen te vormen. Daarom wordt voor een aantal doelstellingen een specifiëring opgenomen. Ze beschrijven de doelstelling op drie mogelijke beheersingsniveaus. (Niet voor alle doelstellingen kunnen alle niveaus worden uitgeschreven.)

- Een eerste beheersingsniveau wordt **elementair** (**E**) genoemd en betreft de elementaire kennis die leerlingen eigenlijk *perfect* zouden moeten beheersen. Het is ***het absolute minimum.***

  Het elementaire beheersingsniveau komt niet in de plaats van het basisniveau. Het geeft een aanwijzing dat het basisniveau, wellicht met heel wat inzet, mogelijk (nog) kan gehaald worden. Het geeft daartoe jammer genoeg geen garantie. Er is nog heel wat inspanning nodig om via extra oefening en ondersteuning bij te benen. Het beperkt blijven tot enkel het elementaire niveau houdt een risico in voor het vervolg van het curriculum.

  Voorbeeld

  Doelstelling: *rekenen met gehele getallen*. Dergelijke doelstelling is ruim in te vullen. Afhankelijk van die interpretatie kunnen leerlingen al of niet ‘scoren’.

  Een *normale* basisoefening hierbij kan zijn: $(-2)\cdot 5 - 15\cdot(-4)$ of $(-3)\cdot(-8) - 2\,(3 - 7)$.

  Wil een leerling dit soort oefeningen aankunnen, moet hij vlot rekenen met de *elementaire* vormen $(-2)\cdot 5$ of $(-3)\cdot(-8)$ of $5 – (-7)$, dus het rekenen met *twee* gehele getallen.

Wie dat laatste vlot kan, heeft misschien nog wat problemen met de complexiteit van de basisvormen, maar kan mits oefening die kloof waarschijnlijk wel overbruggen. Wie de elementaire vormen niet aankan, gaat problemen tegemoet.

Het niet halen van de elementaire doelstelling geeft wel belangrijke informatie over de leerling. *Zonder deze kennis en vaardigheden is een vervolgstudie met sterke wiskundeonderbouw onmogelijk. Als leerlingen dit niveau, ondanks goede inzet en zo nodig gerichte remediëring, voor alle onderdelen maar net of onvoldoende aankunnen, dan zijn consequenties in de oriëntering onvermijdbaar.* De capaciteiten van de leerling liggen dan niet op het vlak van studierichtingen met een wiskundige onderbouw. Dan is een positieve keuze voor andere capaciteiten van de leerling aangewezen.

- Het verwachte beheersingsniveau noemen we **basis** en betreft de normale realisatie van de basisdoelstellingen, dus zonder ingewikkelde oefeningen en toepassingen. Dit is in principe ***het te realiseren niveau voor alle leerlingen.*** Deze basisdoelstellingen zijn de genummerde hoofddoelstellingen in de tabel (op achtergrond).

  Het extra aangegeven niveau ‘basis’ (**B**) is meestal een omschrijving van een redelijke begrenzing van de doelstelling.

  Voorbeeld

  De optelling uitvoeren met vijf termen.

  Dit betekent dat een oefening op basisniveau meestal een vijftal termen zal bevatten. Dit is aangewezen voor een ‘normale’ evaluatie (zie hiervoor onder het hoofdstuk evaluatie).

  Het bereiken van dit niveau zal de meeste tijd in beslag nemen. Ook in de evaluatie zal dit onderdeel het grootste deel uitmaken.

- Het derde beheersingsniveau wordt **verdieping** (**V**) genoemd. Deze leerlingen kunnen meer aan dan gemiddeld. Ze willen zich in de achtergrond van een aantal wiskundige elementen verdiepen. Ze zijn meer op zoek naar samenhang. Ze kunnen de kennis en vaardigheden vlotter gebruiken in toepassingen. Dit niveau wordt nagestreefd voor alle leerlingen, maar wel vanuit het besef dat dit *niet voor iedereen haalbaar* is. En misschien hoeft dit ook niet. Dat wil zeggen dat we het realiseren van deze doelstellingen kunnen beperken tot *een deelgroep van de leerlingen.* De leerlingen die *dit niveau niet aankunnen of niet graag opnemen*, *zullen best georiënteerd worden naar een verdere studieloopbaan met een beperkt pakket wiskunde.*

Naast deze drie beheersingsniveaus worden in het leerplan doelstellingen geformuleerd als **uitbreiding** (**U**). De drie niveaus vertonen zeker een stijgende graad van beheersing. In die zin is uitbreiding niet een nog hoger niveau. Op zich kan uitbreiding uitgewerkt worden op verschillende beheersingsniveaus. Zo kan het gaan om een extra leerinhoud, bovenop de normale leerinhouden, maar die niet noodzakelijk is als onderbouw voor het vervolg. Bijvoorbeeld een ander talstelsel of de geschiedenis ervan kan op een basisniveau aangebracht worden bij een deelgroep van de leerlingen, zonder dat voor de andere leerlingen het vervolg van het curriculum geschaad wordt. Het kan uiteraard gaan over inhouden, die meer wiskundige diepgang of hogere vaardigheden vragen. Het kan zijn dat een andere werkvorm gehanteerd wordt, waarbij meer zelfstandigheid gevraagd wordt. En in die zin zegt het iets over het beheersingsniveau waarop die leerlingen met wiskunde omgaan. In het leerplan zijn een aantal suggesties opgenomen. *Extra leerinhouden* (bijv. historische duiding) kunnen *informatief* aan alle leerlingen aangeboden worden als deel van het leerproces. *Het realiseren en evalueren van uitbreidingsdoelstellingen kan in geen geval aan bod komen als de andere beheersingsniveaus niet gegarandeerd kunnen worden.*

Lay-out

In de schikking van de doelstellingen worden *de na te streven leerplandoelstellingen duidelijk aangegeven en genummerd. De in principe voor alle leerlingen te realiseren basisdoelstellingen worden op een achtergrond weergegeven. De eindterm waarnaar de doelstelling verwijst, wordt vermeld in de laatste kolom. Enkele doelstellingen verwijzen niet rechtstreeks naar een eindterm.*

Voor een aantal doelstellingen volgen dan beheersingsniveaus. De leraar vindt daarin een mogelijke gradatie of een redelijke beperking van de doelstelling, die in het leerproces kunnen gevolgd worden. Dit moet leiden tot een kwalitatieve differentiatie in de lesaanpak.

5 Leerplandoelstellingen

5.1 Vaardigheden en attitudes

5.1.1 Vaardigheden

1 Doelstellingen

De leerlingen ontwikkelen (binnen het gekende wiskundig instrumentarium):		
V1	Probleemoplossende vaardigheden	43
	het gebruik van heuristiek, zoals: - een opgave herformuleren; - een goede schets of een aangepast schema maken; - onbekenden kiezen; - eenvoudige voorbeelden analyseren.	
V2	Rekenvaardigheden	7 8 9 12
	- het vlot rekenen met getallen (zowel hoofdrekenen, cijferrekenen, als rekenen met een rekenmachine); - het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het uitvoeren van bewerkingen; - het rekenen met algebraïsche vormen.	
V3	Meet- en tekenvaardigheden	
	- het meten van de lengte van lijnstukken en de grootte van hoeken; - het tekenen met behulp van geodriehoek en passer; - het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het opbouwen van figuren, diagrammen en grafieken.	
V4	Wiskundige taalvaardigheden	41 42
	- het begrijpen van wiskundige uitdrukkingen in eenvoudige situaties (zowel mondeling als schriftelijk); - het begrijpen van tekeningen, grafieken en diagrammen; - het uitdrukken van hun gedachten en hun inzicht in eenvoudige situaties (zowel mondeling als schriftelijk).	
V5	Denk- en redeneervaardigheden	40 42
	- het onderscheid maken tussen hoofd- en bijzaken, gegeven en gevraagde, gegeven en te bewijzen; - het begrijpen van een gegeven eenvoudige redenering of argumentatie bij een eigenschap; - het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het onderzoeken van een vermoeden en bij het opbouwen van een redenering.	

V6	Leervaardigheden	
	- het verwerken van losse gegevens; - het verwerken van samenhangende informatie; - het raadplegen van informatiebronnen; - het inzetten van hulpmiddelen en van ICT-middelen; - het plannen van de studietijd; - het sturen van het eigen leerproces.	

2 Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen moeten bij hun wiskundevorming een aantal vaardigheden ontwikkelen.

Voor de duidelijkheid werden ze gescheiden geformuleerd. Dit betekent echter niet dat ze altijd zo gescheiden voorkomen. In een wiskundig leerproces wisselen ze voortdurend af.

Het is belangrijk te beseffen dat vaardigheden maar bereikt worden *doorheen een proces van langere duur*. Een aantal vaardigheden werden al aangezet in de basisschool en worden verder uitgewerkt in de eerste graad en later ook in de tweede en in de derde graad.

Vaardigheden worden *niet automatisch gegenereerd* door de ermee verwante leerinhouden. Er moet bewust aandacht aan besteed worden. Dit betekent niet noodzakelijk dat ze in afzonderlijke lessen gepresenteerd moeten worden. Ze moeten precies bij het spontaan gebruik geëxpliciteerd worden.

De mate waarin leerlingen bepaalde vaardigheden beheersen, geeft een eerste aanwijzing over hun wiskundige mogelijkheden. Na er effectief aan gewerkt te hebben en na observatie en evaluatie kan hierin een aanwijzing gevonden worden voor de oriëntering van de leerlingen.

V1 Probleemoplossende vaardigheden

Het kunnen oplossen van problemen is *een belangrijke troef* voor het verdere leven, zowel maatschappelijk als beroepsmatig. De leerlingen kunnen belangrijke probleemoplossende vaardigheden verwerven *in de wiskundevorming* bij het aanpakken van problemen, in het bijzonder bij het oplossen van vraagstukken. *Enerzijds worden een aantal probleemoplossende vaardigheden zichtbaar in eenvoudige, heldere en hanteerbare situaties. Anderzijds biedt wiskunde de gelegenheid om de moeilijkheidsgraad in het proces stapsgewijze op te voeren.* Het biedt de mogelijkheid tot echte probleemsituaties, zonder dat complexiteit tot ontmoediging moet leiden. Het systematisch leren aanpakken van wiskundige problemen (vraagstukken) heeft een belangrijke transferwaarde naar andere vak- en leergebieden.

Bij het aanpakken van problemen leren de leerlingen meer dan het concreet berekenen van de oplossing. *Ze worden vertrouwd met verschillende denkstappen en werkwijzen, het gebruik van heuristiek en het reflecteren op het oplossingsproces.*

De leerlingen van de eerste graad zijn nog geen doorgedreven probleemoplossers, m.a.w. ze maken een leerproces door. Een gedifferentieerde aanpak is aangewezen. Het arsenaal aan vraagstukken maakt het mogelijk elke leerling een uitdaging te bieden.

De term ‘probleem’ moet *een ruime interpretatie* krijgen. Zo kunnen aan bod komen:

- vraagstukken met te veel gegevens of te weinig gegevens, met gegevens in tabelvorm of in grafische vorm … ;
- vraagstukken waarbij leerlingen zelf een vraag bij de situatie moeten stellen;
- vraagstukken waarbij patronen moeten voortgezet worden of waarbij formules moeten opgesteld worden, dus waarbij niet alleen kwantitatieve grootheden aan bod komen;
- meetkundige problemen, waarbij eigenschappen moeten ingezet worden.

De term ‘probleem’ gebruiken we beter niet in de context van oefeningen om een bepaalde standaard oplossingswijze te verwerven. Die oefeningen zijn belangrijk om inzicht in die methodiek te verwerven, maar verlopen meestal volgens een aangeleerde procedure: zoek in de opgave de elementen en de verbanden die passen in het voorliggend schema (cf. het modelvraagstuk).

Schematisch overzicht van een wiskundig oplossingsproces met de belangrijkste karakteristieken van de verschillende fasen.

Bij een oplossingsproces wordt over het algemeen een onderscheid gemaakt tussen *vijf belangrijke fasen*. Het gaat niet om gescheiden fasen. Geregeld wordt gewisseld tussen verschillende fasen en wordt teruggekeerd naar een vorige fase van het proces, bijvoorbeeld om een aspect te verduidelijken, te verhelderen of om terug te koppelen.

- *De fase van het exploreren van de opdracht:*
  - het zich eigen maken van de opdracht;
  - het probleem inzichtelijk vatten;
  - het uitzoeken van de context, het openleggen van de (verborgen) informatie;
  - het gebruik van taalvaardigheid bij de analyse van de tekst (taalsteun is soms noodzakelijk voor sommige leerlingen);
  - het duidelijk stellen van het probleem;
  - het voorstellen van het probleem (bijv. bij meetkunde);
  - het gebruiken van ICT om problemen te analyseren.

  Hierbij komt heuristiek aan bod.

  Voorbeelden
  - het maken van een tekening om een situatie te verduidelijken;
  - het formuleren van een werkhypothese of een vermoeden;
  - het systematisch oplijsten van informatie (gebruik van een tabel van gegevens);
  - het uitzetten van een uitvoeringsplan (indien zinvol).

- *De fase van de mathematisering:*
  - het zoeken van een patroon in een situatie (bijv. bewerkingen, bij reeksen gegevens, bij figuren), het gebruik van symmetrie in de situatie (cf. meetkunde);
  - het wiskundig vertolken van een situatie; het vastleggen van gegevens, vraag en van de relaties tussen gegeven en vraag;
  - het toetsen van een vermoeden met getallenvoorbeelden;
  - het onderzoeken van bijzondere of extreme gevallen (bijv. randvoorwaarden);
  - het transformeren van het probleem (indien zinvol, bijv. deelprobleem, analoog probleem, beperking van de probleemstelling);
  - het opzoeken van bijkomende informatie (bijv. ontbrekende gegevens).

  Hierbij komt heuristiek aan bod.

  Voorbeelden
  - het gebruik van wiskundige kennisschema’s (bijv. formularium, vademecum);
  - het gebruik van wiskundige simulatie (ICT) om een vermoeden te verifiëren;
  - een omgekeerde redenering opzetten (bijv. van achter naar voor werken);
  - het formuleren van deelproblemen (bijv. door een bepaalde veranderlijke constant te houden).

- *De fase van de wiskundige verwerking:*
  - het stapsgewijze wiskundig oplossen; het effectief uitvoeren van de geplande wiskundige handelingen;
  - het respecteren van rekenregels;
  - het opvangen van rekenproblemen;

  - het gebruik van rekenproeven;
  - het gepast aanwenden van rekenhulpmiddelen (zoals rekenmachine, software);
  - bij een meetkundig probleem: het effectief uitvoeren van een constructie, het argumenteren van de samenhang of de geformuleerde hypothese of het geordend uitschrijven van een bewijs.

- *De fase van het formuleren van een oplossing van het probleem:*
  - het gecontroleerd terugkijken op de werkwijze:
    - bij het analyseren:
      - heb ik geen informatie over het hoofd gezien;
      - heb ik de juiste informatie opgezocht;
      - beschik ik over voldoende gegevens;
    - bij het mathematiseren:
      - heb ik de relatie duidelijk vertaald;
      - heb ik bijkomende voorwaarden opgelegd om het probleem haalbaar te maken;
    - bij het berekenen:
      - heb ik de wiskundige procedures juist uitgevoerd;
      - heb ik een foutencontrole en/of een proef uitgevoerd;
    - bij de demathematisering:
      - heb ik de voorwaarden terug ingebracht;
      - heb ik de wiskundige oplossing geïnterpreteerd in de context (demathematiseren), met inbegrip van het onderzoek van de waarschijnlijkheid of de realiteitswaarde van het resultaat;
      - heb ik gecontroleerd dat de gevonden oplossing effectief een oplossing is voor het gestelde probleem;
      - moet ik de probleemstelling bijstellen (cf. het wijzigen van de wiskundige vertolking, het aanscherpen van de randvoorwaarden …) en moet ik daarna het probleem heroplossen;
  - het duidelijk formuleren van een antwoord.

- *De fase van het reflecterend terugkijken:*
  - de evaluatie van de gehanteerde werkwijze;
  - het formuleren van werkpunten ten aanzien van de verbetering van de voorgaande fasen, bijv. het verbeteren van de gehanteerde kennisschema’s, het remediëren van rekenproblemen;
  - het beantwoorden van reflectieve vragen:
    - Welk probleem deed zich effectief voor en hoe kan ik dit positief omschrijven?
    - Welke oplossingen, alternatieven zijn er? Welke voordelen en nadelen zie ik?
    - Hoe stuur ik mijn kennis, mijn vaardigheden en attitudes, mijn leervaardigheden bij?

In verschillende vakken worden leerlingen geconfronteerd met verschillende werkschema’s. Het is zinvol dat leraren zelf hiertussen verbanden aangeven. Een schema dat wel eens gebruikt wordt, is het OVUR-schema (oriënteren, verkennen, uitvoeren, reflecteren). Dit valt niet helemaal samen met het voorgaande schema voor wiskundeaanpak. Oriënteren en verkennen zijn onderdelen van het exploreren. De uitvoeringsfase valt in wiskunde uiteen in de mathematiseringsfase, de berekeningen en het interpreteren. Bovenstaand schema sluit ook aan bij de reflectiecyclus van Korthagen.

Algemene tips bij oplossingsprocessen in de les

- Probleemoplosser word je niet vanzelfsprekend en niet zonder inspanning. Je leert door *ervaring*. Dat betekent concreet dat leerlingen gedurende het ganse schooljaar problemen en vraagstukken aangeboden moeten krijgen en niet slechts als toepassing op het hoofdstuk vergelijkingen.

- Men zal in de beginfase de denkstappen niet te groot maken. Voor vele leerlingen is een begeleide aanpak met *succeservaring* wenselijk.
- De *moeilijkheidsgraad van vraagstukken* kan afgewogen worden aan een aantal elementen.
  - *Complexiteit naar tekstniveau en semantische structuur:*
    - van enkelvoudige zinnen naar samengestelde zinnen;
    - het gebruik van (wiskundige) kernwoorden en sleutelwoorden;
    - van duidelijk gegeven informatie naar niet geëxpliciteerde informatie.
  - *Complexiteit van de organisatie van de gegevens:*
    - hoeveelheid gegevens: van ‘alle gegevens zijn voorhanden’, over ‘er zijn gegevens te veel’ tot ‘er zijn gegevens te weinig’;
    - de aanbiedingsvorm van gegevens: van ‘gegevens in zinsverband’ tot ‘gegevens verwerkt in tabellen en grafieken’.
  - *Complexiteit bij de vraagstelling:*
    - de plaats van de vraag in de structuur van het vraagstuk: duidelijk achteraan of verweven in de zinnen met gegevens;
    - van eenduidige vraagstelling tot getrapte meervoudige vragen;
    - van gesloten vragen naar open vragen;
    - het zelf stellen van vragen bij een situatie.
  - *Complexiteit van de wiskundige structuur:*
    - de aard en de grootte van de gebruikte getallen en de soort bewerking (bijv. al of niet met breuken);
    - de aard en de vertrouwdheid van het wiskundige model;
    - vraagstukken op een berekening van een oppervlakte, een inhoud, een procent, een schaal zijn vaak eenvoudiger dan vraagstukken met tabellen en diagrammen;
    - het vinden van een formule of een functievoorschrift als veralgemening van een herkend patroon is moeilijker dan het opstellen van een vergelijking;
    - ingeklede bewerkingen of echte probleemsituaties.
  - *Complexiteit van de situatie of de context:*
    - een duidelijk omschreven situatie binnen context die de leerlingen kennen, en complexiteit van die situatie;
    - een duidelijk omschreven situatie waarbij randkennis noodzakelijk is;
    - realistische vragen uit de leefwereld, de beroepswereld of over maatschappelijke problemen (in hoeverre kan de leerling zich de situatie “voorstellen”?).
- De leerlingen moeten *de leraar* kunnen *ervaren als probleemoplosser*. Dat wil zeggen dat de leraar zijn denkstappen transparant maakt voor de leerlingen, met inbegrip van het gissen en missen, het uitproberen, het zoekend onder woorden brengen. Als de leraar zelf heuristiek hanteert, zal hij die werkwijze luidop becommentariëren.
- Vooral leerzwakkere leerlingen zullen baat hebben bij het ‘voordoen’ van de leraar en het ‘meedenken’ (via een leergesprek met kleine denkvragen over het “hoe” van de aanpak). Een les vraagstukken mag niet te herleiden zijn tot het inoefenen van een vooraf uitgelegde standaardwerkwijze. Leerlingen die echt zwak zijn, kunnen we een aantal standaardprocedures leren gebruiken, in de hoop dat ze die achteraf flexibel zullen inschakelen.

  Enerzijds wordt *geleidelijkheid en haalbaarheid* ingebouwd voor de leerlingen (zelfs voor individuele leerlingen, als er voldoende differentiatie ingebouwd wordt). Dat is het voordeel van de wiskundige situatie: ze verwerven een hele reeks vaardigheden doorheen kleine, geleidelijk opgebouwde, haalbare stappen.

Anderzijds moeten we de leerlingen *voldoende uitdaging* bieden waarbij echte zoekactiviteit noodzakelijk is. Het trainen van modeloplossingen is niet de aangewezen weg. Leerlingen moeten, zoals bij hoofdrekenen, weliswaar beschikken over een aantal ‘standaardprocedures’, en dat kunnen dan ‘modeloplossingen’ zijn, maar die moeten flexibel kunnen ingeschakeld worden en desnoods uitgebreid, getransformeerd ... Als leerlingen nooit met een echte zoekopdracht geconfronteerd worden, zullen ze nauwelijks probleemoplossende vaardigheden ontwikkelen.

- Het is zinvol leerlingen te confronteren met *meerdere oplossingswegen* van een probleem. Zeker bij open problemen is dat het geval. Als leerlingen aan elkaar hun oplossingsweg uitleggen, leren ze niet alleen *de werkwijze van anderen te waarderen, maar leren ze kritisch te staan tegenover hun eigen oplossing en die van anderen.* Dit is een belangrijke vaardigheid voor hun beroepspraktijk.
- Bij leerlingen met *leerproblemen en/of leerstoornissen* kan overwogen worden hen op aangepaste wijze tegemoet te komen in de exploratiefase (bijv. voorlezen van de tekst, aanpassen lettertype en -grootte). Voor leerlingen met een andere culturele achtergrond kan bijkomende *taalhulp* voorzien worden, bijv. vertaling, verklaring van begrippen, situaties. Vermits leerlingen bij vraagstukken vaak individueel of in groep werken, kan hier extra aandacht van de leraar geboden worden. Anderzijds bieden vraagstukken een goed moment om culturele bagage te verwerven of te verrijken.
- Leerlingen kunnen wiskundige begrippen soms niet verbinden met betekenisvolle situaties. Ze leggen maar moeizaam verbanden tussen de beschreven probleemsituaties en hun wiskundige kennis. Een geleidelijke opbouw via haalbare en motiverende problemen en duidelijke betekenisgeving van wiskundebegrippen is belangrijk.
- *Problemen en vraagstukken bieden de mogelijkheid om, in een soms onverwachte context, begrippen en verbanden terug op te nemen en te onderhouden.* Rekenvaardigheid, schattend reken, verhoudingsrekenen (met inbegrip van de regel van drieën), procentrekenen, herkennen van patronen, werken met formules, gebruik rekenmachine, aflezen van grafieken, diagrammen en tabellen, schaalbegrip, metend rekenen … kunnen allemaal op ongedwongen wijze aan bod komen in motiverende situaties.
- Het is belangrijk dat leerlingen *feedback* krijgen *over hun leerproces*. Dat betekent feedback vanuit de bespreking van verschillende oplossingswijzen, het vergelijken van aanpakplannen, de terugkoppeling van anderen op hun oplossing, de eigen reflectiemomenten en de terugkoppeling van de leraar die het hele proces heeft geobserveerd.
- Leerlingen zijn soms gericht op het snel toepassen van gekende (reken)algoritmen. De herkenning ervan in de vraag leidt meteen tot rekenen (ze zien het woord ‘samen’ en ze tellen al op). Voor een optimaal leerproces is het belangrijk dat een leerling *eerst nadenkt over de essentie van een opgave of een probleem* om zo tot een strategie te komen voor het oplossen. Als de opdrachten altijd onmiddellijk aansluiten bij de geziene leerstof, komen leerlingen vaak tot juiste resultaten zonder een degelijke analyse- en planningsfase. Ze falen dan echter als ze een opdracht krijgen die niet wordt aangeboden binnen een bepaalde context. Het loont de moeite om leerlingen geregeld te confronteren met opgaven waarvan de oplossing of aanpak niet meteen voor de hand ligt.

Werkvormen

Vraagstukken worden vaak aangeboden onmiddellijk aansluitend op ontwikkelde wiskundige inhouden. Willen we bekomen dat leerlingen vraagstukken flexibel aanpakken, zullen we vraagstukken en problemen gespreid doorheen het jaar moeten aanbieden.

- Een mogelijke aanpak is die van *het geregeld aanbieden van problemen* aan de leerlingen, bijv. een “probleem van de week” of een probleem (als extra) bij elke huistaak ...

  Leerlingen kunnen hieraan in groepen samenwerken. De mogelijkheid kan geboden worden om binnen een bepaalde tijd oplossingen te laten aanbrengen op een klasprikbord. Deze 'problem of …'-aanpak biedt het voordeel dat ingespeeld kan worden op de realiteit, de omgeving, de maatschappelijke context (bijv. een grafiek, een diagram uit een krant; een of andere gebeurtenis die aanleiding geeft tot vragen). We kunnen zo ver gaan dat leerlingen zelf 'problemen' kunnen aanreiken.

- Een aanpak is die waarbij, in een meer structurele differentiatie (bijv. met hoekenwerk), ruimte gemaakt wordt voor een vraagstukkenhoek, *een problemsolverhoek*. Daarbij kan groepswerk ingeschakeld worden, waarbij leerlingen met elkaar problemen aanpakken en aan elkaar uitleggen. De verdeling in groepen kan al of niet homogeen zijn, waarbij gepaste problemen en vraagstukken kunnen aangeboden worden.
- Aan de leerlingen kan gevraagd worden *een (mini)project* uit te werken. Voorbeelden zijn: het ontwerpen van de schooltuin, het (her)inrichten of verfraaien van een ruimte, het ontwikkelen van een maquette (bijv. voor een veiligere schoolomgeving), het maken van een beeld (cf. ruimtelijk denken) … Leerlingen zijn dan medeverantwoordelijk voor een deel van de ontwikkeling van het probleem. Dit werkt de motivatie in de hand.
- Bij *contractwerk* moeten leerlingen in een bepaalde tijd een aantal vraagstukken, problemen aanpakken. Een presentatie via een portfolio kan dit ondersteunen. De kwaliteit van de portfolio en de wijze waarop er in de praktijk mee kan omgegaan worden (bijv. bij vraagstelling erover, de mate van zelfstandigheid bij de samenstelling, de elementen van zelfevaluatie) kunnen een aanwijzing zijn voor oriëntatie van de leerling.

  Dergelijke aanpak vraagt heel wat aan materiaalontwikkeling. Het is zinvol van materiaal geleidelijk te ontwikkelen. Leraren kunnen zelf een hele reeks uitdagende situaties verzamelen. De vakgroep kan hier ondersteunend werken.

V2 Rekenvaardigheden

Goede en vlotte rekenvaardigheden vormen *een belangrijke competentie* in die situaties, waarin ze echt voordelig zijn. Training is daarvoor noodzakelijk.

Gebrek aan rekenvaardigheid is een van de meest voorkomende problemen bij leerlingen en niet alleen in de eerste graad. Het is meestal *een combinatie van verschillende problemen.* Het isoleren van één probleem en focussen op de oplossing daarvan lijkt weinig efficiënt. Vaak wekt dit alleen maar meer tegenzin op. De rekenvaardigheid zal in de praktijk maar verbeteren als er *een geïntegreerde aanpak* is van de verschillende problemen. Een minder goede vaardigheid is vaak *niet alleen een rekenprobleem*. Soms is het *een attitudeprobleem*, waarbij rekenremediëring niet veel aarde aan de dijk brengt. Het inbedden van het rekenen in motiverende vraagstukken kan hieraan verhelpen.

Rekenvaardigheden worden vaak geïdentificeerd met hoofdrekenen. Dat is maar gedeeltelijk correct. *Rekenvaardigheden hebben te maken met het flexibel kunnen inzetten van de verschillende rekenwijzen al naargelang de noodzaak.* Zowel het hoofdrekenen, het schattend rekenen, het cijferen, het rekenen met breuken, het gebruik van de rekenregels voor negatieve getallen en machten, als het machinegebruik maken deel uit van rekenvaardigheid.

Het is een maatschappelijk fenomeen dat *een rekenmachine* gebruikt wordt om 'moeilijke' berekeningen uit te voeren, ook in de dagelijkse praktijk. In situaties waar een gemiddelde volwassene een rekenmachine zou gebruiken, zullen we dat ook doen bij de leerlingen. In het bijzonder, als andere dan rekendoelstellingen nagestreefd worden, zouden *geen rekendrempels* mogen ingebouwd zijn. In plaats van te investeren in automatismen die niet nuttig zijn, kan beter gewerkt worden aan zinvolle controlemechanismen, waarbij vlot en handig rekenen, hoofdrekenen en/of schattend rekenen wel degelijk een rol spelen.

In de didactische vakliteratuur wordt de term *scaffolding* wel eens gebruikt. In feite betekent die term dat 'stellingen' omheen het probleem worden gebouwd, waardoor de leerlingen andere wegen kunnen bewandelen om toch tot de oplossing te komen. Het gebruik van de rekenmachine bij het nastreven van probleemoplossende vaardigheden (bijv. bij vraagstukken) is hiervan een voorbeeld. Bij rekenvaardigheid gaat het dus eerder om de vlotheid waarmee het resultaat bekomen wordt en de ingebouwde controle op het resultaat.

Hoofdrekenen

Voor een omschrijving van *hoofdrekenen* kan het leerplan basisonderwijs inspirerend werken. Er wordt een onderscheid gemaakt tussen *het paraat kennen* (bijv. tafelproducten), *het gebruik van standaardprocedures* en *het flexibel rekenen*.

Om *flexibel* te kunnen rekenen moet de leerling:

- een zeker niveau van parate kennis bereikt hebben;
- een zeker niveau bereikt hebben in het toepassen van standaardprocedures;
- inzicht hebben in de structuur van getallen;
- inzicht hebben in bepaalde eigenschappen van de bewerking.

Een standaardprocedure gebeurt automatisch, is efficiënt en het aantal denkstappen is beperkt. Om standaardprocedures vlot te kunnen uitvoeren, is paraat kennen onontbeerlijk.

Hoofdrekenen heeft te maken met *het gebruik van rekenvoordelen*, waardoor het resultaat snel kan berekend worden. Het staat tegenover het cijferen, waarbij een vast algoritme gebruikt wordt. Een misvatting is dat hoofdrekenen niet met pen en papier zou mogen gebeuren. Tussenresultaten kunnen zo nodig tijdelijk genoteerd worden.

Een goedfunctionerende rekenvaardigheid is van belang bijvoorbeeld *bij schatoefeningen of bij eenvoudige bewerkingen*, waarbij het gebruik van de rekenmachine een overbodige en vaak tijdrovende en kritiekloze stap betekent.

Niet elke opgave leent zich echter tot hoofdrekenen. Het heeft geen zin bepaalde oefeningen absoluut met hoofdrekenen te willen maken. Het is belangrijker te investeren in oefeningen die door de leerlingen wel vlot kunnen gemaakt worden. Consequentie is dat een training in hoofdrekenen met relatief eenvoudige oefeningen zal gebeuren. Naarmate de leerlingen terug meer getallengevoeligheid verwerven (cf. inzicht hebben in de structuur van getallen) en het rekenen vlotter gaat, kan de complexiteit toenemen.

Het hoofdrekenen kan gekoppeld worden aan het letterrekenen en aan het oplossen van eenvoudige vraagstukjes.

Schatten

Schattend rekenen bewijst zijn waarde in het dagelijkse leven. Een schatting is meer dan een gok. Op zijn minst kun je het een goede gok noemen, die ergens op gebaseerd is. Bij schattend rekenen horen *specifieke strategieën,* die vaak een combinatie zijn van het maken van een goede afronding voor de getallen, handig rekenen en heuristiek.

Schatten wordt vaak uitsluitend opgelegd als controlemiddel. In de praktijk zijn er situaties waarin *een ongeveer-oplossing* een goede oplossing is (verkeersdrukte, kijkcijfers …). Vaak worden hiermee moeilijke tellingen of berekeningen vermeden. Schatten is daarbij een zinvolle werkwijze. In concrete situaties gaat de vraag of een globale, dan wel een precieze oplossing gevraagd wordt, het rekenwerk vooraf.

In een lessituatie kiest elke leerling zijn eigen aanpak om zo op zijn niveau tot een schatting te komen. In een klassengesprek kunnen *verschillende strategieën vergeleken* worden, zodat leerlingen het schattend rekenen verder ontwikkelen. Door te reflecteren op de eigen en op andermans aanpak verhoogt de schatvaardigheid. Het schattend rekenen leent zich uitstekend voor differentiatie. Het is belangrijk dat *de leraar* de leerlingen voortdurend *laat inkijken in zijn werkwijze*, door luidop te rekenen en dus ook te schatten. Belangrijker nog dan vele inhoudelijke strategieën is de ontwikkeling van schatattitudes.

Cijferen

Het belang van het cijferen moet *gerelativeerd* worden. In de praktijk wordt het nog weinig gebruikt. Zij het dat een berekening (bijv. oppervlakte, prijs, korting) in de arbeidspraktijk van sommige beroepen nog wel eens voorkomt, omdat er niet altijd een rekenmachine ter beschikking is. Het gaat dan wel om relatief beperkte berekeningen.

Het cijferrekenen is uitvoerig aan bod gekomen in de basisschool. De leerlingen zouden over een voldoende vaardigheid en inzicht moeten beschikken om de hiervoor bedoelde berekeningen te kunnen maken.

In het secundair onderwijs kunnen *de begrenzingen* (voor termen en factoren), die zijn aangegeven in het leerplan van het basisonderwijs, onverkort overgenomen worden. Het is niet zinvol te investeren in een uitbreiding hiervan. Voor het praktische gebruik van het cijferen is het zinvol met de leerlingen afspraken te maken over wat nog verwacht wordt. Waar nodig en zinvol kan wel het inzicht in de werkwijze onderhouden en aangevuld worden. Ook aan het oordeelkundig schatten van de resultaten wordt aandacht besteed. Dit ondersteunt leerlingen in het vermijden van fouten.

Het belang inzien van het verband tussen het decimaal stelsel en de rekenalgoritmen behoort niet tot het basisbeheersingsniveau voor alle leerlingen. Als leerlingen hierin gemakkelijk meegaan en meer aankunnen, is dat een element dat kan ingebracht worden in de verdere oriëntatie naar sterkere wiskundestudierichtingen.

De rekenmachine

Voor het inoefenen van het *machinerekenen* moet voldoende tijd worden uitgetrokken. De leerlingen die het eerste leerjaar beëindigen moeten vlot kunnen rekenen met een rekenmachine. In situaties waar we zelf een rekenmachine zouden gebruiken, zullen we dat ook doen bij de leerlingen.

De rekenmachine kan gebruikt worden voor het berekenen van sommen, producten en quotiënten, het bepalen van quotiënt en rest, deling op de eenheid nauwkeurig, oefeningen op de volgorde van bewerkingen en het bepalen van getalwaarden, bij percentrekenen, bij het oplossen van vraagstukken. Hierbij moeten de leerlingen de grens leren leggen tussen oefeningen, waarbij het hoofdrekenen een belangrijke rol speelt en andere waar het hoofdrekenen niet tot een snelle oplossing leidt.

Het inbrengen van opgaven in een rekenmachine vraagt heel wat oplettendheid en nadenken. Ook al zijn de hedendaagse rekenmachines zeer gebruiksvriendelijk wat inbreng betreft, toch blijft het telkens een oefening in het goed *vertalen van de opgave* vanuit de dagelijkse rekenwijze *naar de specifieke taal van de machine*. Reflectie over dit vertaalwerk leert de leerlingen hiermee kritisch om te gaan, bijvoorbeeld over de functie van haakjes (die in de praktijk soms de vertaling zijn van een breukstreep). Het oefenen in deze beperkte 'vertaalomgeving' kan leerlingen voorbereiden op het gebruik van moeilijkere softwarepakketten.

Rekenen met breuken

Rekenen met breuken kwam aan bod in de basisschool. Sommige bewerkingen (vermenigvuldiging, deling) moeten nog aangevuld worden. *Het is zinvol om zo snel mogelijk met een herhaling van breuken en het rekenen met breuken te starten.* Er moet niet gewacht worden tot het tweede of het derde trimester om daarmee te beginnen. Het verwerken en aanvullen wordt best gespreid doorheen het gehele jaar. Bijvoorbeeld: eerst het breukbegrip herhalen met positieve breuken, vereenvoudigen, dan optellen en aftrekken, dan vermenigvuldigen en delen, daarna pas negatieve getallen in teller en noemer, (zij het dat de betekenis van een negatief getal in de noemer niet meteen met een realistische situatie zal verbonden worden).

Didactische aanpak van rekenvaardigheden

Zoals uit het voorgaande blijkt, kan heel wat inspanning geleverd worden om de rekenvaardigheid van de leerlingen op peil te houden. *Daarbij gaat het niet zozeer over de complexiteit van de oefeningen maar wel over de vlotheid waarmee de oefeningen aangepakt worden.*

Het is zinvol bij het begin van de eerste graad via *een diagnostische toets* na te gaan waar de leerlingen precies staan in verband met rekenvaardigheid. Zo heeft de leraar een klare kijk op het 'residu' van de rekenvorming in de basisschool. De vorming van de eerste graad moet hier alleszins op aansluiten, zonder evenwel de hele lagere school over te doen. Een gerichte aanpak op basis van de tekorten die fundamentele problemen kunnen opleveren, is belangrijk. Remediëring of extra taken kunnen volgen als leerlingen een bepaald vooropgesteld percentage niet halen. Daarbij kan gebruik gemaakt worden van ICT-hulpmiddelen.

Het is evenwel niet zo zinvol de leerlingen van bij de eerste lessen in de eerste graad al meteen te overdonderen met een zeer uitgebreide toets. In een eerste algemene en oriënterende verkenning kan op basis van de grote en meestal veel voorkomende problemen onderzocht worden, waar de leerlingen nog ondersteuning nodig hebben. Op basis daarvan wordt een meer systematische aanpak gepland, waarbij eventueel meer specifiek naar de kennis van onderdelen gepeild wordt. Dat kan op een moment dat de noodzakelijke vaardigheden aan bod zullen komen in de lessen. Alleszins worden de (remediërings)taken gericht afgestemd op de feitelijke situatie.

We pleiten voor *het geregeld oefenen van elementaire rekenvaardigheden* in het normale curriculum. Dit kan als een rode draad doorheen het schooljaar lopen. Naargelang de samenstelling van de klas en de basisoptie kan hieraan gedifferentieerd gewerkt worden. Leerlingen die op het laagste beheersingsniveau nog onvoldoende scoren, krijgen best oefeningen op dat niveau en niet hoger. Geleidelijk aan wordt getracht het niveau op te trekken. Leerlingen die een bepaald niveau bereikt hebben, kunnen na een aantal onderhoudsoefeningen via differentiatie andere onderdelen aanpakken. Zo komt er ruimte voor de aanpak van hogere beheersingsniveaus. Uiteraard zal het blijven sluimeren op een laag beheersingsniveau repercussies hebben op de oriëntatie van de leerlingen. Door een dergelijke getrapte aanpak heeft de leraar materiaal in handen om het slagen van een leerling (of juist het niet slagen) te verantwoorden en om de *oriëntering* te onderbouwen.

Zoals al eerder gesuggereerd is het zinvol de aanpak van de rekenvaardigheid niet los te koppelen van *de reële context waarin leerlingen hun rekenvaardigheid nodig hebben*. Louter kale oefeningen blijken weinig motiverend te werken. Daartegenover blijkt het plaatsen van rekenvaardigheidsoefeningen in de context van vraagstukken en probleemaanpak te renderen. De rekenvlotheid komt voor de ingewikkeldheid van de vormen.

ICT-ondersteuning

Er is heel wat software ter beschikking om de leerlingen *trainingssessies* op computer aan te reiken (bijv. als onderdeel van hoekenwerk). In de handel zijn verschillende oefenprogramma's verkrijgbaar op cd-rom. De software is al zo ver ontwikkeld, dat kan gewerkt worden met adaptief materiaal. Dat betekent: materiaal dat de gepresenteerde oefeningen aanpast aan het beheersingsniveau van de leerling. Belangrijk is wel leerlingen op remediëring gericht materiaal aan te bieden dat geschikt is voor hun leeftijd.

V3 Meet- en tekenvaardigheden

De leerlingen hebben in de basisschool aandacht besteed aan het uitvoeren van (elementaire) meetprocessen en het aflezen en zelf maken van tekeningen of schetsen bij vlakke en ruimtelijke situaties. In de eerste graad moet hier binnen wiskunde *slechts aanvullend* (eventueel remediërend) gewerkt worden. In wetenschappen en technische vakken zullen leerlingen geconfronteerd worden met nieuwe grootheden en dus nieuwe meetprocessen of met het verhogen van de meetnauwkeurigheid door het gebruik van meer gesofisticeerde instrumenten. Het onderdeel meten en metend rekenen van de basisschool vindt een natuurlijk verlengstuk in die vakken. Toch blijft in wiskunde meet- en tekenvaardigheid van belang.

Het uitvoeren van *effectieve meetprocessen* wordt niet meer expliciet gevraagd. Wel moet de verworven methodiek gebruikt worden bij het voorstellen van vlakke en ruimtelijke figuren, bij het oplossen van meetkundeoefeningen of bij een sporadische meetopdracht.

In opdrachten wordt vaak een onderscheid gemaakt tussen *tekenen en construeren*. Met tekenen wordt dan bedoeld: het maken van de figuur met *geodriehoek en meetlat*. Construeren betekent: het striktere en traditionele werken met *passer en liniaal*.

Het belang van constructies in de meetkunde moet geplaatst worden in *een historische context*, waarbij ze hun bijdrage hadden tot de ontwikkeling van de meetkunde zelf. Ook nu nog kan construeren meetkundig inzicht bijbrengen. Het precies omschrijven *op basis van eigenschappen* van de te volgen weg en de nauwgezette uitvoering staat borg voor een degelijke aanpak van het denken en het handelen. Maar onder de druk van tijd en moderne technieken, die het fijne werk veel vlugger en nauwkeuriger kunnen uitvoeren, gaat de aandacht vooral naar *tekenen en schetsen*. Voor het beperkt gebruik van meetkundesoftware volstaat een beperkt inzicht.

Naast tekenen en construeren wordt aandacht besteed aan *schetsen*. Met schetsen wordt dan een vlugge schets bedoeld, die een eerste indruk weergeeft van de situatie of het voorwerp. Ook dit is een belangrijke vaardigheid. In de praktijk zijn niet altijd goede tekenmiddelen of de plaats en de ruimte ter beschikking om een degelijke tekening te maken, laat staan een constructie uit te voeren.

Met tekenvaardigheid is het zoals met rekenvaardigheden. De leerling moet in staat zijn, al naargelang de situatie, flexibel om te gaan met de keuze van de tekentechniek. Soms volstaat een schets, bijv. als die nog wordt aangevuld met opgemeten maten. Soms is een nauwkeurigere tekening noodzakelijk, bijv. als verbindingen tussen lijnen een specifieke vorm hebben. Soms moet een precieze constructie gemaakt worden, bijv. het ontwerpen van een sjabloon dat het veelvuldig natekenen of uitsnijden van figuren mogelijk maakt.

Didactische aanpak

De leerlingen moeten *geregeld schets-, teken- of constructieopdrachten krijgen*, en *zowel in vlakke als in ruimtelijke situaties*. Daarbij gaat de aandacht vooral naar het oplossingsproces van het gestelde probleem, naar het uitvoeringsproces en naar de verantwoording van de werkwijze. In een analysefase wordt vooral geschetst. Is het doel een nauwkeurigere controle van een vermoeden, dan is een tekening een noodzaak. Als inzicht in het gebruik van eigenschappen beoogd wordt, wordt vaak een constructie uitgevoerd.

Suggesties voor mogelijke denk- en tekenopdrachten

- Zelf *(na)tekenen* van een gegeven figuur.
- Het *tekenen* (ev. het construeren) van een vlakke figuur, een bijzondere rechte, het beeld van een figuur door een gegeven transformatie (steunt meestal op definities, eerder *een 'technische' uitvoering*).
- Het tekenen (ev. het construeren) van een vlakke figuur vanuit *een gegeven aantal elementen*.

  Hierbij wordt gebruik gemaakt van begrippen en eigenschappen. Het is meer een denkopdracht, een redeneerprobleem met mogelijkheden voor het gebruik van heuristiek.

  Algemene werkwijze met duidelijk onderscheiden fasen:
  - *een schets maken* (heuristiek: stel probleem voor als opgelost);
  - *de analyse of exploratie* (cf. kleurgebruik voor aanduidingen 'gegeven', voor aanduidingen als gevolg van een redenering…);
  - *de uitvoering* (op een nieuwe figuur);
  - *het verwoorden* van begrippen, eigenschappen die gebruikt worden;
  - *een reflectie* op het oplossingsproces (altijd uitvoerbaar? meerdere oplossingen?).
- Tekenopdrachten waarbij punten, lijnstukken of rechten moeten bepaald worden die *aan meerdere voorwaarden* moeten voldoen (zoeken naar een 'meetkundige plaats').

ICT-ondersteuning

Voor meetkunde bestaat er een ruim aanbod aan *ondersteunende software*. Heel wat inzichten kunnen hiermee door de leraar *gedemonstreerd* worden.

Maar ook *leerlingen zelf* moeten deze software leren hanteren, bijv. in functie van de vervolgopleiding wiskunde (grafieken, statistiek, meetkundige voorstelling) of in functie van het realiseren van de eindtermen ICT. *Wiskunde draagt op die wijze bij tot de ontwikkeling van ICT-vaardigheden*.

Geregeld zullen we de leerlingen confronteren met een onderzoeksopdracht op meetkundige figuren. Daarbij zullen ze moeten beschikken over een elementaire kennis van en de vaardigheid in het uitvoeren van tekenopdrachten met die software. Het is wellicht zinvol hier te werken met een systeem van ondersteunende *werkkaarten*, die bepaalde ‘constructies’ beschrijven.

V4 Wiskundige taalvaardigheden

In wiskunde functioneren, zoals in elke taal, *verschillende taalvaardigheden: luisteren en lezen, spreken en schrijven*. Twee ervan gaan over (receptief) opnemen, de andere twee over (reproductief) weergeven. Willen leerlingen aan wiskundelessen deelnemen, willen ze hun wiskundekennis kunnen weergeven, dan is een vaardig omspringen met de vier verschillende vaardigheden noodzakelijk.

In de praktijk is er in de wiskunde een gradatie in de niveaus, waarop die wiskundekennis moet kunnen gemobiliseerd worden. Sommige onderdelen functioneren eerder op *intuïtief of geautomatiseerd kennis- of toepassingsniveau*. In andere situaties is *een formele verwoording of argumentatie* noodzakelijk. De hoogste formele aanpak in alle omstandigheden is in de praktijk niet vol te houden. Doorgedreven wiskundekennis houdt in dat waar nodig en gewenst, het taalniveau vlot kan aangepast worden.

Wiskundige leerfasen

Het niveau waarop een wiskundig onderdeel beheerst wordt, komt vaak overeen met de leerfasen hierover. Die kunnen *heel verschillend zijn voor verschillende inhoudelijke onderdelen*. Als antwoord daarop biedt het curriculum wiskunde doorheen het secundair onderwijs een breed spectrum van wiskundige vormingen aan. In de eerste graad A-stroom wordt er structureel evenwel geen onderscheid gemaakt tussen de leerlingen en de wegen die ze zullen uitgaan. De potentiële verschillen zijn wel aanwezig. Dit vraagt enige soepelheid in het omgaan met het niveau (de leerfase) waarop wiskunde wordt verwerkt. Van sommige leerlingen kan in sommige situaties al een hoger beheersingsniveau gevraagd worden. In de doorstroming naar bepaalde studierichtingen is een hoger beheersingsniveau een voorwaarde. Dat is precies de oriënteringsfunctie van de eerste graad.

We vatten de onderscheiden *leerfases van wiskunde* (niveau waarop wiskunde beheerst wordt) hier kort samen.

- *Herkennen en benoemen*

  De leerling is in staat het begrip in concrete situaties te herkennen. Hij kan er voorbeelden en tegenvoorbeelden van aanwijzen. De leerling vormt zich van het begrip een intuïtieve, niet geëxpliciteerde begripsomschrijving. Het gaat hier om de fase van de betekenisgeving aan begrippen.

- *Verwoorden en gebruiken*

  De leerling kan het begrip hanteren op basis van voorwaarden waaraan het moet voldoen. Hij kan ‘eigenschappen’ van het begrip aangeven. De vorm is echter nog ongestructureerd en niet ‘geformaliseerd’. In plaats van te werken vanuit een globaal beeld van het begrip, is de leerling in staat al meer verbanden te vatten.

  In deze fase is de verwoording door de leerlingen zelf belangrijk. De leerling legt verbindingen tussen de concrete context en geabstraheerde begrippen op basis van associatie met ‘kenmerkende’ eigenschappen. Deze verbindingen moeten correct gelegd worden. De enige mogelijkheid tot ‘controle’ op dit leerproces is de leerling dit proces effectief onder woorden te laten brengen. Dit betekent dat alle leerlingen die kansen moeten krijgen. Taalarme leerlingen kunnen meer kansen krijgen dan anderen.

  In dit stadium kan de redelijk informele kennis toch al gebruikt worden in allerlei contextgebonden situaties. Deze toepassingen zullen precies een versteviging betekenen van de begripsvorming.

- *Formaliseren*

  De leerling kan een definitie of een eigenschap behoorlijk formuleren en de gehanteerde situaties (en figuren) hieraan toetsen. Hij kan vermoedens of hypothesen onder woorden brengen en ze intuïtief argumenteren.

Deze eerste formalisering (het formeel maken van de gebruikte taal) ligt op het vlak van de omschrijvingen van de begrippen en van de kenmerken en de eigenschappen ervan. Bij het verklaren en argumenteren (het beantwoorden van de waaromvraag) blijft het nog bij het informeel aanreiken van mogelijke argumenten.

Ook in deze fase kan de wiskundekennis ruim toegepast worden. Het telkens hanteren van definitie of eigenschap maakt van de formele vorm een vlot hanteerbare en vertaalbare vorm.

- *Formeel argumenteren*

  De leerling kan een hypothese onderzoeken, al of niet besluiten tot een eigenschap en er een bewijs voor opstellen. Het gaat om een tweede beweging in de formalisering. Definities van begrippen en eigenschappen worden vlot verwoord. De leerling is er zich van bewust dat wiskundige beweringen niet zomaar aanvaard worden. Hij kan een 'onderzoekje' opzetten via voorbeelden en tegenvoorbeelden. Hij kan veralgemeningen van situaties formuleren en de argumenten in een logische volgorde presenteren. Tenslotte groeit hij naar het formeel opschrijven van het bewijs van een eigenschap. De confrontatie met de formuleringen van anderen, met de formulering van de leraar, met die van het leerboek, betekent een proces van aanzuiveren van de wiskundetaal.

  Een belangrijk element in dit proces is dat leerlingen in hun leerproces een *omslag* maken. Dat betekent concreet dat ze in de meer formele taal kunnen leren. Wie wiskunde op hoger niveau wil kennen en gebruiken, zal zeker een deel op een meer formele wijze verwerven. Dat betekent dat je niet eerst de fase van voorbeelden, tegenvoorbeelden, contextsituaties … hebt doorlopen. Je kunt die stappen uiteraard zelf aanvullen, als dat voor je leerproces van belang is.

Taalbeheersingsniveaus

In de verschillende leerfasen van wiskunde zullen de leerlingen en de leraar geconfronteerd worden met *verschillende taalniveaus*. Verschillende studies wijzen op een groeien in niveau gedurende het leerproces.

Algemeen is het van belang dat om die wiskundetaal te leren, de leerling die taal zelf moet kunnen hanteren. In de fase van herkennen en verwoorden zal dat een intuïtieve taal zijn, verwant met de dagelijkse taal. De vakliteratuur spreekt hier van *actieve taal of demonstratieve taal*. In de fase van formele kennis is dat taalniveau eerder *verbaalalgebraïsch of functioneel*.

Van belang is dat wiskundeleraren de verschillende taalniveaus accepteren. Als kennis op het verkenningsniveau getoetst wordt, dan hoef je geen formele taal te verwachten. De leerling mag immers zijn eigen taal gebruiken. Wie een definitie opvraagt, mag wel de zorgvuldigheid van de formele taal verwachten. Let wel, het kunnen weergeven van een definitie (in een al of niet gememoriseerde vorm) hoeft niet te betekenen dat er inzicht is. Willen we inzicht toetsen, zullen we dat op een andere wijze moeten doen, waarschijnlijk meer in toepassingssituaties, vaak ook in 'nieuwe' situaties.

Wat in de wiskundelessen van de eerste graad moet gebeuren is dat leerlingen *naar een hoger taalniveau* gebracht worden. Dat betekent dat hun eigen intuïtieve taal geleidelijk aan wordt uitgezuiverd. En dat ze een meer formele vorm krijgt. De slordigheden en de omslachtige informatie moeten weggelaten worden. Dit is voor sommige leerlingen een gemakkelijk leerproces, voor de meeste leerlingen is dit moeilijk. Belangrijk is deze leerlingen veel kansen te bieden tot verwoording. Een analyse van de goede en de minder goede elementen of het vergelijken met betere of volledige antwoorden van andere leerlingen draagt meer bij dan het herhalen van de enig juiste formulering (van het leerboek).

Taalondersteuning

Om een behoorlijke ondersteuning te bieden van de wiskundige taalvaardigheid is het belangrijk verschillende taalelementen te onderscheiden. We kunnen een onderscheid maken tussen drie soorten ‘taal’.

- In de wiskundelessen wordt heel wat *dagelijkse taal* gehanteerd. Het gaat om woorden die uit het leven van alledag worden gehaald. Het gaat om begrippen die in de wiskunde geen andere betekenis krijgen.

  Voorbeelden uit wiskundevraagstukken: begrippen zoals tuin, omheining, vrachtwagen, fietstocht, tandwiel, draaisnelheid, snijpunt, richting, bibliotheek, thriller, achterkant, lezen, passeren, kruisen, monteren, ontmoeten…

  Merk op dat niet alle woorden tot de evidente woordenschat van leerlingen behoren. We kunnen er niet vanuit gaan dat die voldoende beheerst wordt om de wiskundelessen op dat niveau te volgen.

  Omdat wiskunde vaak te maken heeft met het oplossen van problemen is een belangrijk aspect het omzetten van de meestal dagelijkse taal uit de opgave naar wiskundetaal (het mathematiseren).

  Van de wiskundeleraar wordt verwacht dat hij ook een taalleerkracht is. Alleszins kan het gebruik van betekenisvolle contexten gebruikt worden om in het kader daarvan ook meer Nederlandse taalvaardigheid te laten verwerven. Beter dan het vermijden van een hele resem woorden kan effectief aandacht besteed worden aan het verwerven van deze woordenschat. Hiervoor worden in afspraak met de taalleerkrachten methodieken gehanteerd, waarmee leerlingen al vertrouwd zijn. Zo kan van leerlingen verwacht worden dat ze van een aantal woorden zelf de betekenis opzoeken.

  Bijzondere aandacht moet besteed worden aan dagelijkse woorden die meerdere betekenissen hebben. Leerlingen (en vaak anderstaligen) hebben begrippen en woorden verworven in een specifieke context. Het gebruik ervan in een andere context kan heel wat onbegrip veroorzaken.

- Een tweede vorm van woordgebruik zijn typische schoolwoorden (*schooltaalwoorden*).

  Voorbeelden: beschrijf, noteer de passende …, teken …, benoemen, zo nauwkeurig mogelijk, van groot naar klein …

  De specifieke schooltaal is voor leerlingen soms een vreemde taal. Belangrijk is dat een aantal van deze woorden voor verschillende leraren soms een verschillende betekenis heeft. Opdrachten zoals: geef … weer, controleer, vergelijk, benoem, noteer … krijgen in wiskunde een meer specifieke betekenis. Ook meer wiskundige schooltaalwoorden hebben in andere situaties soms een andere (minder wiskundige) betekenis: reken uit, los op, bepaal, construeer … Vaak is er een verschil in interpretatie van jaar tot jaar, van leraar tot leraar. Duidelijke afspraken binnen de vakgroep wiskunde zijn wenselijk.

  Schooltaalwoorden verwijzen dikwijls naar ‘afspraken’, die min of meer vanzelfsprekend en soms stilzwijgend in het leerproces insluipen. Voor leerlingen die daarin mee zijn, is dit uiteraard duidelijk. Voor leerlingen die moeilijkheden hebben met de begripsvorming of met het leren op zich, kan dit een bijkomend obstakel vormen.

- Een derde vorm van woordgebruik is de *wiskundetaal* zelf.

  Voorbeelden: rechthoek, 16 m lang, ontwikkeling, draadmodel, kubus, bovenaanzicht, $\frac{1}{8}$, anderhalf keer, passer, liniaal, grafiek, 30 km aan 30 km per uur, na hoeveel keer …

  Specifieke vaktermen krijgen in wiskunde een welomschreven betekenis (bijv. ontwikkeling, grafiek, breuk, afstand…). Soms is die betekenis anders dan in de dagelijkse taal (‘ontwikkelen’ heeft meerdere betekenissen; een breuk kan wijzen op iets dat effectief ‘gebroken’ is; ‘afstand’ verwijst naar lengte, maar ook naar ‘van iets afstand nemen of doen’).

  Daarnaast komen bepaalde kernwoorden of signaalwoorden veel voor (hoeveel, gelijk, alle, sommige…). Dergelijke woorden krijgen in de wiskundelessen uiteraard bijzondere aandacht.

Didactische aanpak

Wat *de specifieke wiskundetaal* betreft, werd hiervoor al voldoende gewezen op het aanbrengen van de wiskundebegrippen in betekenisvolle situaties, op het laten verwoorden door de leerling zelf van begrippen en omschrijvingen, en op het geleidelijk proces van verfijnen van de actieve taal van de leerlingen tot een meer formele taal. Dit kan slechts in een leerproces waarbij de leerlingen actief betrokken worden.

Hiermee zijn drie belangrijke aspecten van de didactische aanpak van wiskundelessen aangegeven. Deze aspecten passen ook in een proces van taalontwikkeling.

- Begrippen en wiskundekennis in het algemeen worden ontwikkeld *in betekenisvolle situaties*. Leerlingen kunnen terugvallen op concrete situaties waarin de begrippen gevormd zijn. Het geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden hoort bij wiskundekennis.
- De aandacht die nodig is voor *de talige ontwikkeling in het verfijningsproces* van begripsomschrijvingen. Er is aandacht voor zowel het verfijnen van de taal en het verhogen van het beheersingsniveau, als voor de taalsteun die leerlingen nodig hebben om de dagelijkse taal en de schooltaal te beheersen.

  Belangrijk hierbij is dat leerlingen op korte termijn feedback krijgen over hun leerproces, om hen op het goede spoor te houden, en om verkeerde associaties en vastzetting van begripsvorming te voorkomen.
- Er is *een actieve betrokkenheid van leerlingen*. Daarbij krijgen de leerlingen alle kansen om de verwoording van hun kennis te toetsen. Niet alle leerlingen gaan spontaan mee in het zelfstandig werken en leren. Ze hebben soms een actieve uitnodiging daartoe nodig.

  Het pleidooi voor actieve betrokkenheid hoeft niet meteen te betekenen dat er altijd ‘frontale groepsgesprekken’ moeten gevoerd worden, waarbij de leraar de spil is in het onderwijsleergesprek. Ook (soms goed gestuurd) groepswerk tussen leerlingen kan aan bod komen (groepjes van twee of vier, eventueel met een specifieke opdracht voor elk groepslid).

Visueel aspect van wiskundetaal

Wiskundige informatie wordt vaak overgebracht via *diagrammen en grafieken* en met behulp van *meetkundige figuren*. Bij probleem oplossen (en zeker in de meetkunde) zal je vaak eerst een visuele voorstelling trachten te maken van de situatie. Iemand die deze visuele taal begrijpt, krijgt via zo’n figuur heel wat informatie.

Wiskundige communicatie kan een visueel aspect hebben. De moeilijkheid van die wiskundige visuele taal voor de leerlingen mag niet onderschat worden. Figuren bevatten *gecondenseerde, cryptische informatie*. De beeldtaal in figuren is soms een tot één teken geabstraheerde informatie. Wie dat teken, dat symbool kent, kan de informatie aflezen. Wie de abstractie niet maakte, staat voor een raadsel.

Vandaar dat het belangrijk is de leerlingen met vele figuren te confronteren en ze de transfer, de vertaling van opgave naar figuur of van figuur naar geschreven informatie te laten maken. Vooral bij het maken van bewijzen kan dit belangrijk zijn: bijv. de gegevens op een figuur aanbrengen, zoveel mogelijk informatie op een figuur aanbrengen.

V5 Denk- en redeneervaardigheden

Wiskunde wordt geassocieerd met *een deductief systeem*. Wiskunde staat of valt dan met de logische redeneringen en het bewijzen van de eigenschappen. Binnen de wiskunde zelf zijn er echter voldoende ontwikkelingen die aangeven dat ook op *andere wijzen* aan wiskunde gewerkt wordt en dat wiskunde dus meer is dan ‘eigenschappen bewijzen’.

Met *denk- en redeneervaardigheden* worden hier onder meer bedoeld:

- onderzoeken en abstraheren (bij de begripsvorming);

- veralgemenen (ontdekken van een eigenschap);
- analyseren;
- synthetiseren;
- structureren;
- ordenen;
- een analoge redenering opbouwen;
- argumenteren.

Ook in de wiskundevorming in de eerste graad kunnen bij ‘het bewijzen’ vragen gesteld worden.

- Overtuigen we leerlingen door het bewijzen van de juistheid van de bewering? Stellen leerlingen zich wel die vraag?
- Ondersteunt een bewijs het inzicht? Draagt een gememoriseerd bewijs bij tot het begrijpen van wiskunde en het beter toepassen van de wiskundekennis of het beter redeneren?
- En zelfs: is het aanbieden van bewijzen aan alle leerlingen überhaupt zinvol? Wat gebruik je als modale volwassene nog concreet van die rigoureuze bewijsvorming? Waar en wanneer steun je op die aangeleerde bewijzen?

Wiskundevorming wordt dus geconfronteerd met *vragen bij een van haar meest essentiële onderdelen* en het belang ervan in de vorming van alle leerlingen. Een antwoord hierop wordt dan weer niet gegeven door het bewijzen zomaar weg te laten. We proberen een genuanceerd antwoord te formuleren vanuit drie overwegingen.

- Een eerste overweging is dat er *vele vormen van wiskundige vorming* zijn. Een aantal leerlingen zal later slechts praktische of (reken)technische gebruiker van wiskunde zijn. Anderen zullen wiskunde heel specifiek nodig hebben als hun vakgebied of als ondersteuning in hun eigen vakgebied. Tussen beide opvattingen ligt wellicht nog een aantal tussenwegen.

  Vraag is of de leerlingen een gefundeerde keuze kunnen maken tussen deze mogelijkheden, als ze niet geconfronteerd zouden worden met een essentieel deel van de wiskunde. Alles wijst op de noodzaak van een gedifferentieerde aanpak, met vele leerkansen op de verschillende beheersingsniveaus.
- Een tweede overweging is dat het bewijzen van eigenschappen *moet open getrokken worden naar wiskundig redeneren*.

  Dat betekent: het zoeken en vinden van argumenten bij beweringen om die te onderbouwen en het aanpakken van complexe problemen, via heuristiek: bijv. het probleem vertalen naar een eenvoudiger probleem, op zoek gaan naar patronen, een analoge situatie onderzoeken, bijzondere gevallen onderzoeken, irrelevante details weglaten ….

  Een analoge methodiek kan gebruikt worden bij redeneren, bewijzen en problemen aanpakken.
- Een derde overweging is dat het in feite gaat om *een wiskundige competentie*, of zelfs *een combinatie van meerdere competenties*: het analyserend redeneren, het probleemgericht aanpakken, het inzetten van de geschikte kennis, het actief kunnen mobiliseren van kennisschema’s en het beschikken over voldoende vaardigheid in de technieken.

Fasen in het proces van onderbouwen van redeneringen

Een redeneerproces start meestal met een *bewering*. Dat kan een vaststelling zijn vanuit *een onderzoeksproces*. Dat kan *een probleemstelling* zijn. Dat is (te) vaak een opgegeven eigenschap. Belangrijk bij dit laatste is het proces van onderzoeken en opbouwen van de eigenschap te betrekken in het redeneerproces. Zo worden de leerlingen ermee geconfronteerd dat wiskunde niet een afgewerkt geheel is, dat door de leraar wordt overgedragen. *Wiskunde moet een systeem worden, waarin ze zelf beweringen kunnen onderzoeken en onderbouwen met argumenten*. De term ‘onderbouwen’ kan betekenen dat verbanden gelegd worden met andere kennis of eigenschappen of verklaard worden. Dat kan dan enerzijds met intuïtief uitleggen of argumenteren. Dat kan anderzijds meer deductief uitgebouwd worden, zonder evenwel een groot deductief systeem te ontwikkelen. In vakterminologie wordt dit *lokaal deductief werken* genoemd.

In een dergelijk proces zijn *verschillende stappen* te onderscheiden.

- *Voorbereidend onderzoeken*

  Vanuit het *actief onderzoeken* van relaties tussen begrippen worden leerlingen geconfronteerd met vele vormen van beweringen en vermoedens. Niet elk vermoeden leidt tot een 'eigenschap', niet elke bewering zal blijken juist, veralgemeenbaar ... te zijn. Een bewering over een bepaalde situatie wordt eerst *onderzocht*, bijv. op voorbeelden en tegenvoorbeelden. Kan het of kan het niet? Niet elke bewering hoeft meteen tot een 'eigenschap' te leiden. Het is dus goed eerst een aantal voorbeelden te bekijken en te zien of er kans is op een veralgemening van de eerst opgewelde idee.

  Leerlingen worden hierbij actief betrokken. Zo leren ze dat ze niet alles zonder meer moeten proberen te 'bewijzen', maar dat ze eerst argumenten moeten verzamelen om na te gaan of een bewering wel mogelijk is.

  Zonder dat alle wiskunde zelf ontdekt moet worden, kan deze fase worden toegepast op beweringen van leerlingen zelf. Leerlingen moeten het gevoel krijgen dat ze wiskunde mee construeren. Al te veel leerlingen beschouwen wiskunde als een vak waarin je moet 'ingewijd' worden.

- *Het behoorlijk formuleren van een hypothese*

  Dit is een fase van verwoording. Uit de vorige fase blijft een vermoeden over, waarvan *de formulering* moet verfijnd worden. Dat gebeurt op basis van bijkomende voorbeelden of tegenvoorbeelden. In deze fase is het al belangrijk om een goed verband te zien tussen de 'gegeven situatie' en de 'te bereiken situatie' (de vraag, het te bewijzen).

  De formulering van een wiskundige hypothese heeft vaak een bepaalde vorm (bijv. een implicatie, een equivalentie).

  Zo wordt onderscheid gemaakt tussen eigenschappen en kenmerken. Een kenmerk staat dan voor een eigenschap die als 'kenmerkend' kan aangezien worden. Dat wil zeggen dat ze gelijkwaardig is met de definitie van het begrip en eventueel als dusdanig zou kunnen functioneren.

  Voorbeeld

  "In een vierkant snijden de diagonalen elkaar middendoor" is een eigenschap van elk vierkant. Ze kan gebruikt worden bij het zoeken naar lijnstukken met een gelijke lengte. Deze uitspraak is geen kenmerk, want er zijn nog andere vierhoeken met die eigenschap.

- *Het formuleren van argumenten*

  Dat zou in een eerste benadering kunnen vanuit de voorbeelden die gevonden werden vanuit figuren, vanuit constructies … *Toch biedt een dergelijke werkwijze geen garantie op veralgemening.* In de volgende fase worden eigenschappen aangegeven die *bepaalde verbanden of denkstappen verantwoorden*.

  Waar mogelijk zullen de eerder spontane opwerpingen om een oplossing te 'verdedigen', gebruikt worden om leer- en klassengesprekken op te zetten, waarin leerlingen onderling en leerlingen ten aanzien van de leerkracht hun argumentatie uitwisselen. De leerkracht zal ervoor zorgen dat in deze fase aangebrachte argumenten kritisch bevraagd en getoetst worden. Belangrijk hierbij is dat weerhouden argumenten als valabel aanvaard worden en dat de reden van het afwijzen van argumenten wordt ingezien.

- *Een bewijs neerschrijven*

  De *laatste stap in het proces* is het uiteindelijk *uitschrijven* van de argumentatie of de verklaring *in een behoorlijke volgorde*. Al naargelang het niveau van de leerlingen worden hieraan hogere eisen gesteld.

Dit proces leidt tot een verklaring. In het tweede jaar is het zinvol een aantal van deze redeneringen gestructureerd en ordelijk op te schrijven. Ze zijn de voorlopers van bewijzen.

Bij het vergelijken van deze aanpak met het oplossen van problemen, vallen veel gelijkenissen op. Bij problemen oplossen komt er heel wat ‘redeneren’ kijken. Beide processen kenmerken een wiskundige aanpak.

Redeneren in de eerste graad

In de eerste graad zijn er *grote verschillen* in de (mogelijke) redeneerniveaus van leerlingen. Er is geen eenduidige strategie om de redeneercompetentie bij te brengen. Een gedifferentieerde aanpak is aan te bevelen, waarbij rekening gehouden wordt met de verscheidenheid in intelligenties en leerstijlen van leerlingen. Leerlingen kunnen zelf een deel opnemen van de werkwijze die hen het meest bijbrengt. Wiskunde leer je maar door het te doen. En dat geldt ook voor wiskundig redeneren.

De moeilijkste stap voor leerlingen bij het redeneren is de laatste fase, met name *het uitschrijven van het bewijs*. Vandaar dat in de eerste graad gekozen wordt om deze fase maar in een aantal goedgekozen situaties uit te voeren. Daarbij wordt gestreefd naar een gezond evenwicht tussen een aantal modelsituaties (niveau elementair) en een ruimere aanpak in de oefeningen (niveau verdieping) in functie van wat in de leerlingengroep mogelijk blijkt.

Tegenover deze keuzeruimte staat dat de eerste fasen aan bod komen, zowel in het aanpakken van problemen, als bij het onderzoeken van meetkundige eigenschappen. Het uitvoeren van eigen onderzoekjes (eventueel met ICT), het mathematiseren van bepaalde situaties, het formuleren van hypothesen en het aanbrengen van argumenten (of bij problemen oplossen het effectief uitvoeren van de voorgestelde bewerkingen of procedures) zijn redeneerstappen die de leerlingen al wel aankunnen.

In feite wordt hierdoor een kader gecreëerd waarmee leraar en leerlingen *over wiskundige beweringen kunnen communiceren*.

Voorbeelden

- Welke voorbeelden heb je onderzocht? Zijn ze voldoende ‘algemeen’?
- Als je in je bewering een voorwaarde weglaat, lukt het dan nog? Is die voorwaarde dan essentieel?
- Welke eigenschap wil je hier gebruiken? Zijn alle voorwaarden daarvoor vervuld?

Leerlingen krijgen hierdoor inzicht in hoe wiskundig begrijpen verloopt, dus hoe sterk analyserend ze te werk moeten gaan, hoe kritisch ze moeten omgaan met beweringen, of met argumenten…. Ze ondervinden en kunnen communiceren over hoe een bewering ‘getoetst’ wordt. Wiskunde valt dan niet zomaar uit de lucht. Wiskunde wordt opgebouwd, geconstrueerd. Op dergelijke wijze komen ze dichter bij het fundamentele wiskundige denkproces.

Gekoppeld aan de *taalniveaus* zal dit proces aanvankelijk intuïtief vanuit gissen en missen verlopen, maar geleidelijk aan zal de gebruikte formulering beter aansluiten bij een wiskundig gestructureerde (mogelijk deductieachtige) aanpak. Leerlingen die hier vlot mee over weg kunnen, worden georiënteerd naar wiskundig sterkere richtingen, waar dan verfijning van zowel de wiskundetaal als de aanpak van redeneren zal nagestreefd worden. Andere leerlingen hoeven niet noodzakelijk met deze intensere wiskundevorming geconfronteerd te worden. Voor hen kan wiskunde functioneren op een al of niet breed uitgewerkt gebruikersniveau.

Onderzoek toont aan dat leerlingen die succesvol omgaan met wiskundig redeneren meestal actieve leerlingen zijn. Nog maar eens een aanbeveling om *actieve leerprocessen* aan te bieden (discussie, groepswerk, contextgericht werken, projectmatige aanpak). Passieve strategieën, zoals voordoen, memoriseren en dril geven minder goede resultaten dan actief te verwerken opdrachten. Een andere bevinding is dat leerlingen die succesvol met wiskundeleerprocessen kunnen omgaan, meer reflecterend te werk gaan. Leerlingen die terugkoppelend werken (wat doe ik precies en waarom doe ik het op die wijze) hebben meer succes dan leerlingen die slaafs de onderwezen regels uitvoeren.

Redeneervaardigheid moet door de leerlingen nog verworven worden. Dat vraagt *een geleidelijke en geduldige aanpak*. Het is zinvol aandacht te besteden aan:

- het redeneren op een tekening;
- het argumenteren van delen van een redenering (bijv. het expliciteren van gegeven en te bewijzen);
- het zelf ontdekken van de kernidee uit een redenering;
- het begrijpen en uitleggen van een gegeven bewijs;
- het maken van redeneringen in analoge situaties;
- het zelf uitschrijven van een behoorlijk geordende redenering.

Het is zinvol leerlingen in een eerste periode *een overzichtelijk werkschema* aan te bieden. Zulk stappenplan geeft een goede steun bij het didactisch verwerken van redeneervaardigheden (d.w.z. het biedt een leidraad bij de aanpak in de les of bij het verwerken van taken). Het telkens terugkoppelen naar zo'n stappenplan kan in de moeilijke fase van het uitschrijven van een bewijs een ruggensteun bieden. Zo verwerven leerlingen een zekere 'routine' in bewijsvoeringen en dat schept vertrouwen. Anderzijds moeten met redeneervaardigheden precies heel soepel omgegaan kunnen worden. Een te sterk vasthouden aan één en slechts één schema werkt waarschijnlijk even nefast als helemaal geen schema aanbieden.

V6 Leervaardigheden

Aan het verwerven van leervaardigheden moet bewust gewerkt worden. Belangrijk is evenwel dat de bijdrage van wiskunde kadert in een bredere aanpak van de problematiek leren leren in de school. Omdat het 'de leerling' is die adequate technieken moet verwerven, zal over de vakken heen toch een zekere eenvormigheid nagestreefd worden. Algemene technieken worden uiteraard vakspecifiek vertaald.

De essentie van wiskundekennis is het *inzicht* in begrippen en eigenschappen.
Dit houdt onder meer in:

- het kunnen geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden;
- het herkennen van het begrip of eigenschap in contextsituaties;
- het kunnen formuleren (in woorden en/of symbolen) van een definitie of een eigenschap;
- een begrip of een eigenschap gebruiken in toepassingen;
- een begrip kunnen onderbrengen in een ruimer kennisschema.

Als de kennis zich in de fase van voorbeelden en tegenvoorbeelden bevindt, zal het leren zich beperken tot het hernemen van die voorbeelden en het zelf zoeken van nieuwe voorbeelden. Als daarentegen een definitie moet gekend zijn, zal de tekst ervan grondig geanalyseerd en begrepen moeten worden, bijv. welke gekende begrippen, welke logische kernwoorden komen aan bod. Daarna zal de tekst ingeprent moeten worden (gememoriseerd of in eigen woorden geformuleerd). Indien gevraagd, zal de formulering in symbolen moeten geanalyseerd, begrepen en ingeprent worden. Gaat het om de toepassing van het begrip, dan kunnen oefeningen hermaakt en gecontroleerd worden. Niet in de les gemaakte oefeningen kunnen door de leerlingen opgelost worden en getoetst aan een correctiesleutel (indien aanwezig in het leermateriaal).

De leerlingen moeten een aantal *vaardigheden* verwerven. Uiteraard is het belangrijk inzicht te hebben in de technieken en de procedures zelf. Maar de vaardigheid zal maar verworven worden als ze als vaardigheid aangeleerd wordt en voldoende wordt ingeoefend.

Voor reken- of tekenvaardigheid is het niet moeilijk dit in te zien. Dit impliceert dat voldoende aandacht besteed wordt aan geregelde (over een langere periode gespreide) inoefening, waarbij in hoofdzaak de leerling zelfstandig werkt.

Voor wiskundige taalvaardigheid, denk- en redeneervaardigheden en voor probleemoplossende vaardigheden moet op gelijkaardige wijze verwerking opgezet worden. Taalvaardigheid wordt niet verworven door het louter memoriseren van definities en eigenschappen. Ook redeneervaardigheden vragen meer dan het memoriseren van bewijzen. Dat betekent niet dat het memoriseren van bepaalde onderdelen niet belangrijk zou zijn. Een geleidelijke (geduldige) weg met aangepaste verwerkingsopdrachten kan het bereiken van het einddoel misschien gemakkelijker maken.

Bij het verwerven van wiskunde wordt een aantal *leervaardigheden* geactiveerd.

Voorbeelden

- het inprenten (notaties, symbolen, formules);
- het gebruik van de vormkenmerken van een tekst (titels, subtitels, afbeeldingen, schikking kaders, lettertype, tekstmarkeringen);
- de aandacht voor het begrijpen en analyseren van het geleerde;
- het opnieuw opzoeken en zo nodig inoefenen van voorkennis;
- het verdiepen van de leertekst in leerboeken of notities (zich vragen stellen bij de leerinhoud, de tekst structureren bijv. met tekstmarkeringen, kleur ..., het bijhouden van een kennisschema);
- het gebruiken van 'informatiebronnen' (een inhoudstafel, een register, een samenvatting van de leerinhouden in het leerboek, een vademecum, de handleiding van een rekenmachine);
- het zichzelf sturen bij het leren:
  - de keuze van het verwerkingsproces eigen aan de wiskundige leerinhoud;
  - het oordeelkundig gebruiken van een antwoordblad, een correctiesleutel;
  - het plannen van de studietijd;
  - het onderzoeken van gemaakte fouten en hoe die kunnen vermeden worden (bijv. door de eigen werkwijze te vergelijken met die van anderen, door het aangeven waarom iets fout gegaan is).

Belangrijk is te beseffen dat *tijdens het leerproces* zelf al sterk kan bijgedragen worden tot het realiseren van leervaardigheden.

- Zo kan een leerproces, waarin de leerlingen actief betrokken worden bij het bevragen van de leerinhouden, die leerlingen leren 'vragen stellen'.
- Het 'analyseren' van een definitie of eigenschap in de klas ondersteunt het analyseren tijdens het instuderen.
- Het gebruik van een ordelijk bordschema met het geëxpliciteerd (dus niet automatisch) gebruik van verdiepingstechnieken (kleur, kaders, structuur) zal leerlingen aanzetten dit ook te doen.
- Het vergelijken van het bordschema met de neerslag van de leerstof in het leerboek (dus meer dan het aanduiden van de leerstof) en het wijzen op de vormkenmerken ervan, ondersteunt het leren.
- Het hernemen van de structuur bij de aanknopingsfase van de les, het laten raadplegen van overzichten van leerinhouden (bijv. samenvatting in het leerboek, in een beschikbaar of eigenhandig aangelegd vademecum) zal hen telkens opnieuw confronteren met structurering en synthese van hun kennis en hen meteen leren hun voorkennis zelfstandig op te zoeken en aan te vullen.
- De wijze waarop de leerkracht omgaat met fouten en deze aangrijpt als leerkansen, kan leerlingen de waarde leren van het onderzoeken van hun fouten.
- De wijze waarop leerlingen betrokken worden bij het leerproces kan hun zelfwerkzaamheid en hun verantwoordelijkheid voor het eigen leren versterken.

5.1.2 Attitudes

1 Doelstellingen

De leerlingen ontwikkelen:		
A1	Zin voor nauwkeurigheid en orde	
A2	Zin voor helderheid, bondigheid, eenvoud van taalgebruik	
A3	Kritische zin	46 47
	- een kritische houding tegenover het gebruik van cijfermateriaal, tabellen, berekeningen en grafische voorstellingen; - een kritische houding tegenover de eigen berekeningen, verwoordingen, beweringen, handelingen …; - het besef dat in wiskunde niet enkel het eindresultaat belangrijk is, maar ook het inzicht in de werkwijze waarmee het antwoord bekomen wordt.	
A4	Zelfvertrouwen, zelfstandigheid en doorzettingsvermogen bij het aanpakken van problemen	44
A5	Zelfregulatie	45
	O.m. oriëntatie, planning, bewaking, zelftoetsing en reflectie.	
A6	Zin voor samenwerking en overleg	

2 Pedagogisch-didactische wenken

Doorheen de wiskundevorming kunnen leerlingen een aantal attitudes en in het bijzonder leerattitudes verwerven.

Het is belangrijk te beseffen dat attitudes maar doorheen een proces van langere duur bereikt worden. Dat proces start al in de basisschool. Een aantal attitudes wordt in de eerste graad verder nagestreefd en zullen in de tweede en de derde graad nog verder gevormd worden al naargelang de gekozen wiskundevorming.

In verband met de controle geldt nog de volgende opmerking. "Attitudes zijn altijd na te streven. De effecten ervan op de leerlingen maken geen deel uit van het inspectieonderzoek." (Vlor, Advies betreffende de eindtermen ... p. 22). Voor wiskunde betreft deze uitspraak de eindtermen 44, 45, 46 en 47.

A1 Zin voor nauwkeurigheid

Zin voor nauwkeurigheid en orde kan specifiek nagestreefd worden bij reken-, meet- en tekenvaardigheid.

Bij het gebruik van notaties en symbolen, bij het verwoorden van definities en eigenschappen worden de leerlingen geconfronteerd met *de nauwkeurigheid van hun antwoord* (zowel schriftelijk als mondeling). Het is precies in dit toetsen van hun onvolmaakte antwoord dat leerlingen de kans krijgen het te corrigeren. Het leerproces in de klas moet voldoende kansen bevatten om deze terugkoppeling te kunnen geven.

Ordelijk en systematisch werken is een belangrijke leerhouding. Ze kan bijgebracht worden bijvoorbeeld bij het noteren, het maken van oefeningen en het aanpakken van problemen.

A2 Zin voor helderheid, bondigheid, eenvoud in taalgebruik

Leerlingen moeten hun gedachten en hun inzicht behoorlijk leren verwoorden. Het leerproces in de klas moet daartoe voldoende effectieve kansen bieden. Vanuit de vaak intuïtieve verwoording in de fase van de begripsvorming moeten de leerlingen *geleidelijk aan een correcte wiskundetaal hanteren.* Een wiskundige formulering is vaak helder, bondig en van alle ballast ontdaan. Leerlingen ervaren dat het gebruik van dergelijke formuleringen het denkproces helder doet verlopen. Ligt de beknoptheid van *symbolische formuleringen* voor de hand, dan is een behoorlijke verwoording ervan vaak een probleem. Dit vraagt bijzondere aandacht.

Omdat een zoekproces soms met vraag en antwoord, met gissen en missen en dus niet rechtlijnig ontwikkeld wordt, zal eens het doel bereikt, de uiteindelijke redenering *synthetiserend overlopen* worden, om een helder inzicht te bekomen. Voor leerzwakke leerlingen biedt dit vaak de gelegenheid terug aan te pikken.

Bij het oplossen van problemen wordt aandacht besteed aan het overhouden van een duidelijke synthese. Een heldere oplossing is overzichtelijk en gemakkelijker te begrijpen.

A3 Kritische zin

Wiskundevorming moet leiden tot een bevragende, onderzoekende, controlerende, verifiërende houding. Dit wil zeggen dat berekeningen, beweringen, argumenten en redeneringen niet noodzakelijk zomaar worden aanvaard en overgenomen. Dit slaat op vermoedens, oplossingen, redeneringen die door medeleerlingen in de klasgroep ter bespreking worden ingebracht. Dit moet bij elke leerling terugslaan op de zelfgemaakte berekeningen, oplossingen en redeneringen. Bij een berekening, een redenering, een oplossing van een probleem zijn zowel het proces als het eindproduct belangrijk. Oog krijgen voor de oplossings'methode' kan leiden tot het leren waarderen van andere oplossingen. Zo kunnen leerlingen een werkwijze of methode leren waarderen omdat ze eenvoudiger is, minder tijd vraagt, sneller veralgemening toelaat.

Belangrijk is dat deze onderzoekende houding *herkenbaar* is *in het didactisch optreden van de leerkracht*. Zowel de aanbreng van nieuwe leerinhouden als het toepassen van kennis en het oplossen van problemen bieden kansen tot stimulerende klassengesprekken. Leerlingen zullen maar oog krijgen voor het oplossings'proces', als hieraan tijdens het onderwijsleerproces voldoende aandacht besteed wordt en als ze gestimuleerd worden verschillende oplossingen of antwoorden te vergelijken.

Eenzelfde kritische houding moet ontwikkeld worden ten aanzien van het gebruik van allerlei wiskundig gepresenteerde informatie uit de media.

A4 Zelfvertrouwen, zelfstandigheid, doorzettingsvermogen

Bij vaardigheden werd uitvoerig ingegaan op het aanpakken van problemen. Het is niet moeilijk in te zien dat het verwerven van probleemoplossende vaardigheden een uitgelezen kans biedt om zelfwerkzaamheid en doorzettingsvermogen te verwerven.

Een goede aanpak van deze leerprocessen zal leerlingen een solide basis geven waarop zij kunnen terugvallen. *Succeservaring* zal daarbij *het zelfvertrouwen* en *de motivatie* van leerlingen onderbouwen. Wiskundig minder begaafde leerlingen geraken snel ontmoedigd als ze geen succes kennen. Ze moeten aangezet worden eenzelfde stap meermaals te hernemen. In een gedifferentieerde aanpak kunnen oefeningen zo aangeboden worden dat voor deze leerlingen de stappen niet te groot zijn.

Het is evident dat leerlingen fouten zullen maken. In een te uitsluitend cognitief gewaardeerd leerproces worden leerzwakke leerlingen daardoor benadeeld. Het is belangrijk in te zien dat *fouten maken inherent deel uitmaakt van het (wiskundig) leerproces.* Een goede leerkracht zal deze aanwenden als belangrijke leerkansen. Een aanmoedigende en respectvolle benadering zal leerlingen stimuleren en zal uiteindelijk leiden tot betere resultaten.

Wiskundig sterke leerlingen en leerlingen met een sterk lerend vermogen moeten voldoende leerkansen aangeboden krijgen, waarmee ze zich verder kunnen vormen. Verdiepingsleerstof en -oefeningen bieden daartoe heel wat mogelijkheden. Ook de werkvorm waarin die gepresenteerd worden (bijvoorbeeld opgebouwd vanuit een grote zelfstandigheid bij de verwerking) kan voor hen een bijkomende uitdaging inhouden.

A5 Zelfregulatie

Bij het oplossen van problemen moeten de leerlingen over *een goede kennisorganisatie beschikken en zoekstrategieën* hanteren. Daarnaast moeten ze hun zoeken en werken gecontroleerd uitvoeren. Dit betekent dat ze zelf hun werk *leren 'reguleren'*.

Dit houdt onder meer in dat ze hun resultaat toetsen (bijv. bij een rekenresultaat zowel op juistheid als op realiteitswaarde). Het is echter niet alleen aan het einde van het proces dat 'controle' nodig is. Die kan van bij de aanvang in het oplossingsproces opgenomen worden. Van bij de verkenning van het probleem (de oriëntatie), bij het opmaken van een uitvoeringsplan en bij de uitvoering zelf kan stapsgewijze gewerkt worden en kan elke stap gecontroleerd worden. *Zo leidt het aanpakken van problemen tot een onderzoeksgerichte houding en tot methodisch, planmatig en gecontroleerd werken.* Bij het opzetten van een redenering, bij het verklaren van een eigenschap kunnen dezelfde regulatietechnieken gevolgd worden.

Het is evident dat leerlingen deze houding maar geleidelijk aan zullen verwerven en dat dit gemakkelijker zal gaan, naarmate deze houding tijdens de leerprocessen in de werkwijze van de leerkracht aan bod komt.

Deze houding kan overgedragen worden op het aanpakken van andere problemen. Zo kan ze onder meer leiden tot de leerhouding van methodisch, planmatig en gecontroleerd werken. Op deze wijze kan wiskunde bijdragen tot het verwerven van een kritische houding ten aanzien van het globale eigen denken en handelen.

A6 Zin voor samenwerking en overleg

Een onderwijsleerproces waaraan de leerlingen volwaardig en actief deelnemen, waarin ze hun bevindingen en hun oplossingen vergelijken en toetsen aan die van anderen, kan hen een positieve waardering bijbrengen voor samenwerking en overleg. Bij het bespreken van oplossingsmethoden, bij het kritisch onderzoeken van mekaars oplossing kan waardering voor mekaars mening aangeleerd worden en daardoor waardering voor de persoon van de andere zelf.

Actieve leerprocessen zullen wiskundig sterkere leerlingen zeker niet benadelen. Daarom moet er over gewaakt worden dat *de wiskundig zwakke leerling voldoende waardering ervaart in het onderwijsleerproces.*

Het is belangrijk dat het klasklimaat voldoende open en positief is, zodat alle leerlingen hun antwoorden en oplossingen kunnen inbrengen. Een leerling die anderen deelgenoot maakt van zijn denk- en gevoelswereld, stelt zich kwetsbaar op. Daarom is het van belang dat de leerling zich veilig voelt tijdens het leerproces en bij (na)besprekingen van oplossingsprocessen, groepswerk … Dat betekent dat hij het gevoel moet hebben bij de leerkracht en bij de medeleerlingen op empathie en respect te kunnen rekenen.

5.2 Getallenleer

5.2.1 Eerste leerjaar

5.2.1.1 Algemene doelstellingen

1 *Getallen en bewerkingen met getallen betekenisvol gebruiken bij het oplossen van problemen.*

2 *Bewerkingen met getallen correct en vlot uitvoeren.*

3 *Letters gebruiken als onbekende, in veralgemeningen en in formules.*

4 *De samenhang tussen getallen en getallenvoorstellingen verwoorden en gebruiken.*

5 *Wiskundige taal en terminologie begrijpen en correct gebruiken.*

De algemene doelstelling van getallenleer in het eerste leerjaar is *de ontwikkeling van het getallenapparaat* en *het oplossen van problemen* die met getallen kunnen gesteld worden.

Over het aanpakken en het oplossen van problemen is in deel 5.1 - V1 uitvoerig commentaar geformuleerd. Belangrijk is te onderstrepen dat hieraan in de eerste graad ruim aandacht moet besteed worden. Het baat niet getallenverzamelingen te ontwikkelen met een zware algebraïsche structuur, als de leerlingen het concrete gebruik ervan niet inzien.

De ontwikkeling van de getallenverzamelingen van *de natuurlijke, gehele en rationale getallen* zal vanaf het begin gekoppeld worden aan *betekenisvolle (probleem)situaties.* Een voor de hand liggende presentatie van informatie bij situaties en problemen zijn *grafieken, diagrammen en tabellen*. Die worden dan ook best *geïntegreerd* van bij de aanvang in het aanpakken van vraagstukken.

Een vlotte omgang met bewerkingen en rekenprocedures is belangrijk. Dat betekent dat leerlingen vlot moeten kunnen *hoofdrekenen, cijferen* indien nodig, *een rekenmachine gebruiken en schattend* kunnen *rekenen*. De leerling moet de verschillende rekenwijzen en –procedures *flexibel* kunnen *inzetten* naargelang de noodzaak. *Het bereiken van rekenvlotheid gaat voor op de complexiteit van de oefeningen.* In het eerste leerjaar gaat het bij het rekenen vooral over het verwerven van de vaardigheden in de vier hoofdbewerkingen. De invoering van machten komt sporadisch aan bod om het gebruik in berekeningen te vereenvoudigen, maar wordt maar ten volle uitgewerkt in het tweede leerjaar (met negatieve exponenten).

De rekenvaardigheid maakt gebruik van *rekenregels en eigenschappen.* In het eerste leerjaar zal een aanvang gemaakt worden met het precies *verwoorden* van deze eigenschappen. Daarbij kan heel wat aandacht besteed worden aan de wiskundetaal. De leerlingen moeten leren hun werkwijze correct te verwoorden en hierbij wiskundig correcte terminologie te gebruiken.

De *algebra* komt aan bod als een logisch vervolg op de getallenleer. *Grootheden, patronen, verbanden, eigenschappen* worden voorgesteld *met letters*. Dat leidt tot *formules en vergelijkingen*. Het rekenen met letters en lettervormen komt in het eerste leerjaar als dusdanig niet voor. *Het oplossen van vergelijkingen en het gebruik van formules is beperkt*. Bij formules kan al aandacht besteed worden aan getalwaarde, waardoor het begrip veranderlijke enigszins vorm krijgt.

5.2.1.2 Aansluiting met het basisonderwijs

De te verwachten beginsituatie wordt uitvoerig beschreven in hoofdstuk 3. Bijzondere aandacht verdient de rekenvaardigheid. Ondanks de inspanningen in het basisonderwijs beschikken niet alle leerlingen over voldoende *rekenvaardigheid*. *Het onderhouden en het aanvullen* ervan, eventueel via een remediërende aanpak, zijn in de eerste graad nog noodzakelijk.

Over het algemeen worden als probleem aangegeven:

- de vlotheid bij *de rekentafels en de rekenautomatismen* (al aan bod vanaf het tweede leerjaar);
- *het rekenen met breuken* (let wel, vermenigvuldiging en deling komen in het leerplan bao maar beperkt aan bod);
- *schakelfouten*.

5.2.1.3 Getallen en bewerkingen met getallen betekenisvol gebruiken bij het oplossen van problemen

1 Doelstellingen

G1	Natuurlijke, gehele en rationale getallen associëren aan betekenisvolle situaties.	1
G2	Bewerkingen met getallen associëren aan betekenisvolle situaties.	1 7
G3	Vraagstukken in verband met betekenisvolle situaties oplossen.	1 7 8 9 12 13 16 17 22 23 24 25
G4	Procentberekeningen in zinvolle contexten gebruiken.	13
	E In eenvoudige en praktische situaties een procent van een grootheid of van een getal nemen.	
G5	Gegeven tabellen, schema's, grafieken en diagrammen aflezen en interpreteren.	23 25
	E Getalwaarden aflezen uit een tabel, op een grafiek of een staafdiagram en ze in hun context interpreteren.	
	B Vragen beantwoorden in verband met gegeven tabellen, schema's, grafieken en diagrammen.	
	V Zelf vragen stellen in verband met gegeven tabellen, schema's, grafieken en diagrammen en die vragen beantwoorden.	
G6	Cijfergegevens aanschouwelijk voorstellen, onder andere door middel van diagrammen en grafieken.	25
G7	Van een reeks getallen uit tabellen het rekenkundige gemiddelde en de mediaan bepalen en in de context interpreteren.	5 17
	E Van een reeks getallen (aantal ten hoogste vijf) het rekenkundige gemiddelde en de mediaan bepalen.	

2 Pedagogisch-didactische wenken

G1 De verschillende 'soorten' getallen moeten *een brede betekenis krijgen door ze te associëren met verschillende situaties uit het dagelijkse leven*. Daarom zal een rijke variatie aan situaties aangeboden worden, zowel in de fase van de ontwikkeling (aanbreng) als van de verwerking. Mogelijkheden: recepten, prijskaarten, reclamefolders, meetresultaten, productencodes, weerberichten, informatiebrochures, handleidingen, informatie over getallen in andere culturen ... Vermits tabellen en diagrammen al in de basisschool voorkomen, kunnen ook die presentatievormen gebruikt worden.

- *Natuurlijke getallen* kunnen verwijzen naar de aspecten tellen en ordenen.
- *Gehele getallen* kunnen geassocieerd worden met bijv. temperatuur, verlies, hoogte (diepte).
- *Rationale getallen* kunnen verbonden worden met verdeling, verhouding, schaal, procent en kans.
- *Breuken* kunnen gekoppeld worden aan visuele voorstellingen (bijv. schijfdiagrammen).
- In het algemeen kunnen getallen geassocieerd worden met meetresultaten (maatgetallen) en met begrippen als afstand, snelheid, tijd, geldwaarden.

Als aanknoping met de basisschool is een herhaling van het getalbegrip via deze praktische situaties een goede instap. Als gewerkt wordt met een reeks van praktische voorbeelden komen alle getalsoorten aan bod *van bij het begin van het schooljaar*. Meteen wordt het gehele gekende getallenapparaat geactiveerd en kunnen allerlei oefeningen gemaakt worden.

In de praktijk kunnen *gemengde getallen* voorkomen (o.a. op een rekenmachine). Om latere notatieproblemen te voorkomen wordt de notatie met plusteken aanbevolen, bijv. $3+\frac{1}{4}$. Het is niet de bedoeling te rekenen met gemengde getallen.

Vanuit een realistische aanpak ten aanzien van de leerlingen is het zinvol om *de negatieve getallen* in een eerste fase te beperken tot de gehele getallen. Negatieve breuken en negatieve decimale getallen komen getrapt aan bod, bij het gebruik in bewerkingen (zie suggesties bij de doelstellingen bewerkingen).

G2 Ook *de bewerkingen met getallen moeten een brede betekenis krijgen*. Bewerkingen zijn de eerste 'modellen van mathematisering' die de leerlingen kennen.

Voorbeelden

- Als je twee groepen personen samenvoegt, dan moet je, om het aantal daarvan te kennen, de afzonderlijke aantallen optellen. Samenbrengen is de context, optellen het wiskundig model dat daaraan beantwoordt.
- Als je verschillende exemplaren van eenzelfde product koopt (context), vermenigvuldig (model) je de eenheidsprijs met het aantal gekochte exemplaren.

Later bij vergelijkingen en functies zullen deze modellen verder uitgebreid worden.

G3 Vraagstukken moeten *over het hele schooljaar gespreid* aan bod komen. Het verwerven van probleemoplossende vaardigheden en de bijbehorende aanwending van heuristiek zullen maar gerealiseerd worden doorheen een proces van voortdurende aandacht. Het beperken van 'vraagstukken' tot enkele geïsoleerde lessen, en dan nog volgend op het exclusieve model 'vergelijking', is niet de aangewezen weg om dit doel te bereiken. Om regelmaat in te bouwen kunnen we bijvoorbeeld werken met een *'probleem van de week'*.

Het oplossen met behulp van een vergelijking is niet de enige oplossingsmethode bij vraagstukken. De leerlingen beschikken over ruime mogelijkheden binnen het getallenbereik en de gekende bewerkingen om een oplossing uit te werken (bijv. de regel van drieën, verhoudingstabellen). Het is maar door het *vergelijken van verschillende oplossingsstrategieën* voor eenzelfde probleem dat de efficiëntie van een bepaalde methode opvalt.

Het oplossen van vraagstukken is de gelegenheid bij uitstek om bij leerlingen *probleemoplossende vaardigheden* te ontwikkelen. Voor de aandachtspunten bij vraagstukken zie de pedagogisch-didactische wenken bij het onderdeel probleemoplossende vaardigheden - V1.

G4 Het rekenen met *procenten* zal aansluiten bij betekenisvolle situaties, bijv. winst, verlies, procentuele omvang (cf. diagrammen). Ook omschrijvingen die verwijzen naar procenten (een kwart van …, een tiende van …) worden hierbij gebruikt.

Het verband tussen procentberekeningen en *het rekenen met decimale getallen* wordt aangeleerd.

Voorbeelden

- 5 % nemen van een getal, is dat getal vermenigvuldigen met 0,05;
- een getal vermeerderen met 5 %, is dat getal vermenigvuldigen met 1,05;
- een getal verminderen met 5 %, is dat getal vermenigvuldigen met 0,95.

Naast het nemen van een procent van een getal moeten ook *omgekeerde vragen* gesteld worden: bepaal het getal waarvan een gegeven getal een gegeven procent is en bepaal welk procent een gegeven getal is van een ander getal.

G5 *Het gebruik van diagrammen en tabellen* kwam al aan bod in de basisschool. De meerwaarde van de behandeling in de eerste graad ligt in de integratie ervan in een betekenisvolle context van de *verwerking van de informatie*, die via verschillende kanalen tot de leerlingen doordringen (media, kranten, tijdschriften, televisie, reclame). Hier ligt een uitgelezen kans om realiteitsgebonden te werken en om bijvoorbeeld via probleemaanpak en vraagstukken op de actualiteit in te spelen. Zo wordt de leerlingen bijvoorbeeld inzicht bijgebracht in het gebruik en het misbruik van gegevensverwerking en grafische voorstellingen.

De leerlingen worden in de media geconfronteerd met numerieke informatie in vele vormen. De interpretatie van ‘tabellen, schema's en diagrammen’ moet ruim ingevuld worden. Leerlingen moeten bij de informatie van de tabel of het diagram een aantal (gegeven) vragen kunnen beantwoorden. Bijv. welke is de grootste waarde, de kleinste? Welke verhouding is er tussen verschillende onderdelen? Is er regelmaat? Is er sprake van groei, stijging, daling? Wanneer zal een fenomeen zijn maximum bereiken? Kan die groei verder gezet worden?

Leerlingen moeten in staat zijn *gegevens af te lezen* van de gegeven informatiebron (tabel, grafiek, diagram). Van leerlingen mag *elementair* verwacht worden dat ze getalwaarden die ze nodig hebben, bij opdrachten met een tabel, een grafiek en een staafdiagram, vlot kunnen aflezen en in hun context plaatsen.

Het verwerken van informatie komt verspreid over de verschillende leerjaren aan bod en zal zijn vervolg kennen in het onderdeel statistiek. In het eerste leerjaar worden de situaties bewust eenvoudig gehouden. De diagrammen worden in principe beperkt tot deze die *absolute frequenties* voorstellen, zoals bij staafdiagrammen (het begrip 'absolute frequentie' behoort niet tot de verwachte basisleerstof van de leerlingen). Schijfdiagrammen en strookdiagrammen komen in het tweede leerjaar expliciet aan bod. Als evenwel gewerkt wordt met realiteitsgebonden materiaal, dan kan uiteraard ook een strookdiagram of een schijfdiagram voorkomen. Dit levert geen probleem op voor het aflezen, want de leerlingen zijn al vertrouwd met schijfdiagrammen vanuit de basisschool. Het zelf voorstellen blijft behouden voor het tweede leerjaar.

Een doel is *de kracht van visueel aangeboden informatie* te laten ervaren. Confrontatie met verschillende diagrammen of schema's rond eenzelfde informatie kan aanleiding zijn tot een eerste summiere bespreking van de kwaliteit van de verwerking in de verschillende diagrammen (bijv. welke informatie biedt de ene meer dan de andere, welke belangrijke gegevens gaan verloren).

Grafieken, venndiagrammen en voorstellingen op roosters en met pijlen zijn handige wiskundige voorstellingswijzen en verhelderende analyse-instrumenten. Ook *ludieke* voorstellingen kunnen aan bod komen.

Ook *in andere schoolvakken* worden voorstellingen gehanteerd. Om eventuele prioriteiten te bepalen is het zinvol overleg te plegen met de collega's van vakken waarin informatieverwerking gebruikt wordt (bijv. aardrijkskunde, technische vakken, wetenschappelijke vakken van het tweede leerjaar).

In dit onderdeel kan gemakkelijk gewerkt worden met *ICT-toepassingen*, bijv. verwerking met *een rekenblad*. Een gezond evenwicht tussen het zelf uitvoeren en het gebruik van een rekenblad wordt nagestreefd (bijv. rekenblad als controle). Merk op dat grafische rekenmachines ook over dergelijke mogelijkheden beschikken.

Een moeilijkere stap is bij gegeven informatievoorstellingen *zelf zinvolle vragen bedenken*. Dit kan als *verdieping* aan bod komen.

G6 Het gaat om *de omkering van de vraag* die aan de basis ligt van de vorige doelstelling. Beschikkend over een rij gegevens, is de vraag hoe die het best aanschouwelijk worden voorgesteld, zodat de relevante informatie in het oog springt.

Bij *het opstellen van grafieken* wordt in de praktijk gewerkt met de voorstelling vanuit een beperkt aantal koppels cijfergegevens. Om de suggestieve kracht te versterken kunnen de overeenkomstige punten verbonden worden. Dat geeft een suggestie van een mogelijk verloop voor de tussenliggende waarden. Voorbeelden zoals de prijsevolutie van een product, een temperatuursgrafiek (koortsmeting), een groeicurve, evolutie van kijkcijfers, evolutie van verkoopcijfers ... kunnen als voorbeeld dienen om aan te geven dat dergelijke suggestie niet altijd beantwoordt aan de werkelijke evolutie.

G7 *Het rekenkundige gemiddelde en de mediaan* zijn elementen waarmee leerlingen soms op hun rapport geconfronteerd kunnen worden. Gemiddelde en mediaan zijn al aan bod gekomen in de basisschool. Een meerwaarde kan bijvoorbeeld zijn, het effect te onderzoeken van een groot aantal gegevens, of van een extreem grote of kleine waarde op het gemiddelde.

Om het inzicht te vergemakkelijken kan in een aanvangsfase gewerkt worden met een beperkt aantal gegevens.

Ook de *omgekeerde vraag* kan aan bod komen. Een gegeven dat ontbreekt in een rij gegevens kan berekend worden als het gemiddelde gegeven is.

5.2.1.4 Bewerkingen met getallen vlot en correct uitvoeren

1 Doelstellingen

G8	Bewerkingen (optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling) uitvoeren met getallen (natuurlijke, gehele en rationale getallen).	7
E	Bewerkingen uitvoeren met twee gehele getallen.	
E	In een breuk teller en noemer met een eenzelfde getal vermenigvuldigen of door eenzelfde getal delen (vereenvoudigen).	
E	Bewerkingen uitvoeren met twee rationale getallen in breukvorm met eenvoudige noemers.	
E	Rekenen met rationale getallen in decimale vorm met gebruik van een rekenmachine.	
B	Rekenen met gehele getallen, maximum vijf termen en/of factoren.	
B	Rekenen met rationale getallen in decimale vorm, maximum vijf termen en/of factoren.	
B	Rekenen met rationale getallen in breukvorm met gebruik van een rekenmachine.	
B	Rekenen met rationale getallen in breukvorm met eenvoudige noemers, maximum vijf termen en/of factoren.	
G9	Afspraken in verband met de volgorde van bewerkingen toepassen.	6
E	Afspraken in verband met de volgorde van bewerkingen toepassen bij het berekenen van een uitdrukking met maximaal twee bewerkingen (en vier getallen).	
B	Afspraken in verband met de volgorde van bewerkingen toepassen bij het berekenen van een uitdrukking met gehele en rationale getallen met maximaal vijf termen en/of factoren.	
G10	De tekenregels bij gehele en rationale getallen toepassen.	2
E	Bewerkingen uitvoeren met gehele getallen en met twee rationale getallen in breukvorm waarbij ten hoogste twee mintekens voorkomen.	
G11	Handig rekenen door gebruik te maken van het inzicht in getallen en in eigenschappen van de bewerkingen.	8
G12	Het hoofdrekenen integreren in het schatten van resultaten.	12
G13	Een rekenmachine doelgericht gebruiken.	9
G14	Het resultaat van een berekening op een verantwoorde wijze afronden.	12
G15	Delers en veelvouden van een natuurlijk getal bepalen.	5

	V	Natuurlijke getallen ontbinden in priemfactoren met beperking tot de factoren 2, 3, 5, 7 en 11.	
G16	De deelbaarheid van getal door een getal kleiner dan 10 onderzoeken.		
	V	Eigenschappen in verband met de deelbaarheid in verband met som en veelvoud verwoorden en toepassen.	
	U	De kenmerken van deelbaarheid door 2, 3, 4, 5, 9 door voorbeelden verklaren.	
G17	De grootste gemeenschappelijke deler en het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van twee of meer natuurlijke getallen berekenen.		
	E	De grootste gemeenschappelijke deler en het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van twee natuurlijke getallen bepalen door het vergelijken van rijen van delers, respectievelijk veelvouden.	
	V	De grootste gemeenschappelijke deler en het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van twee of meer natuurlijke getallen berekenen voor getallen die te ontbinden zijn met factoren 2, 3, 5, 7 en 11.	
G18	Machten met een natuurlijke exponent van een getal berekenen.		11
	E	Machten van natuurlijke en gehele getallen met een natuurlijke exponent berekenen.	
	E	Machten van rationale getallen in decimale vorm berekenen met behulp van een rekenmachine.	
	B	Machten van een rationaal getal in breukvorm berekenen.	

2 Pedagogisch-didactische wenken

De *behandeling van de bewerkingen met hun eigenschappen in de verschillende getallenverzamelingen kan geïntegreerd gebeuren.* Naast een zinvolle herhaling en verdieping van de geziene leerstof (bewerkingen met natuurlijke getallen, positieve breuken en decimale getallen) moet ernaar gestreefd worden dat vooral de 'nieuwe leerstof', m.n. de bewerkingen met de negatieve getallen (gehele getallen en breuken met negatieve teller en/of noemer), over een langere tijd gespreid kan worden. In de herhaling kunnen daarom van meet af aan alle gekende getalsoorten opgenomen worden. Dit vermijdt het effect van de breuk met het verleden. Meteen wordt een signaal gegeven dat de voorkennis uit de basisschool belangrijk is.

G8 De leerlingen kennen vanuit het basisonderwijs bewerkingen met natuurlijke getallen en positieve rationale getallen en ze kunnen die met een zekere vaardigheid toepassen. In het basisonderwijs is de keuze voor de rekenwijze (hoofdrekenen, cijferen of gebruik rekenmachine) afhankelijk van de grootte en de aard van de getallen.

Het vermenigvuldigen en delen van breuken is in het basisonderwijs maar aangezet en kan niet als definitief verworven beschouwd worden. Hieraan moet bewust verdere aandacht besteed worden, zowel wat betreft het opbouwen en verwoorden van de rekenregels, als het verwerven van rekenvaardigheid. Belangrijk is wel de oefeningen te verbinden met praktische voorbeelden, zodat de gebruikte breuken betekenisvol zijn. Deze leeromgeving zal inherent de 'moeilijkheidsgraad' van de oefeningen beperkt houden.

Het *elementaire beheersingsniveau* van deze doelstelling is dat leerlingen de bewerkingen kunnen uitvoeren met twee getallen. Zeker met negatieve getallen kan hierin een beperking gebracht worden. Ook het aantal mintekens in een uitdrukking kan in verband gebracht worden met het beheersingsniveau.

Anderzijds moet ingezien worden dat de realistische situaties die tot een dergelijke beperkte opgave leiden, relatief beperkt zijn in aantal en wiskundige omvang. Op het *basisniveau* mag toch verwacht worden dat leerlingen vlot kunnen omgaan met een beperkte ingewikkeldheid in de berekeningen! Het manuele cijferen wordt beperkt. De rekenmachine biedt hiervoor een volwaardig alternatief.

Meer ingewikkelde oefeningen behoren tot de uitbreiding en moeten niet voor alle leerlingen worden nagestreefd.

Rekenvaardigheid heeft meer te maken met vlotheid dan met complexiteit. Dit houdt in dat we de leerlingen de oefenruimte moeten bieden om die vlotheid te verwerven.

- Enerzijds betekent dat voldoende oefeningen en voldoende spreiding van de oefenkansen.
- Anderzijds betekent het dat oefeningen aangeboden worden waarin die vlotheid kan verworven worden. De grote verscheidenheid in de rekenvaardigheid van de leerlingen leidt tot een grote verscheidenheid in de aanpak.

Enkele suggesties:

- Om een zicht te krijgen op de rekenvorderingen en de rekenproblematiek wordt best een *diagnostische toets* afgenomen. Die kan leiden tot twee soorten diagnoses: *de situatie van de klas en de situatie van elke leerling*. De leraar kan op basis hiervan uitmaken welke problemen nog klassikaal aangepakt worden en voor welke problemen een individuele remediëring kan volstaan.
- Dan volgt een fase van *gerichte herhaling*, met individuele taken en klastaken, op basis van de genoemde diagnose. Dit wordt verwerkt in een normaal lestempo.
- Zoals elders al aangegeven kan de leraar ervoor opteren de inoefening *over een ruime tijd te spreiden*, bijv. elke week twee of drie korte oefenmomenten in het begin of op het einde van een les. Om goede en gerichte feedback te kunnen geven aan leerlingen verdient het aanbeveling, dit af te wisselen met enkele lessen waarin de leraar vooral de rol van observator opneemt. Daardoor kan de leraar gerichte werkinformatie geven aan de leerlingen. Kleine opdrachten voor persoonlijke verwerking kunnen als taak gegeven worden. Het *gebruik van ICT-hulpmiddelen* voor individuele training en gerichte feedback is aangewezen.
- Niet alleen de inoefening kan gespreid worden, *ook de evaluatie* wordt best gespreid. Zo kan met de leerlingen afgesproken worden dat bepaalde kennis of vaardigheden op willekeurige momenten kunnen geëvalueerd worden (bijv. parate kennis, bepaalde rekenvaardigheid, gebruik rekenmachine). Dit werkt wellicht het blijvend beheersen van de vaardigheden in de hand. Een voorwaarde is uiteraard dat leerlingen beschikken over voldoende gericht oefenmateriaal om voor zichzelf de vaardigheid te onderhouden en over zelfcontrolemiddelen om zichzelf te evalueren.

  Opmerking: het is aangewezen hierover niet alleen afspraken te maken met de leerlingen, maar ook *binnen de vakgroep wiskunde*. Dit kan leiden tot het uitwisselen of het samen ontwikkelen van aangepast materiaal.

Rekenen met breuken

Het basisonderwijs heeft vanuit de eindtermen gekozen om breuken minder uitvoerig te behandelen. *In de eerste graad moet het rekenen met breuken op een behoorlijk niveau gebracht worden.* Het is echter belangrijk precies te omschrijven wat verwacht wordt. M.a.w. welke vaardigheden moeten leerlingen beheersen?

- Belangrijk inzicht is het juist *vereenvoudigen*. Bij een product en bij het bepalen van het eindresultaat blijft vereenvoudigen belangrijk.
  Mogelijk helpt het deze operatie (telkens opnieuw) te (laten) verwoorden als “het wegdelen van de gemeenschappelijke factoren (van teller en noemer van eenzelfde breuk)”.
- Inzicht in de rekentechnieken voor optelling (en aftrekking) en vermenigvuldiging (en

deling) is van belang. (Ook later belangrijk voor het algebraïsch rekenen.)

- *Vermenigvuldigen en delen van breuken* wordt in de eerste graad best als *nieuwe* leerinhoud uitgewerkt.
- *Vaardigheid in de rekentechniek in haalbare situaties* (m.a.w. beperking van de rekenproblematiek, gebruik van beperkte noemers en haalbare ontbindingen).

  Voorbeelden
  - Eenvoudige noemers, d.w.z. noemers tot 100 en gemakkelijk ontbindbare getallen.
  - Voldoende lang oefenen met gelijknamige breuken bij optellen en aftrekken.
  - Voldoende lang oefenen op het vermenigvuldigen en delen van teller en noemer van een breuk met eenzelfde getal.
  - Optellen en aftrekken beperken tot breuken met ‘eenvoudige noemers’.
  - Vermenigvuldigingen beperken tot breuken met eenvoudige noemers en tellers.
  - Uitstellen van het gebruik van negatieve noemers.
  - De deling van een breuk door een breuk blijkt makkelijker in de vorm genoteerd met het deelteken, dan wel met de notatie met de breukstreep.
  - Verdieping van de rekenvaardigheid zit in de complexiteit van de oefeningen, bijvoorbeeld: de combinatie van rekenregels (later ook tekenregels) of in het gebruik van niet zo eenvoudige tellers en noemers.
- De kennis over breuken kan weer best nagestreefd worden in *praktische situaties*. Dat maakt de oefeningen wellicht haalbaarder en beperkter.
- In de praktijk wordt vaak met *‘benaderingen’* gewerkt (ook later in wetenschappen is dat zo, eventueel zelfs met een foutenbespreking over de graad van benadering). Wat zegt $\frac{51}{471}$ over het resultaat? Meestal worden dan decimale getallen gebruikt.

G9 Als *volgorde van de bewerkingen* wordt aangehouden:

- haakjes;
- machtsverheffing en worteltrekking;
- vermenigvuldiging en deling van links naar rechts;
- optelling en aftrekking van links naar rechts.

Onduidelijkheid wordt opgelost door het invoeren van haakjes. Bij een quotiënt laat de schrijfwijze met een breukstreep toe haakjes te vermijden.

Voor het elementair beheersingsniveau kan het aantal bewerkingen dat voorkomt in de berekening beperkt worden tot twee.

Voorbeelden

2 · (3 + 5) = …,	2 · 3 + 5 = …
18 : (6 – 3) = …,	18 : 6 – 3 = …
42 : (-14 + 8) = …,	42 : (-14) + 8 = …

Tot de *minimale verwachting* behoort het rekenen met uitdrukkingen met een minteken voor de haakjes, bijv. $7-(12-9)$. Let wel, deze moeilijkheid begint pas door te wegen in het tweede leerjaar, als er letters in de uitdrukking voorkomen, bijv. $2a-3b(4a-5b)$. In de uitdrukking in het getallenvoorbeeld kan de moeilijkheid omzeild worden door eerst de haakjes uit te werken, dus zonder dat de verbinding gelegd wordt met de distributieve eigenschap. Die komt bij lettervormen (in het tweede leerjaar) onvermijdelijk aan bod.

G10 De meest fundamentele vernieuwing bij het rekenen in het eerste leerjaar is *het gebruik van negatieve getallen*. Men kan er relatief snel mee starten, zodat een spreiding van de moeilijkheidsgraad mogelijk is. Het rekenen met deze getallen moet niet uitgesteld worden tot het tweede trimester.

Bij het rekenen met gehele getallen komen de *tekenregels* aan bod. Geleidelijk aan kan de moeilijkheidsgraad opgevoerd worden. Hierna volgt een mogelijke progressie, die wiskundig zwakkere leerlingen kan ondersteunen:

- Louter sommen met gehele getallen, er is nog geen tekenprobleem.
- Verschil van gehele getallen (twee termen), beperkt gebruik van de tekenregel.
- Sommen (en verschillen) met gehele getallen met meerdere termen.
- Producten van twee gehele getallen.
  - Eerst een natuurlijk getal maal een negatief geheel getal, waarbij de definitie van de vermenigvuldiging kan spelen.
  - Daarna een negatief geheel maal een negatief geheel met de tekenregel.
  - Pas als deze enkelvoudige regels vlot beheerst worden, komen combinaties van allerlei regels aan bod.
- Quotiënten van twee gehele getallen.
  - Het deeltal is een negatief getal.
  - De deler is een negatief getal.
- Quotiënten waarbij deeltal en deler bestaan uit producten van gehele getallen.
  - Geen negatieve getallen als deler (vergelijk met de regel van de producten).
  - Alleszins met een beperking van het aantal mintekens bij de vermenigvuldigingen en de delingen.
- Quotiënten van gehele getallen in combinatie met andere bewerkingen.

Door de moeilijkheden in de tijd te spreiden worden ze verteerbaar voor meer leerlingen. Het gevaar op het vermengen van de regels is minder groot. Door deze gespreide aanpak is er niet meer lestijd nodig om de aanbreng van de regels te verzorgen. De oefentijd wordt wel over een grotere tijdsspanne gespreid.

Bijzondere aandacht moet besteed worden aan het gebruik van de rekenmachine en software. Het ingeven van negatieve getallen moet correct gebeuren om een juist resultaat te verkrijgen.

Er is software beschikbaar die een training van deze rekenregels mogelijk maakt.

G11 De *vaardigheid in het rekenen* is belangrijk. Het gaat meer om een attitude dan om regels. Het verkrijgen van rekenvaardigheid houdt niet in dat allerlei zinloze oefeningen en trucs moeten geautomatiseerd worden. Handig rekenen gebruikt het inzicht in getallen en in bewerkingen en hun eigenschappen. (Zie ook de wenken bij vaardigheden - V2). Een misvatting is dat hoofdrekenen zonder pen en papier moet gebeuren. Tussenresultaten kunnen zo nodig genoteerd worden. Hoofdrekenen heeft te maken met het gebruik van rekenvoordelen, waardoor het resultaat snel kan berekend worden. Het staat tegenover het cijferen, waarbij een vast algoritme gebruikt wordt.

Voorbeelden

- Het gebruik van de tafels van vermenigvuldiging.
- Het splitsen van getallen in een som of verschil (in functie van nabij liggende tientallen, honderdtallen).
- Een getal kleiner dan 100 optellen bij of aftrekken van een getal kleiner dan 1000.
- Het splitsen van getallen in een product (beperkt tot drie verschillende factoren kleiner dan 10).
- Een getal van twee cijfers vermenigvuldigen met of delen door een getal van één cijfer.
- Vermenigvuldigen met (delen door) 4 door tweemaal te verdubbelen (halveren).
- Eenvoudige oefeningen op de volgorde van de bewerkingen.
- Handig rekenen met eenvoudige breuken, zoals in $\frac{3}{4}-\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}$, $3\cdot\frac{5}{6}$, $\frac{6}{5}:3$.
- Samennemen van termen (factoren) door toepassing van de commutativiteit en de as-

sociativiteit.

- Gebruik maken van de distributiviteit om met afgeronde getallen te rekenen.
- Schatten van de grootteorde van een resultaat.
- Procentrekenen.
- Rekenen met verhoudingen en met machten van 10 (bijv. procenten van machten van 10).
- De kwadraten van de eerste twintig natuurlijke getallen.

Hoofdrekenen is niet beperkt tot het rekenen met natuurlijke getallen. Dat rekenen is wel de basis voor het rekenen met breuken en kommagetallen. Naarmate het niveau van reken-vaardigheid toeneemt, worden oefeningen met breuken en decimale getallen ingebracht.

Wil het handig rekenen als zinvol ervaren worden, moet het effectief gebruikt worden bij andere leerstofonderdelen, bijv. bij het oplossen van vraagstukken of bij het toepassen op metend rekenen.

Het blijkt dat *de verscheidenheid in de vorderingen bij de leerlingen zeer groot* is. Het is belangrijk de herhaling en verbreding gericht, en dus gedifferentieerd, aan te pakken. De ene leerling zal nog moeten investeren in het verwerven of herwinnen van de basisvaardigheid, terwijl een andere leerling al vlot andere opdrachten kan verwerken.

G12 Het leren *schatten van de grootteorde van reken- en meetresultaten* is belangrijk bij het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden, zoals bijv. het opbouwen van referentiewaarden en controle-elementen (bijv. tussen welke grenzen ligt de som van twee getallen, tussen welke grenzen ligt x % van een getal).

Bij het oplossen van vraagstukken kan het schatten van de oplossing functioneel ingeschakeld worden. Zo zal schatten aanleiding geven tot het bespreken van de realiteitswaarde van de schatting (bijv. hoeveel tegels met gegeven afmeting zijn minimaal nodig om een bepaalde oppervlakte te betegelen, hoeveel kubussen met gegeven afmeting kunnen maximaal geplaatst worden in een gegeven ruimte).

Bij schattend rekenen horen specifieke strategieën. Het schatten verloopt in hoofdzaak met afgeronde getallen waardoor vlotter met hoofdrekenen kan gewerkt worden.

Enkele *schatprocedures:*

- afronden op ronde getallen (eindigend op tientallen, honderdtallen ….);
- naar boven én naar beneden afronden (geeft ook boven- en ondergrenzen voor het resultaat): $76 \cdot 87$ ligt tussen $70 \cdot 80$ en $80 \cdot 90$;
- één getal naar boven en het andere naar beneden afronden: $48 \cdot 32$ wordt benaderd door $50 \cdot 30$;
- schatten via ‘verdubbelen en halveren’ of andere uit het hoofdrekenen bekende eigenschappen.

Het schatten kan verbonden worden met meer dan het schatten van het resultaat van een bewerking. Ook *het schatten van grootteorde, lengte, oppervlakte …* kan aan bod komen bij het oplossen van problemen. Dit biedt de kans om enkele toepassingen op maatbegrip en metend rekenen in te brengen. De toetsing van de schatting aan de realiteitswaarde kan de leerlingen brengen tot een gecontroleerd schatten.

Zie ook de wenken bij rekenvaardigheden – V2.

G13 De beschikbaarheid van *een rekenmachine* heeft tot gevolg dat meer berekeningen sneller kunnen uitgevoerd worden. Het tijdrovend cijferrekenen vormt geen obstakel meer bij het effectief rekenen.

Elke leerling moet de rekenmachine *zinvol, efficiënt en kritisch leren* gebruiken. 'Zinvol en efficiënt' betekent dat het toestel gebruikt wordt voor berekeningen, die niet sneller uit het hoofd of met pen kunnen gebeuren, bijvoorbeeld bij grote getallen of getallen met veel decimalen (cf. het realistisch karakter van meetresultaten). Zo kan bij lesfasen waarin toepassingen het hoofddoel uitmaken, het denkwerk belangrijker worden dan het rekenwerk. 'Kritisch' houdt in dat de bekomen resultaten niet blindelings als correct beschouwd worden, maar dat beseft wordt dat foute manipulaties (meestal) foute uitkomsten opleveren. Het schatten van rekenresultaten is als controlemiddel belangrijk, ook bij het gebruik van een rekenmachine (bijv. fouten tegen de plaats van de komma kunnen opgevangen worden door schatting van de grootteorde).

Getallen invoeren en aflezen kan een aanleiding zijn om leerlingen te leren omgaan met niet-exacte resultaten (bijvoorbeeld: de beoordeling van het aantal cijfers dat belangrijk is, een verantwoorde afronding, het verlies aan nauwkeurigheid).

Kunnen onder meer behandeld worden:

- de vier hoofdbewerkingen (ook met rationale getallen);
- het veranderen van teken;
- de volgorde van de bewerkingen;
- het gebruik van haakjes;
- het gebruik van de geheugentoets;
- het berekenen van procenten en de toetsen voor $\frac{1}{x}$, x^2 en $\sqrt{\ }$.

G14 Bij *het afronden van resultaten* wordt rekening gehouden met de getallen zelf, hun rol eventueel verder in de berekening, de grootteorde van de gegevens en het realiteitsaspect van de situatie. (Zie ook schattend rekenen – V2.)

G15 De begrippen *deler* en *veelvoud* behoren tot de kennis vanuit het basisonderwijs. Ze kunnen van bij de aanvang gebruikt worden in oefeningen en toepassingen.

Een handige werkwijze om te komen tot een ontbinding van een getal, is deze getallen als een product te schrijven, en dat voor de factoren telkens opnieuw te hernemen.

Voorbeeld

108
9 12
3 3 3 4

Een andere werkwijze is het gegeven getal zover mogelijk te delen door de “eenvoudige” delers, eerst door 2, dan door 3, door 5 … Deze aanpak kan leiden tot de klassieke schikking voor het ontbinden van een getal in (priem)factoren.

Priemgetal

Als verdieping kan het begrip *priemgetal* aangereikt worden. Priemgetal is een nieuw begrip. Het is op zich een relatief eenvoudig begrip: een getal met precies twee natuurlijke delers (deze omschrijving komt aan bod in de basisschool, zonder evenwel de term priemgetal te hanteren). Dat 1 als een deler wordt aangezien, is voor een aantal leerlingen artificieel. Daarom is het beter te starten met het getal deelt zichzelf. Dat 1 ook een deler is, volgt daar dan relatief vlot uit.

Het is niet de bedoeling een reeks van priemgetallen op te stellen en te memoriseren. Voor het verdere rekenwerk (bijv. bij breuken) volstaat de reeks tot 20. ‘Toepassingen’ worden in functie daarvan gekozen. Wel kan het principe van de zeef van Erathostenes als oefening aan bod komen.

Vermits in het voorgaande geopteerd werd voor rekenvlotheid (bijv. voor ‘eenvoudige’ noemers bij breuken) zijn ellenlange ontbindingen van grote getallen overbodig. Bij de oefeningen wordt best gewerkt met getallen kleiner dan 1000. We kunnen ons voor het praktisch gebruik beperken tot getallen deelbaar door 2, 3, 5, 7, 11.

G16 De *deelbaarheid onderzoeken* van een getal door een ander getal is in feite een oefening op het bepalen van delers en veelvouden. Het geeft meer inzicht in het getallensysteem en mogelijk in het plaatswaardesysteem, omdat getallen op allerlei wijzen kunnen gesplitst worden in sommen en/of producten. Het gaat om het vlot combineren van getallen, hoofdrekenen en intuïtieve rekenregels. Leerlingen kunnen daarbij gebruik maken van de kenmerken van deelbaarheid die ze in de basisschool hebben geleerd.

Voor een aantal leerlingen volstaat het dat ze dergelijke oefeningen maken *in concrete voorbeelden met gebruik van de intuïtieve regels, zonder explicitering*. Voor vervolgstudies met wiskunde is een sterkere aandacht voor d*e verwoording van die regels en voor het argumenteren ervan* zinvol. De regels over de deelbaarheid van een som of een product zijn voorbeelden hiervan.

De eigenschap in verband met de som kan gebruikt worden om te onderzoeken of een getal deelbaar is door een gegeven getal.
Voorbeeld: 868 (= 700 + 140 +28) is deelbaar door 7, omdat 700, 140 en 28 deelbaar zijn door 7.

De kenmerken van deelbaarheid door 2, 3, 4, 5, 9, 25 zijn verworven in het basisonderwijs.

Het is zinvol een aanvang te maken met *de verklaring van deze eigenschappen*, door op getallenvoorbeelden te redeneren.

Voorbeeld

$$\begin{aligned} 837 &= 800 + 30 + 7 \\ &= 8 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (9 + 1) + 7 \\ &= 8 \cdot 99 + 8 + 3 \cdot 9 + 3 + 7 \\ &= (8 \cdot 11 + 3) \cdot 9 + 8 + 3 + 7 \end{aligned}$$

837 is een veelvoud van 9 plus de som van 8, 3 en 7 (de som van de cijfers).

837 zal deelbaar zijn door 9 als de som van de cijfers dat is.

Dit is een didactisch verantwoorde ondersteuning bij het leren veralgemenen.

De essentie van wat in deze doelstelling wordt aangegeven is *een eerste voorzichtige stap in het argumenteren van eigenschappen*. Omdat leerlingen het werken met letters nog niet beheersen, wordt gebruik gemaakt van getallenvoorbeelden. De redeneringen zijn weliswaar geen ‘bewijzen’ in de strikte zin van het woord. Wel zijn het verklaringen waar de leerlingen leren spelen met argumenten om een bewering of een inzicht te verantwoorden. Dit soort activiteit moet geregeld deel uitmaken van hoekenwerk. Leerlingen die hier vlot mee overweg kunnen naar een wiskundig sterkere studierichting (of basisoptie) georiënteerd worden.

G17 De begrippen *grootste gemeenschappelijke deler* en *kleinste gemeenschappelijk veelvoud* moeten verworven zijn in het basisonderwijs (voor getallen kleiner dan 100). De leerlingen kennen hiervoor een berekeningswijze, m.n. *het opschrijven van delerreeksen of veelvoudreeksen* tot een gemeenschappelijk getal gevonden wordt. Voor de meeste oefeningen met eenvoudige breuken volstaat die werkwijze.

Bij de oefeningen in de eerste graad wordt best gewerkt met getallen kleiner dan 1000. Daarbij kan hoofdrekenen ingeschakeld worden als de delers niet te groot zijn.

Waar *priemgetallen* als verdieping zijn aangeboden, kunnen die uiteraard aan bod komen bij het opzoeken van de grootste gemeenschappelijke deler en het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van twee getallen.

Toch biedt de werkwijze met priemfactoren *niet alleen een historische waarde* of een oplossingswijze voor ‘moeilijke’ getallen. Leerlingen worden hier geconfronteerd met een typisch wiskundige werkwijze, die een bepaalde situatie (de concrete oefening) “mathematiseert”, maar waarbij ook de vraag naar systematisering en veralgemening komt (voor welke gevallen geldt dit). Leerlingen kunnen hier bewust een nieuw algoritme tot stand zien komen. Dit draagt bij tot het inzicht in het wiskundig denken en handelen.

5.2.1.5 Letters gebruiken als onbekende, in veralgemeningen en in formules

1 Doelstellingen

G19	Letters gebruiken als onbekenden.	18 23
G20	In eenvoudige patronen en schema's regelmaat ontdekken en met formules beschrijven.	18 23 24
G21	Letters gebruiken als middel om te veralgemenen.	18
	B Eigenschappen noteren in lettervorm en ze verwoorden.	
	V Eigenschappen noteren in lettervorm met universele kwantor en ze verwoorden.	
G22	Vergelijkingen van de vorm $x + a = b$ en $a \cdot x = b$ met $a \in \mathbb{Q}_0$ en $b \in \mathbb{Q}$ oplossen.	21
G23	Vraagstukken oplossen die leiden tot een vergelijking van de vormen $x + a = b$ en $a \cdot x = b$.	22
	B Een grootheid berekenen uit een gegeven formule, door de waarden van de andere grootheden eerst in te vullen en dan de vergelijking op te lossen.	
	V Een formule omvormen door ze op te lossen naar een veranderlijke.	

2 Pedagogisch-didactische wenken

De invoering van *letters om getallen voor te stellen* is een belangrijke stap geweest in de geschiedenis van de wiskunde. Ook voor leerlingen is die stap niet vanzelfsprekend.

Leerlingen moeten duidelijk inzicht krijgen in de verschillende situaties waarin letters gebruikt worden, dankzij een zorgvuldig opgebouwd leerproces. In een formule zoals $a + b = b + a$ kan elke letter door *elk getal* vervangen worden. In de vergelijking $x + 7 = 20$ stelt de letter *een nog onbekend getal* voor. In de formule van de oppervlakte van een rechthoek stellen de letters de maatgetallen voor *van te bepalen* grootheden. De uitdrukking $2n - 1$ is de *n-de term* in de rij van oneven getallen, als n een natuurlijk getal voorstelt. Heel wat moeilijkheden met algebraïsch rekenen gaan terug op een onvoldoende inzicht in het gebruik van letters. Daarom moet voor de beginfase voldoende tijd uitgetrokken worden. (Zo zal $3a + 2a = 5a$ in deze aanvangsfase functioneren als consequente toepassing van de distributieve eigenschap, waarbij *de letter a plaatshouder* is voor een getal, en nog niet als prematuur letterrekenen dat pas in het tweede leerjaar aan bod komt.) Het is niet nodig hierover 'theorie' te geven. De leerlingen moeten wel de verschillende situaties ervaren in vele oefeningen.

G19 Leerlingen van de basisschool zijn vertrouwd met oefeningen zoals: “Ik denk aan een getal. Tel ik er 12 bij, dan bekom ik 15. Welk is het oorspronkelijke getal?” De meeste leerlingen berekenen spontaan de oplossing met 15 – 12. Ze beseffen niet dat ze een vergelijking hebben opgelost. In feite lossen ze op: $... + 12 = 15$, een zogenaamde puntoefening. Een verder ‘gemathematiseerde vorm’ van deze ‘spontane’ werkwijze is de vergelijking $x + 12 = 15$.

Deze *verdere mathematisering* is nodig, omdat spontane werkwijzen niet zullen werken bij meer complexe situaties. Werken met lege plaatsen zoals in puntoefeningen zal niet lukken bij hogere machten van de onbekende. Deze eenvoudige situatie biedt weer de gelegenheid om leerlingen te laten inzien hoe in de wiskunde te werk gegaan wordt.

De *onbekende x* verschijnt als een soort *plaatshouder* voor het voorlopig onbekende getal dat de oplossing is. Dit laat toe om met de onbekende te rekenen alsof het een getal is. In de aanvangsfase staat de letter voor een welbepaald getal dat ‘gezocht’ wordt. Verderop in de hogere jaren zal de letter in het algemeen ‘alle’ waarden kunnen aannemen, waardoor het begrip veranderlijke ontstaat dat de basis is voor de functieleer en de analyse.

G20 *In eenvoudige patronen en schema’s regelmaat ontdekken en met formules beschrijven* is een belangrijke doelstelling omwille van de vele mogelijkheden om leerlingen (vanuit een vaak visuele situatie) te leren veralgemenen, een (woord)formule te ontdekken en met deze formule verder te werken.

Getallenrijen en patronen worden onderzocht op hun mogelijke regelmaat. Waar die rij gevonden is, wordt ze in een eerste fase verdergezet. Dan wordt, zo mogelijk, het n-de element uit de rij voorgesteld door een formule. *Voorbeelden* zijn de driehoeksgetallen, vierkantsgetallen, de rij van Fibonacci, de som van de eerste n getallen, maar ook het verband tussen twee kolommen uit een tabel (bijv. oppervlakte rechthoek bij constante breedte en veranderlijke lengte), het aantal figuren in een rij (bijv. stenen in een muur of tegels van een vloer) of voorbeelden uit de realiteit (bijv. prijs van het elektriciteitsverbruik) kunnen uitgewerkt worden. Het voorgestelde verband hoeft niet noodzakelijk lineair te zijn.

Toepassingen verlopen meestal *vanuit eenzelfde stramien*.

- Leerlingen krijgen de eerste vier elementen van een rij, ze gaan op zoek naar minimum twee volgende elementen.
- Een tabel kan ondersteunen om een patroon te ontdekken en dit uit te drukken in een (woord)formule.
- Vervolgens worden vragen gesteld waarbij een willekeurig element uit de rij kan berekend worden vanuit de formule of omgekeerd, wordt een element uit de rij gegeven en wordt er gevraagd het hoeveelste element uit de rij gegeven is.
- Er kan gevraagd worden of een bepaald getal in een gegeven rij zal voorkomen. Dat kan leiden tot een vergelijking.

Daar er zowel vanuit heel eenvoudige als met meer complex opgebouwde rijen en formules kan gewerkt worden, biedt deze doelstelling vele mogelijkheden voor verwerking op een verschillend niveau naargelang de mogelijkheden van de leerlingen.

G21 ‘*Veralgemeningen’ van verbanden* komen veel voor in de wiskunde. Elke letterformule is in feite een veralgemening van een vastgesteld verband. Veralgemening wil zeggen dat het verband ‘algemeen’ geldig is, er zijn heel wat voorbeelden te geven. Ook leerlingen kunnen nieuwe voorbeelden aanreiken.

Bij de voorgaande doelstelling is er een vastgesteld verband in een patroon of een schema dat veralgemeend wordt weergegeven in *een ‘formule’*. We beschrijven hier nog twee andere vormen: de veralgemening van verbanden tussen grootheden en de veralgemening van verbanden tussen getallen die in definities en eigenschappen worden vastgelegd.

- Eigenschappen en soms definities in de getallenleer beschrijven verbanden die bij bewerkingen met getallen optreden, bijv. de commutatieve eigenschappen, de definitie bij machten …

  In een eerste fase is een beperking tot *de lettervorm zelf zinvol* (bijv. a + b = b + a). Daarbij stellen de letters willekeurige getallen voor. Voldoende voorbeelden moeten onderbouwen dat de letters voor ‘willekeurige’ getallen staan. Hier ligt een schat aan oefeningen op het berekenen van ‘getalwaarden’. Een stap die nodig is om leerlingen de betekenis van ‘veralgemening’ te laten inzien.

  Bijzondere aandacht verdient *het verwoorden van eigenschappen*. Uit ervaring blijkt dat het telkens in woorden formuleren van de betekenis van eigenschappen, het begrijpen ervan meer ondersteunt, dan het louter memoriseren van de formulevorm. Bijvoorbeeld:

"het product van een getal met een som is de som van …".

Voor sommige formules zal blijken dat niet zomaar alle getallen kunnen gebruikt worden (bijv. delen door nul), dus dat er voor bepaalde formules toch *begrenzingen* zijn. Dat is uiteraard de geschikte gelegenheid om de begrenzing in de formele schrijfwijze van de eigenschap in te brengen. In de klasrealiteit is vast te stellen dat niet alle leerlingen de notaties met een kwantor vlot aankunnen. Daarom worden ze als *verdieping* opgenomen.

- Formules kunnen gebruikt worden om *verbanden tussen grootheden* weer te geven.

  In deze contextgerichte situaties zal *het aantal gebruikte letters relatief beperkt* zijn. Bij het veralgemenen van relaties tussen grootheden is in een eerste fase een beperking tot de recht evenredigheid en de omgekeerd evenredigheid aangewezen. Precies deze begrippen spelen een grote rol in toepassingen uit de leefwereld. Recht evenredige grootheden worden al gehanteerd in de basisschool en kunnen intuïtief blijven aan bod komen. Eenvoudige vormen van omgekeerde evenredigheid kunnen in oefeningen al voorkomen. Let wel, een grondige behandeling van deze onderwerpen is voorzien in het tweede leerjaar.

  Het is aan te bevelen zeker in de eerste graad (en dus ook in het tweede leerjaar, zie o.m. voorbeelden) formules te gebruiken, waarbij de leerlingen de betekenis van de grootheden kennen. Met andere woorden we gebruiken formules die voorkomen in zinvolle contexten.

  Voorbeelden

  - oppervlakten, inhouden;
  - verbanden uit wetenschappen: verband tussen temperatuurschalen, eenparige beweging, afstand, snelheid;
  - relaties vanuit maatschappelijke of economische context: aantallen, inkomsten, uitgaven, interest, kosten gsm-gebruik, kosten treinkaartje en verband met het aantal afgelegde kilometer, huurkosten met vast recht en verband met verbruik;
  - technische relaties: het volume van een buis, van een doos van verpakkingsmateriaal in functie van de vorm (dikte), de massa van een metalen voorwerp in functie van het soort metaal, de draaisnelheid van een rad in een schakeling in functie van het aantal tanden op elk rad (cf. fiets).

G22 Uit eenvoudige vraagjes (vraagstukken) waarin *de onbekende* (grootheid) als een letter wordt voorgesteld, volgt een formulering van de situatie *met behulp van een vergelijking*.

Voorbeelden

- Je telt 37 op bij een getal en vindt 135. Welk is dat getal?
- De formule voor de omtrek van een cirkel $2\pi r$. Welk is de straal van een cirkel met omtrek gelijk aan 20 m?
- Mijn krant kost per dag € 0,95. Een jaarabonnement voor die krant (gemiddeld 312 kranten) kost € 229.

  Wat kost een krant per dag bij een abonnement? Welke besparing maak ik per dag als ik me abonneer? Per jaar? Welk percentage korting krijg ik daarmee?
- Een benzinetank van een auto kan maximaal 58 liter brandstof bevatten. De auto heeft sinds de laatste tankbeurt 566 kilometer gereden. De benzinemeter duidt aan dat de tank voor drie achtste gevuld is.

  Hoeveel brandstof is er nog in de tank? Hoeveel liter benzine is er al verbruikt sinds de tankbeurt? Hoe groot is het verbruik per kilometer? Hoe groot is het verbruik per honderd kilometer?

De vergelijkingen blijven bewust eenvoudig. Het gaat veeleer om de verwerving van de basisinzichten en -technieken (begrippen onbekende, vergelijking, oplossing, overbrenging van een term, overbrenging van een factor), dan wel om het oplossen van ingewikkelde vormen. In het tweede jaar komen de meer ingewikkelde vormen voldoende aan bod.

Het inbrengen van deze beperkte vormen van vergelijkingen in het eerste leerjaar heeft tot doel de tijd die aan vergelijkingen kan besteed worden te verruimen. Daardoor krijgt de trapsgewijze aanpak, die mogelijk meer garantie biedt op een degelijke verwerking, meer kansen op slagen. Deze optie gaat er vanuit *dat werken over een langere tijd met de enkelvoudige rekenregels meer resultaat zal opleveren,* dan een te snelle koppeling van de moeilijkheden. Leraren die meteen de samengestelde vormen invoegen, ondergraven mogelijk de voordelen van deze aanpak. In die zin is het aangewezen zich tot de aangegeven eenvoudige vormen te beperken.

Het is belangrijk voldoende tijd uit te trekken voor *het proces van mathematisering*, m.n. op welke wijze worden gegeven situaties en gegeven opgaven vertaald naar een vergelijkingsvorm? Dat verdient de voorkeur op het oplossen van meer ingewikkelde vormen van vergelijkingen. Precies een veelheid aan relatief eenvoudige haalbare problemen moet leerlingen er toe brengen deze drempel te overschrijden. *Bij deze eenvoudige doelstelling op het vlak van algebra hoort een heel wat moeilijker te realiseren doelstelling over het mathematiseren.* Leerlingen kunnen ervaren dat ze vanuit een redelijk intuïtief werken in de basisschool nu over een veel doeltreffender middel gaan beschikken om problemen onder wiskunde te brengen. Deze doelstelling kan dus niet losgekoppeld worden van doelstelling 23 over vraagstukken.

G23 Het werken aan *problemen en vraagstukken* wordt elders in het leerplan ruimer toegelicht. (Zie probleemoplossende vaardigheden - V1). Hier komen de vraagstukken ter sprake die opgelost worden met een vergelijking.

Er stellen zich twee problemen. De typevergelijkingen waarover de leerlingen beschikken, zijn zeer eenvoudig. Vanuit het onderdeel vergelijkingen is dat een bewuste keuze (zie G22). Bij vergelijkingen kan gewerkt worden *in deelstapjes,* die telkens te herleiden zijn tot een dergelijke enkelvoudige vergelijking (zie de voorbeelden bij G22). De leerlingen krijgen inzicht in wat er in het oplossingsproces gebeurt.

Leerlingen kunnen bepaalde vraagstukken oplossen zonder vergelijking. Ze deden dat al in de basisschool. Deze 'intuïtievere' aanpak mag behouden blijven. Daartegenover staat dat *de intuïtieve weg moeilijker uitbreidbaar is* naar complexere probleemsituaties. Vandaar dat het zinvol is de impact van het oplossen met vergelijkingen te tonen. Eens die weg inzichtelijk begrepen is, verloopt het oplossingsproces achteraf sneller.

Anderzijds toont de praktijk aan dat de voorraad vraagstukjes in verband met deze enkelvoudige vormen relatief snel uitgeput is. Leerlingen of klasgroepen, die al relatief vlot kunnen omgaan met de enkelvoudige vormen, kunnen de stap zetten naar samengestelde vormen om die leerlingen nog uitdaging te bieden. Het is in het eerste leerjaar evenwel geen streefdoel voor alle leerlingen.

Toch bevelen we hier andere mogelijkheden aan om *die uitdaging* aan te reiken. Precies de vraagstukken en problemen die niet noodzakelijk tot een vergelijking leiden, kunnen hier nog een ruime keuze bieden. Zoals bij G22 al aangegeven is de werkomgeving van vraagstukken de ideale plaats om het mathematiseren te introduceren. Het valt aan te bevelen *het mathematiseren als specifiek doel* te nemen. Het antwoord op de vraag is dan niet het berekende resultaat, hoewel leerlingen dat uiteraard ook moeten kunnen, maar wel de vergelijking, de formule, het plan waarmee het probleem kan aangepakt worden. Zo brengen we leerlingen een beetje af van dat onmiddellijk willen rekenen, en confronteren we hen met de werkelijke doelstellingen van wiskunde, m.n. met wiskunde beschrijven, met redeneringen onderbouwen, oplossingsmethoden verwerven.

In dit kader van vraagstukken met vergelijkingen past *het werken met formules*. Voor het leren werken met formules, wordt uitgegaan van situaties die beschreven worden met behulp van een woordformule, waarbij leerlingen vraagjes beantwoorden. Geleidelijk aan kan de stap gezet worden naar een formule met letters die verwijzen naar onbekenden of veranderlijken.

Het heeft zeker geen zin leerlingen eenzelfde formule in verschillende vormen te laten memoriseren. Bijvoorbeeld voor I = k.i.t (t is de tijd in jaar), kan je telkens als drie grootheden gegeven zijn de vierde berekenen.

De eenvoudigste weg voor leerlingen om formules om te rekenen bestaat uit twee stappen: het invullen van de bekende grootheden in de formule en daarna het oplossen van de vergelijking (zo mogelijk).

Het *omvormen door gebruik te maken van letterrekenen (cf. vergelijkingen)* is voor een aantal leerlingen een heel wat moeilijkere stap, ook al komt de rekentechnische werkwijze op hetzelfde neer. Daarom is dit niet voor alle leerlingen haalbaar.

Het is zinvol om de aanbreng van de werkwijze (met invullen van de gekende grootheden) in één bepaalde leereenheid te voorzien. Vaardigheid verwerven leerlingen niet op korte tijd. Daarom is een over het jaar gespreide oefentijd noodzakelijk. De leraar zal geregeld enkele oefeningen hierop aanbieden. Daarbij is het zinvol om het gebruik van formules te koppelen aan het gebruik van grafieken, diagrammen en tabellen. Geïsoleerde oefeningen zonder context hebben weinig effect.

5.2.1.6 De samenhang tussen getallen en getallenvoorstellingen verwoorden en gebruiken

1 Doelstellingen

G24	Getallen ordenen en voorstellen op een getallenas.	10 14
G25	De relatieve waarde van een cijfer in de decimale vorm van een rationaal getal aangeven.	4
	U In concrete, eenvoudige situaties de voorstelling van een getal in binaire en /of hexadecimale schrijfwijze begrijpen en verwoorden.	
	U De ontwikkeling van het plaatswaardesysteem illustreren met voorbeelden uit de geschiedenis of uit andere culturen.	
G26	Een breukvorm van een rationaal getal omzetten in de decimale vorm.	4
	E De grootteorde bepalen van eenvoudige breukvormen door de begrenzing ervan te geven tot op twee decimalen. Eenvoudige breuken zijn breuken met tellers en noemers kleiner dan twintig of noemers die een snelle factorisering toelaten met een beperkt aantal factoren.	
	B De periode bepalen van een decimale vorm, als de periode maximaal twee cijfers telt en als de decimale ontwikkeling wordt bepaald met behulp van een rekenmachine.	
	U Het begrip periode van een decimale vorm verklaren.	
G27	Rationale getallen met een begrensde decimale vorm in breukvorm schrijven.	4
	E Een decimaal getal met maximaal twee decimalen omzetten in breukvorm.	
	B Een decimaal getal omzetten in breukvorm.	
	U De breukvorm bepalen van een repeterende decimale vorm.	
G28	Het verband tussen aftrekken en optellen en tussen delen en vermenigvuldigen verwoorden.	15
G29	De absolute waarde, het tegengestelde en het omgekeerde van een getal bepalen.	5
	V De rol van 0 en 1 bij de bewerkingen verwoorden.	
G30	De betekenis van de commutativiteit en de associativiteit van de optelling en de vermenigvuldiging correct verwoorden.	3 8

	E	De eigenschappen van de commutativiteit en de associativiteit van een bewerking (de optelling/de vermenigvuldiging) met rationale getallen verwoorden als 'van plaats wisselen', respectievelijk 'schakelen'.	
	B	De eigenschappen van de commutativiteit en de associativiteit van een bewerking met rationale getallen verwoorden met behulp van letterformules.	
	V	De eigenschappen van de commutativiteit en de associativiteit van een bewerking met rationale getallen verwoorden met behulp van letterformules en de universele kwantor.	
G31	De betekenis van de distributiviteit van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling correct verwoorden.		3 8
	E	De eigenschap van de distributiviteit van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling bij rationale getallen verwoorden als 'verdelen'.	
	B	De eigenschap van de distributiviteit van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling bij rationale getallen verwoorden met behulp van een letterformule.	
	V	De eigenschap van de distributiviteit van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling bij rationale getallen verwoorden met behulp van een letterformule en de universele kwantor.	

2 Pedagogisch-didactische wenken

G24 De betekenis van onechte breuken en van gemengde getallen, als de som van een geheel getal en een echte breuk, kan op een getallenas verduidelijkt worden.

G25 De essentie van de doelstelling is dat de leerlingen binnen het decimale talstelsel *de rang van een cijfer correct benoemen*, en in de praktijk (bijv. in rekenalgoritmen) de afspraken over goede ordening enz. respecteren (wat bij de tientallen hoort, komt op die rang; wat bij de tienden hoort, komt op die rang; de komma wordt bij het cijferen correct geplaatst).

Een stap verder is dat de leerlingen de betekenis van de rang van de cijfers kunnen verwoorden (wat betekent het dat een cijfer op de rang van de honderdtallen staat; als de som van de cijfers van een bepaalde rang 13 is, dan schrijven we niet dertien op die rang, maar wel een 3 en tellen 1 bij de volgende rang, waarom?).

Als motivering voor het inzicht kan een korte *historische situering* gegeven worden of kan het gebruik van getalsymbolen (cijfers) in andere culturen geïllustreerd worden.

Over getalsystemen kunnen vele randinzichten gegeven worden. Dat kan als *uitbreiding*. Het inzicht in het decimaal talstelsel kan dermate ontwikkeld worden dat een transfer naar een ander talstelsel vlot kan verlopen. Het gebruik van andere talstelsels (bijv. het binair en het hexadecimaal stelsel) komt aan bod in technologische opvoeding. In de wiskunde blijft het gebruik ervan beperkt. Daarom is dit geen basisdoelstelling.

G26 Bij eenvoudige decimale vormen kan *de periode* vastgesteld worden.

Een grondiger inzicht in het al of niet repeterend zijn van de decimale vorm is geen basisdoelstelling (cf. resten bij deling keren met een zekere regelmaat terug). Het kan als *uitbreiding* aan bod komen in een gedifferentieerde aanpak.

G27 Als basisleerstof wordt voorzien het omvormen van een decimaal getal in breukvorm. Dat wil zeggen getallen zoals: 12,75; 34,526; 0,4 (dus getallen te schrijven als tiendelige breuken).

Omzetting van het decimaal gedeelte is hier beperkt tot de betekenis van het positiestelsel: 0,4 is $\frac{4}{10}$, na vereenvoudiging $\frac{2}{5}$; in 12,75 wijst 0,75 op $\frac{75}{100}$ (= $\frac{3}{4}$) of 12,75 = 12 + $\frac{3}{4}$ = $\frac{51}{4}$.

M.a.w. er wordt gewerkt met noemers die een macht van tien zijn.

Voor het *elementaire beheersingsniveau* is een beperking tot twee decimalen zinvol. Bij het basisniveau kunnen meer decimalen aan bod komen.

De omzetting van een repeterende decimale vorm naar zijn breukvorm is geen basisdoelstelling. Deze omzetting moet dus niet voor alle leerlingen bereikt worden.

G29 In de *verdieping* kan *de rol van 0 en 1* besproken worden. Hierbij gaat het vooral om het inzicht dat de som van een getal met zijn tegengestelde 0 is, en het product van een getal en zijn omgekeerde 1 is. Het gebruik van deze eigenschap kan op concrete voorbeelden geïllustreerd worden bij het oplossen van vergelijkingen (overbrengingsregels).

De term neutraal element zou kunnen gebruikt worden, zij het dat deze in de huidige omstandigheden weinig betekenis krijgt bij de leerlingen. De term opslorpend element hoeft niet vermeld te worden.

G30
G31 De doelstellingen worden geformuleerd in termen van *het verwoorden van de betekenis van de eigenschappen.* Dat betekent concreet, dat leerlingen bij een begrip als commutativiteit moeten weten dat ze bij een som van getallen geen belang moeten hechten aan de volgorde waarin ze de getallen neerschrijven in de som (en de bewerking uitvoeren). Daartegenover moeten ze wel beseffen dat bij het neerschrijven van een verschil van getallen de volgorde wel belangrijk is. Het is zinvol bij het gebruik van de eigenschap de bewerking te vermelden.

De distributiviteit kan geïllustreerd worden met behulp van de oppervlakte van rechthoeken. De eigenschap kan in twee richtingen toegepast worden (enerzijds een som vermenigvuldigen met een factor en anderzijds een gemeenschappelijke factor in een som afzonderen).

Het leerplan van de basisschool vermeldt dat leerlingen in toepassingen op het rekenen kennismaken met deze eigenschappen onder de namen ‘van plaats wisselen’ voor commutativiteit, ‘schakelen’ voor associativiteit en ‘splitsen en verdelen’ voor distributiviteit. Dit zijn echter geen evidente eigenschappen voor leerlingen die nog niet over lettervormen beschikken. Ze zullen bijvoorbeeld in een som twee termen van plaats wisselen, zonder stil te staan bij ‘ik heb een eigenschap toegepast’. Een degelijke herhaling is aangewezen. Het belang van deze eigenschappen kan bij het hoofdrekenen geïllustreerd worden.

Vermits de leerlingen rekengewoonten hebben, met een stilzwijgend gebruik van de eigenschappen, is het zinvol hiermee een tijdlang op die wijze verder te gaan. De *formalisering van de eigenschappen* kan aangepakt worden als de getallenverzamelingen en de bewerkingen voldoende ingeoefend zijn. Dan kan er ruimte gemaakt worden voor de specifieke doelstelling van het formaliseren. Concreet betekent dit dat kan gewacht worden tot de leerlingen vlot kunnen rekenen met rationale getallen.

Voor de symbolische schrijfwijze wordt in eerste instantie gewerkt met de kale uitdrukkingen:

- commutativiteit, bijvoorbeeld: $a + b = b + a$
- associativiteit, bijvoorbeeld: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- distributiviteit, bijvoorbeeld: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Deze uitdrukkingen worden voldoende *geconcretiseerd met getallenvoorbeelden*. De letters a, b en c functioneren als plaatshouders. Dat maakt de betekenis van de eigenschappen duidelijker. Dat leidt uiteindelijk tot de vraag welke getallen ingevuld mogen worden bij de plaatshouders. Daaruit volgt de vaststelling dat a, b en c mogen vervangen worden door een willekeurig rationaal getal (en daardoor dus ook door een geheel getal of door een natuurlijk getal). Voor de meeste leerlingen volstaat wellicht dit inzicht.

Voor een aantal leerlingen kan bij wijze van *verdieping* bij deze formalisering nog de universele kwantor gevoegd worden. De vlotheid waarmee leerlingen omgaan met de formalisering van wiskundetaal is een van de elementen die bij de oriëntering kan meespelen.

5.2.1.7 Wiskundige taal en terminologie begrijpen en correct gebruiken

1 *Doelstellingen*

G32	Gekende wiskundige symbolen correct gebruiken en verwoorden.		
	V	De symbolen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ gebruiken als verkorte notatie voor de bedoelde verzamelingen.	
	V	De betekenis van de uitdrukking 'voor alle' uitleggen en het symbool $\forall$ gebruiken als verkorte schrijfwijze.	
G33	De symbolen =, ≠, ≤, ≥, <, > correct gebruiken en verwoorden.		10
G34	Terminologie in verband met absolute waarde, tegengestelde en omgekeerde van een getal correct gebruiken.		5
G35	Terminologie in verband met bewerkingen met getallen correct gebruiken: - optelling, som, term; - aftrekking, verschil; - vermenigvuldiging, product, factor; - deling, quotiënt, deeltal, deler, rest.		5
	V	Terminologie correct gebruiken: - priemgetal.	
G36	Terminologie in verband met de machtsverheffing correct gebruiken: - macht, grondtal, exponent; - kwadraat, vierkantswortel.		5

2 *Pedagogisch-didactische wenken*

G32 In het secundair onderwijs moet de leerling de meer *formele taal van de wiskunde* verwerven. Dat zal voor verschillende leerlingengroepen verschillend zijn. Niet alle leerlingen moeten de wiskundetaal in dezelfde mate verwerven. *Voor een aantal leerlingen zal een 'intuïtiever' taalniveau volstaan.* Maatschappelijk doel is dat ze de 'wiskunde' begrijpen, die gebruikt wordt in het concrete leven en in praktische of technische situaties eigen aan hun beroep. Voor andere leerlingen is een hoger begrip van de vaktaal wiskunde onontbeerlijk voor hun vervolgstudies. Daaraan moet al in de eerste graad aandacht besteed worden. Hieruit volgt dat het verwerken en verwerven van de wiskundetaal moet verlopen doorheen een gedifferentieerde aanpak. De mate waarin leerlingen dit 'taalproces' verwerken is een element dat kan ingebracht worden bij de oriëntering.

Dit proces verloopt best zeer geleidelijk. Er mag geen 'taalkloof' bestaan tussen de basisschool en de eerste graad. Toch is het belangrijk aandacht te besteden aan *een precies taalgebruik* als dat nodig is, bijv. bij definities en eigenschappen (zie onderdeel taalvaardigheden – V4). De eerste graad is in dit proces een belangrijk stadium. *Vanuit de eerder intuïtieve taal die gehanteerd wordt in de basisschool, wordt in de eerste graad voor een reeks begrippen het formelere gebruik (omschrijving, lettergebruik, symbolen) ingevoerd.* En vermits niet alle leerlingen in dit proces tegelijkertijd de overstap maken, is een geleidelijk proces noodzakelijk, waarin nog veel verwoord wordt vanuit het intuïtieve naar het formele.

Een stap in dat proces is *het gebruik van symbolen*. Symbolen zijn vaak in een letter of teken samengebalde kennis. Het zijn overeengekomen *afkortingen* voor een begrip of een verband. Belangrijk is ze dan ook te hanteren binnen die overeenkomst om ze de correcte betekenis te geven. Vandaar dat in de eerste graad terecht aandacht moet besteed worden aan een correct gebruik van symbolen, maar tevens aan de correcte verwoording ervan.

Het *gebruik van specifieke symbolen*, zoals *kwantoren*, heeft maar zin als de leerlingen er de betekenis van kunnen verwoorden. Het past in het verwerven van wiskundige taalvaardigheid en hoeft in geen geval te leiden tot afzonderlijke inoefening. Een aantal leerlingen zal na de eerste graad doorstromen in studierichtingen met een beperkt wiskundig profiel. Daarin zal het gebruik van dergelijke symbolen beperkt zijn. Het heeft dan weinig zin voor deze leerlingen daaraan tijd te besteden. Die kan beter gebruikt worden om andere vaardigheden zoals rekenvaardigheid, probleemoplossende vaardigheid en vlotte taalvaardigheid bij te brengen.

G33 Aandacht moet besteed worden aan de correcte en vlotte leeswijze (o.m. '≤' als 'kleiner dan of gelijk aan', '<' als 'kleiner dan').

De leerlingen hebben tot nu toe gewerkt met welbepaalde getallen in een welbepaalde context. Vandaar dat ze meer vertrouwd zijn met enerzijds het *ofwel gelijk ofwel ongelijk zijn* van getallen, of anderzijds *het ofwel groter zijn dan ofwel kleiner zijn dan*. Het heeft weinig betekenis in die situaties te spreken van 'twaalf is kleiner dan of gelijk aan dertien'. Bij vele leerlingen stoort het vraagje 'kan twaalf dan gelijk zijn aan dertien?' om een goede begripsvorming over de ordening van getallen te realiseren. Dergelijke uitdrukkingen worden best vermeden.

Nochtans zijn de *ongelijkheden van de vorm ≤ en ≥* belangrijk in de wiskunde. Het betreft uitdrukkingen zoals 'alle natuurlijke getallen kleiner dan of gelijk aan 10', (soms vertaald tot 'getallen tot en met tien') of zoals bij getalspelletjes: 'kies een getal kleiner dan of gelijk aan 100'. Bij de natuurlijke getallen zou je het eerste probleem nog kunnen ondervangen door de uitdrukking "kleiner dan 11". Maar bij rationale en later reële getallen lukt dat niet meer.

Meteen is duidelijk dat deze ongelijkheden te maken hebben met een veranderlijkheid in een van de leden van de ongelijkheid en met een open invulling ervan door verschillende getallen. Hier komt het begrip *plaatshouder, veranderlijke of onbekende* te voorschijn (wiskundige vorm $x \leq 10$). Het is goed deze vorm van ongelijkheid dan maar aan bod te brengen, als het begrip plaatshouder en/of veranderlijke beschikbaar is, dus als een eerste letterbegrip zich gevormd heeft. De uitdrukking kan dan op natuurlijke wijze aangebracht worden als wiskundige vertolking (mathematisering) van zinnetjes als 'alle getallen kleiner dan of gelijk aan …'

Uit de basisschool brengen leerlingen allerlei leeswijzen mee, bijv. 'meer dan', 'minder dan'. Dit zijn correcte leeswijzen. Maar in het kader van een harmonisering kunnen leerlingen vertrouwd worden met de meer gebruikelijke leeswijzen. Meteen worden ze geconfronteerd met een belangrijk aspect van de wiskundetaal. Net als elke taal houdt ze een aantal conventies of afspraken in die noodzakelijk zijn om elkaar te begrijpen.

G35 Het onderscheiden van *bewerkingen en hun resultaat, van termen en factoren*, moet de aandacht van leerlingen vestigen op het belang van een correct wiskundig taalgebruik.

Ook de begrippen opgaande deling en niet-opgaande deling worden als basisleerstof ingevoerd. Bij de deling moeten de leerlingen een correcte schrijfwijze hanteren, waarbij vaak voorkomende fouten, zoals bijv. linkerlid 'D:d' gelijk aan rechterlid 'q+r', vermeden worden.

G36 Het begrip 'vierkantswortel' moet maar beperkt ingevoerd worden. Het komt aan bod bij de reële getallen in de tweede graad. Het is hier hoofdzakelijk de bedoeling geen formuleringsproblemen te hebben bij het praktisch rekenen, onder meer in de meetkunde (cf. oppervlakte, zijde). Een beperking tot de vierkantswortel uit enkele kwadraten van natuurlijke getallen volstaat (bijv. maximum tot 225 of 15^2).

In ieder geval wordt er in de eerste graad nog niet gerekend met vierkantswortels. Lettergebruik bij vierkantwortels komt pas in de tweede graad aan bod.

5.2.2 Tweede leerjaar

5.2.2.1 Algemene doelstellingen getallenleer

1 *Relaties tussen getallen en bewerkingen met getallen betekenisvol gebruiken bij het oplossen van problemen.*

2 *Bewerkingen met getallen vlot en correct uitvoeren.*

3 *Rekenen met lettervormen en formules; vergelijkingen oplossen.*

4 *De samenhang tussen getallen en getallenvoorstellingen verwoorden en gebruiken.*

5 *Wiskundige terminologie begrijpen en correct gebruiken.*

6 *Beweringen argumenteren.*

5.2.2.2 Beginsituatie in verband met getallenleer na het eerste leerjaar

De theoretische beginsituatie in het tweede leerjaar komt overeen met wat in het eerste leerjaar aan doelstellingen moet gerealiseerd worden. De praktijk toont dat dit heel verschillend kan zijn voor verschillende leerlingen. Het is daarom zinvol in het begin van het schooljaar een diagnostische toets te houden over de effectieve kennis en vaardigheden.

Diagnostisch toetsen kan in een eerste luik best met enkele ‘eenvoudige’ oefeningen, waarin snel kan vastgesteld worden of de kennis en vaardigheid aanwezig is (inspiratie kan gevonden in de beheersingsniveaus). Toch mag een diagnostische toets niet beperkt blijven tot kaal rekenwerk. Ook eenvoudige vraagstukjes moeten hierin aan bod komen. Het toepassen op complexer niveau kan dan een tweede luik van de toets zijn. Hierin kan aandacht besteed worden aan terminologie en formele kennis van eigenschappen. Diagnostische toetsen kunnen ook gericht worden op een bepaald onderdeel of op de voorkennis voor de lessen die er op volgen.

Op de toets volgt dan een gerichte, individuele ondersteuning, eventueel een gedifferentieerde aanpak in de klas. In het tweede leerjaar moeten klassikale remediëringslessen een uitzondering zijn. In zwakwiskundige groepen kunnen eventueel vooraf enkele herhalingsoefeningen verwerkt worden.

Een controlelijst:

- *In welke mate beheerst de leerling de vier hoofdbewerkingen met rationale getallen?*
  Met een onderscheid tussen:
  - de bewerkingen met gehele getallen;
  - de bewerkingen met breuken;
  - de bewerkingen met decimale getallen.
- *In welke mate beheerst de leerling terminologie (term, factor…)?*
- *In welke mate beheerst de leerling de problematiek van bewerkingsteken en toestandsteken?*
  De tekenproblematiek wordt dus apart aanpakt.
- *In welke mate beheerst de leerling de volgorde van bewerkingen?*
  De moeilijkheidsgraad wordt beperkt tot maximum twee verschillende bewerkingen (vijf termen en/of factoren).
- *In welke mate is de leerling vertrouwd met machten en vierkantswortels?*
  Dit heeft meestal onmiddellijk impact, omdat de uitbreiding van het machtsbegrip snel aan bod komt in het tweede jaar.
- *In welke mate is de leerling vertrouwd met percentrekenen?*
- *In welke mate kan de leerling vergelijkingen van de vorm* $x + a = b$ *en* $a \cdot x = b$ *oplossen?*
- *In welke mate kan de leerling eenvoudige vraagstukken oplossen?*
- *In welke mate kan deze kennis en vaardigheid ingezet worden in geïntegreerde oefeningen?*

5.2.2.3 Relaties tussen getallen en bewerkingen met getallen betekenisvol gebruiken bij het oplossen van problemen

1 Doelstellingen

G37	Vaardig rekenen met rationale getallen bij het oplossen van problemen.	8 9 10
	B Vlot rekenen met eenvoudige getallen.	
G38	Machten van getallen associëren aan betekenisvolle situaties.	1
	V De decimale vorm van een getal omzetten in de wetenschappelijke schrijfwijze en omgekeerd.	
	U Rekenen met getallen die geschreven zijn in de wetenschappelijke schrijfwijze.	
G39	Vraagstukken in verband met betekenisvolle situaties oplossen.	1 7 8 9 12 13 16 21 22
	B Vraagstukken die te herleiden zijn tot een vergelijking van de eerste graad met één onbekende oplossen	
	B Een grootheid berekenen uit een gegeven formule, door de waarden van de andere grootheden eerst in te vullen en dan de vergelijking op te lossen.	
G40	Het recht evenredig en omgekeerd evenredig zijn van twee grootheden herkennen in het dagelijkse leven en in tabellen.	16
G41	Vraagstukken oplossen waarbij recht evenredige en omgekeerd evenredige grootheden aan bod komen.	16
G42	Recht evenredige verbanden tussen grootheden grafisch voorstellen.	39
	U Bij recht evenredige grootheden, gegeven met een grafiek of een tabel, een tussenliggende waarde berekenen (interpoleren) of een verderliggende waarde berekenen (extrapoleren).	
G43	Gegeven strook- en schijfdiagrammen aflezen en interpreteren.	23 25
	E Getalwaarden aflezen uit een strook- of schijfdiagram en ze in hun context interpreteren.	
	B Vragen beantwoorden in verband met gegeven strook- of schijfdiagrammen.	

	V	Zelf vragen stellen in verband met een gegeven strook- of schijfdiagram en die vragen beantwoorden.
	U	In eenvoudige situaties numerieke gegevens in een strook- of een schijfdiagram weergeven.

2 Pedagogisch-didactische wenken

G37 De rationale getallen, hun bewerkingen en hun eigenschappen zijn uitvoerig aan bod gekomen in het eerste leerjaar. Een systematische herhaling van de getallenverzamelingen is niet aangewezen. *De verwerking van deze doelstelling moet geïntegreerd worden in een normale verwerking van de andere leerplanitems* (vraagstukken, algebraïsch rekenen, getalwaarde, oplossen van vergelijkingen, evenredigheden en grafieken en diagrammen).

Dit herhalen en bijsturen zal per groep leerlingen verschillend zijn naargelang de hiaten. Die kunnen vastgesteld worden met *een diagnostische toets* (zie inleiding).

Ook in het tweede jaar blijft de slogan: *vlot rekenen gaat voor op de complexiteit* van de uitdrukking. De ingewikkeldheid bij de rekenvaardigheid ligt heel wat lager, als ze geplaatst wordt in het kader van vraagstukken.

Alleszins wordt aandacht besteed aan het onderhouden van het *hoofdrekenen* (bijv. bij het schatten), het vlot rekenen met standaardprocedures en het gebruik van rekenvoordelen. In plaats van het *cijferrekenen* kan resoluut gekozen worden voor het gebruik van de rekenmachine, zeker bij toepassingen in vraagstukken.

Wat de eigenschappen betreft, gaat de voorkeur uit naar het effectief gebruik van de regels in oefeningen (cf. samennemen van termen, rekenvoordelen). Anderzijds kunnen als differentiatie de gekende eigenschappen uitgediept worden, bijv. het verbeteren van de verwoording ervan. Daarbij kan gestreefd worden naar een meer formele vorm dan in het eerste leerjaar.

Het herhalen van de rekenregels (zoals tegengestelde van een som, distributiviteit ...) kan aan bod komen bij het algebraïsch rekenen, waar ze een concrete toepassing krijgen.

Door de *grote diversiteit in de leerlingengroep* van de eerste graad kunnen een aantal leerlingen nog verregaande rekenproblemen hebben. Overleg met de leraar van het eerste leerjaar en de daar geëvalueerde situatie geeft precieze informatie over de feitelijke situatie in verband met rekenvaardigheden. De leraar kan daarop g*edifferentieerde training* aanbieden, waarbij ICT een ondersteunende rol kan spelen, bijv. bij trainingsoefeningen.

Voor sommige leerlingengroepen kan de leraar toch opteren voor een meer gestuurde aanpak. Dat kan betekenen dat in het eerste trimester geregeld een kort, intens oefenmoment georganiseerd wordt. Dat kan betekenen dat bij de taken geregeld een beperkt aantal onderhoudsoefeningen op vlot rekenen, parate kennis … gegeven wordt.

Van de leerlingen kan verwacht worden dat ze de verantwoordelijkheid opnemen om desnoods via extra taken te werken aan hun rekenvaardigheid. De wijze waarop leerlingen hiermee omgaan kan een element zijn in de oriëntering.

G38 Machten zijn verkorte notaties van producten. Toch hebben ze een specifiek karakter, bijv. de snelle toename van het resultaat bij toenemende exponent (en grondtal groter dan 1). Dat kent een mooie illustratie in het bekende verhaal van de graankorrels op een schaakbord (bijv. telkens verdubbelen). Een ander gekend voorbeeld is dat van de oppervlakte ingenomen door plantjes in een vijver bij constante groei.

Bij machten van natuurlijke getallen met een negatieve exponent herkennen we de stambreuken. Dezelfde overweging als die bij de opklimmende machten brengt nu de zeer kleine getallen voort.

Machten bieden een kans om bepaalde patronen in getallenrijen gemakkelijker in een formule weer te geven.

Als *verdieping* kan hier de wetenschappelijke schrijfwijze van getallen aan bod komen. Die is gebaseerd op het werken met machten van 10. Deze schrijfwijze maakt het mogelijk zeer kleine en zeer grote getallen op relatief eenvoudige wijze te schrijven.

Het belang ervan kan geïllustreerd worden met realistische voorbeelden uit de wetenschappen en de technische toepassingen.

Bij het gebruik van de rekenmachine kunnen opmerkingen gemaakt worden over de nauwkeurigheid en de afronding zonder er evenwel al een foutentheorie aan te koppelen. Het lijkt zinvol met de collega's van de vakken die hiervan verder nog gebruik zullen maken, afspraken te maken over de precieze modaliteiten van aflezen en noteren.

Als *uitbreiding* kan het rekenen met getallen in wetenschappelijke schrijfwijze aan bod komen. Bij het optellen en het aftrekken worden de getallen eerst geschreven met eenzelfde macht van 10. Het is zinvol vooral aan deze omzetting aandacht te besteden.

Het aspect *verwaarloosbaarheid van een relatief kleine term* kan besproken worden bij een som of een verschil van twee termen met een merkelijk verschillende grootteorde. Het gebruik van de rekenmachine kan uitgelegd worden.

G39 Vraagstukken moeten *over het hele schooljaar gespreid* aan bod komen. Het verwerven van probleemoplossende vaardigheden en de bijbehorende aanwending van heuristiek zullen maar gerealiseerd worden doorheen een proces van voortdurende aandacht. Om regelmaat in te bouwen kan de leraar bijvoorbeeld werken met een *'probleem van de week'*.

Zoals in het eerste jaar al aangegeven bieden vraagstukken de gelegenheid om een integratie te realiseren van een aantal toepassingen, zoals het gebruik van diagrammen, grafieken… Ook de verschillende rekenvaardigheden (hoofdrekenen, schatten, gebruik rekenmachine) kunnen hierin geïntegreerd worden.

Het oplossen met behulp van een vergelijking is niet de enige oplossingsmethode bij vraagstukken. De leerlingen beschikken over ruime mogelijkheden binnen het getallenbereik en de gekende bewerkingen om een oplossing uit te werken (bijv. de regel van drieën, verhoudingstabellen). Het is maar uit het *vergelijken van verschillende oplossingsstrategieën* voor eenzelfde probleem dat de efficiëntie van een bepaalde methode opvalt.

Het oplossen van vraagstukken is de gelegenheid bij uitstek om bij leerlingen *probleemoplossende vaardigheden* te ontwikkelen. (Voor de aandachtspunten bij vraagstukken zie ook de pedagogisch-didactische wenken bij probleemoplossende vaardigheden – V1.)

G40 Het recht evenredig en omgekeerd evenredig zijn van grootheden kan door de leerlingen op voorbeelden onderzocht worden. Naast voorbeelden van evenredige grootheden zullen tegenvoorbeelden vermeld worden, bijv. verkoopsacties (3 voor de prijs van 2, 3 + 1 gratis), snelheid - remweg.

G41 Vraagstukken op evenredige grootheden geven soms aanleiding tot vergelijkingen waarbij de onbekende in de noemer voorkomt (*vierde evenredige*). Met de hoofdeigenschap kunnen ze omgevormd worden tot herkenbare vergelijkingen van de eerste graad. Ook de verschillende vormen van het verhoudingsrekenen kunnen aan bod komen. Specifiek wordt gedacht aan *de regel van drieën*.

Bij het oplossen van sommige vraagstukken komt *de middelevenredige* aan bod, waarbij de vierkantswortel ter sprake komt. De leerlingen beschikken maar over een beperkt inzicht hierin. De rekenmachine biedt misschien een uitweg. Maar omdat dan slechts de positieve oplossing gegeven wordt, is enige voorzichtigheid geboden.

Zoals bij elk onderdeel waarin vraagstukken aan bod komen, zal voldoende aandacht besteed worden aan het verwerven van probleemoplossende en zelfsturende vaardigheden (zie 5.1).

G42 Het *aanschouwelijk voorstellen van verbanden* tussen grootheden kan gezien worden als een voorbereiding tot het functiebegrip. In het eerste leerjaar werden coördinaten ingevoerd. Leerlingen kunnen een aantal getallenkoppels uitzetten in een rooster. Bij recht evenredige grootheden liggen de roosterpunten op een rechte. Dit is de belangrijkste ervaring die op dit niveau nagestreefd moet worden. Om deze ervaring kracht bij te zetten zullen tegenvoorbeelden besproken worden.

Met behulp van de grafiek kunnen andere koppels bepaald worden. Deze kunnen getoetst worden aan de 'realiteit' (bijv. het aflezen van aantallen zou tot natuurlijke getallen moeten leiden). Als toemaatje kan aandacht besteed worden aan het ‘voorspellen’ van waarden door middel van het bepalen (volgens evenredigheid) van tussenliggende (interpolatie) of verderliggende koppels getallen (extrapolatie) uitgaande van gegeven waarden in een tabel. Inter- en extrapolatie kan ook met behulp van een grafische voorstelling uitgelegd worden.

G43 In het eerste leerjaar werd aandacht besteed aan het lezen, het interpreteren en het opstellen van diagrammen, opgemaakt op grond van de 'absolute frequenties' van de gegevens. In het tweede leerjaar wordt gewerkt met 'relatieve' frequenties. (Het is niet de bedoeling dat leerlingen die terminologie hanteren.) De bedoeling is het begrijpen en kritisch verwerken van de aangeboden informatie en in het bijzonder het aflezen van gegevens, het leggen van verbanden en het kritisch bespreken.

Het *basisniveau* voor alle leerlingen is *het aflezen en interpreteren van diagrammen.*

Als *uitbreiding* kan het zelf opstellen van diagrammen en grafische voorstellingen op basis van gegevens aan bod komen, bijv. bij een reeks gemeten resultaten (cf. wetenschappelijke vakken, beperkte ‘onderzoeksopdrachten’).

Hierbij zullen vooral bij schijfdiagrammen, waarbij nog de omzetting naar graden moet gemaakt worden, slechts eenvoudige voorbeelden gehanteerd worden. De klemtoon ligt meer op het principe van de voorstelling van de gegevens, dan op de moeilijke omzettingen.

Het langdurig verwerken van cijfergegevens met de hand, zoals het turven van resultaten en bepaalde omslachtige berekeningen, zal beperkt worden. Het opstellen van diagrammen kan ondersteund worden met behulp van een rekenblad op een computer of mogelijk al op een grafische rekenmachine.

5.2.2.4 Bewerkingen met getallen vlot en correct uitvoeren

1 *Doelstellingen*

G44	Machten met een gehele exponent berekenen.	11
	E	Machten met een natuurlijke exponent berekenen.
	E	Machten met grondtal 10 of 2 en met gehele exponent berekenen.
	B	Machten met een gehele exponent definiëren.
G45	Regels voor het rekenen met machten toepassen.	11
	E	Regels voor het rekenen met machten met grondtal 10 of 2 gebruiken bij berekeningen.
	B	Regels voor het rekenen met machten met grondtal 10 en 2 formuleren en toepassen.
	B	Regels voor het rekenen met machten formuleren en toepassen.
	V	Regels voor het rekenen met machten in symbolen weergeven en verklaren.
	V	Regels voor het rekenen met machten gebruiken bij machten met letterexponenten.

2 *Pedagogisch-didactische wenken*

G44 Het machtsbegrip is geen nieuw begrip. Het werd in het eerste jaar aangezet voor natuurlijke exponenten in functie van de notatie in formules. Er werd nog niet gerekend met machten (d.w.z. alleen de definitie is voorhanden, er zijn geen rekenregels). Het machtsbegrip verdient dus alle aandacht.

In de *elementaire fase* kunnen de exponenten beperkt worden tot natuurlijke getallen. Het gaat dan om een kortere notatie voor de vermenigvuldiging van een getal met zichzelf (een aantal keer). Leerlingen kunnen zo nodig teruggrijpen naar deze ‘definitie’. Het begrip exponent moet wel verruimd worden tot gehele exponenten. Het machtsbegrip kan in bepaalde leerlingengroepen beperkt worden tot machten van 10 en 2, zoals in de eindtermen is voorzien.

Veeleer dan snel naar de rekenregels door te schuiven worden machten *een tijd lang verwerkt vanuit de definitie*, in eerste instantie zelfs met natuurlijke exponenten. De leerlingen zullen voldoende oefeningen maken waarin machten moeten worden uitgerekend, zodat de begrippen grondtal en exponent hun volwaardige betekenis kunnen verwerven.

Dan pas is de tijd rijp om met deze nieuwe dingen ook nog eens te gaan rekenen. Het feit dat dit onderdeel meestal gebundeld wordt in één hoofdstuk en dus in een beperkt aantal opeenvolgende lessen, heeft vaak tot gevolg dat leerlingen te snel met machten gaan rekenen, zonder dat de betekenis, zoals hiervoor aangegeven, al duidelijk is. Bepaalde begrippen functioneren dan niet correct en dat leidt tot verkeerd rekengebruik (vooral met de exponenten), dat later nog heel moeilijk uit te roeien valt.

In verband met *het rekenen met de wetenschappelijke schrijfwijze* en voor het gebruik bij talstelsels in technologische opvoeding zal bijzondere aandacht besteed worden aan de machten van 10.

G45 De regels voor het rekenen met machten kunnen aangebracht worden door voorbeelden met getallen $\left(4^2 \cdot 4^3 = 4^5\right)$, nadien door lettervoorbeelden met getalexponenten $\left(a^2 \cdot a^3 = a^5\right)$. Ook die vorm kan veralgemeend worden tot een vorm met letters in grondtal en exponent $\left(a^b \cdot a^c = a^{b+c}\right)$. *Deze gradatie moet meer inzicht geven in de betekenis van de letters.* Elke stap vraagt een afzonderlijke inoefening, waarbij de rekenvlotheid (het flexibel rekenen) voorrang krijgt op de ingewikkeldheid van de uitdrukkingen. De abstrahering van de eigenschappen in een formule met letters zal maar aan bod komen, nadat voldoende oefeningen met getallen werden verwerkt. Bij de overgang moeten, zoals bij andere formele schrijfwijzen, de letters gaan functioneren als plaatshouders voor getallen die ingevuld kunnen worden.

Voor de rekenregels is het werkwoord in de doelstelling duidelijk ‘toepassen’, d.w.z. *gebruiken in oefeningen. De formulering van een definitie, het gebruik van symbolen … vragen een beheersingsniveau hoger.* Dat is wel noodzakelijk als onderbouw voor studierichtingen met meer wiskunde.

Om de oefening van de rekenregels in de tijd te spreiden wordt een onderscheid gemaakt tussen het rekenen met machten met eenzelfde grondtal (som exponenten, verschil exponenten, product exponenten) en de regels over een macht van een product en een macht van een quotiënt die pas later nuttig worden. Machten van breuken kunnen eventueel ondertussen met de definitie uitgewerkt worden. Hierbij kan opgemerkt worden dat voor de latere praktijk van het rekenen met functies (die in het secundair onderwijs beperkt zijn tot functies in een veranderlijke) precies de rekenregels van het rekenen met machten met eenzelfde grondtal belangrijk zijn.

Bij oefeningen op de rekenregels moet de rekenregel zelf voldoende geëxpliciteerd worden en verbonden worden met de berekende uitdrukking.

5.2.2.5 Rekenen met lettervormen en formules, vergelijkingen oplossen

1 Doelstellingen

G46	Een recht evenredig verband uitgedrukt in een tabel met een formule uitdrukken.	24
V	Een omgekeerd evenredig verband uitgedrukt in een tabel met een formule weergeven.	
G47	Vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende oplossen.	21
E	Vergelijkingen van het type $x + a = b$, $ax = b$, $ax + b = c$ met $a \in \mathbb{Q}_0$ en $b, c \in \mathbb{Q}$ oplossen.	
V	Een formule omvormen door ze op te lossen naar een veranderlijke.	
V	Eigenschappen in verband met gelijkheden onderzoeken en formuleren.	
G48	Vraagstukken die te herleiden zijn tot een vergelijking van de eerste graad met één onbekende oplossen.	21
B	Een grootheid berekenen uit een gegeven formule, door de waarden van de andere grootheden eerst in te vullen en dan de vergelijking op te lossen.	
V	Een grootheid berekenen uit een gegeven formule door de formule om te vormen, door ze op te lossen naar een veranderlijke.	
G49	De getalwaarde van een veelterm met ten hoogste drie termen berekenen.	
E	De getalwaarde van een veelterm in één letter met ten hoogste drie termen berekenen.	
B	De getalwaarde van een veelterm in twee letters met ten hoogste drie termen berekenen.	
G50	Een-, twee- en drietermen optellen en vermenigvuldigen en het resultaat herleiden.	19
B	Twee- en drietermen in één letter optellen en vermenigvuldigen en het resultaat herleiden.	
V	Twee- en drietermen in twee letters optellen en vermenigvuldigen en het resultaat herleiden.	
V	Twee- en drietermen in één letter en met eenvoudige letterexponenten optellen en vermenigvuldigen en het resultaat herleiden.	
V	Het quotiënt van twee eentermen berekenen.	
G51	Machten met een natuurlijke exponent van een eenterm berekenen.	

	V	Machten met een natuurlijke exponent berekenen van eentermen met ten hoogste twee letters en waarin letterexponenten voorkomen.	
G52	De formules voor de merkwaardige producten $(a+b)^2$ en $(a+b)(a-b)$ kennen, verklaren en toepassen.		20
	E	De formules voor de merkwaardige producten toepassen voor vormen met één letter.	
	V	De formules voor de merkwaardige producten toepassen voor vormen waarbij a en b eentermen zijn met ten hoogste twee letters.	
	V	De formules voor merkwaardige producten toepassen voor vormen waarin machten met letterexponenten voorkomen.	
G53	Eenvoudige veeltermen ontbinden in factoren door gebruik te maken van: - de distributiviteit van de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling; - de formules voor de merkwaardige producten $(a+b)(a-b)$ en $(a+b)^2$.		20
	E	De formules voor het ontbinden in factoren toepassen voor vormen met één letter.	
	V	De formules voor het ontbinden in factoren toepassen voor vormen waarbij a en b eentermen zijn met ten hoogste twee letters.	
	V	De formules voor het ontbinden in factoren toepassen voor vormen met machten waarin letterexponenten voorkomen.	

2 *Pedagogisch-didactische wenken*

Over het algemeen zullen de meeste leerlingen in hun studieloopbaan maar geconfronteerd worden met *een beperkt gebruik van de algebraïsche rekenvaardigheid.* Daartegenover staat dat ze veel meer geconfronteerd zullen worden met situaties, waarin gegevens worden aangereikt met behulp van allerlei informatie, in het bijzonder door middel van tabellen, grafieken en diagrammen, door in teksten verspreide wiskundige 'woord'informatie … *Daarom is het belangrijk precies aan het mathematiseren van deze situaties aandacht te besteden.* Een betekenisvolle ontwikkeling van wiskundige begrippen zal de herkenning van modellen stimuleren. De ontwikkeling van het letterrekenen past in het algemeen bij een aanpak van formules en vraagstukken.

Uiteraard zullen leerlingen de opgestelde relatie, vergelijking … wiskundig moeten kunnen verwerken. Hierin spelen de algebraïsche vaardigheden hun rol. Naarmate de studieloopbaan meer wiskunde zal bevatten, moeten leerlingen deze vlotter en efficiënter beheersen. De vlotheid van de rekenvaardigheid is een van de maatstaven in de *oriëntering* van leerlingen. Die vlotheid wordt niet bereikt door complexe, gezochte oefeningen. *Eenvoudige, vlotte oefeningen,* die met enige snelheid kunnen opgelost worden, zullen meer motiverend werken.

In de praktijk zullen de meeste leerlingen in hun studieloopbaan slechts geconfronteerd worden met uitdrukkingen in één letter (cf. vergelijkingen en functievoorschriften). Bij stelsels zal dit beperkt blijven tot een beperkt aantal letters (veelal twee). De vergelijkingen zijn dan maar van de eerste graad. In formules treden wel eens meer letters op, maar dan in een eenvoudige vorm, en dat betekent concreet: geen negatieve exponenten of geen negatieve exponenten in de noemers.

De algebraïsche rekenvaardigheid moet *geen overmatige moeilijkheidsgraad* hebben. In contexten zal ze eerder beperkt blijven tot relatief eenvoudige situaties. Niet alle rekenregels moeten tot een afzonderlijk automatisme opgevoerd worden. Het oefenen van het algebraïsch rekenen leidt vaak tot vrij stereotiepe oefeningen (bereken: …). Het is uiteraard correct dat een vaardigheid maar verkregen wordt door ze veelvuldig uit te voeren. Maar daarom moet dit nog niet tot stereotiepe, nauwelijks motiverende oefeningen leiden. Vaardigheid verwerven kan op een creatievere wijze aangepakt worden, waarbij meer naar het inzicht gewerkt wordt.

Voor leerlingen die wiskundig meer aankunnen, zullen in een gedifferentieerde aanpak, en dus als verdieping en als uitbreiding, moeilijkere vormen aangeboden worden. Ook hier geldt de regel dat deze leerlingen wellicht meer gebaat zijn met het onderzoeken en analyseren van complexere situaties, dan wel met complexe en gezochte rekenoefeningen.

Voor een beperkt aantal leerlingen biedt het algebraïsch rekenen geen enkel probleem. Hen kan al een verdere verdieping aangeboden worden door middel van het rekenen met machten en veeltermen met letterexponenten. Let wel, dit is een abstractieniveau hoger, want ook de exponent wordt nu een ‘onbepaalde’ (een gegeneraliseerd getal). Het is zinvol hier niet overhaast te werken en dit geleidelijk op te bouwen.

G46 Als het recht evenredig verband tussen grootheden kan uitgedrukt worden door een formule, dan kunnen nieuwe getallenkoppels berekend worden. Het expliciteren van het verband tussen (evenredige) grootheden in een formule kan gezien worden als een voorbereiding op het functiebegrip in de hogere jaren.

Als verdieping kan het beschrijven van een omgekeerd evenredig verband door een formule aan bod komen. Omzichtigheid met veranderlijken in de noemer is aangewezen. De vertolking kan gemakkelijk als: ‘het product van overeenkomstige waarden is constant’.

G47 Het *elementaire niveau* blijft beperkt. Het gaat om de twee standaardoperaties uit het eerste jaar en eenvoudige samengestelde vormen.

Het oplossen van vergelijkingen moet op een zeer vlotte wijze uitgevoerd kunnen worden. Omwille van de ruime toepassing van de techniek van het oplossen van vergelijkingen (van de eerste graad) kan binnen de basisleerstof in principe elke vorm aan bod komen, zij het dat best uitgegaan wordt van modellen die in toepassingssituaties voorkomen. Ze zullen dan eerder een beperkte moeilijkheidsgraad hebben. Artificiële en gezochte vormen blijven achterwege.

Als de leerlingen de technieken voor het oplossen van vergelijkingen volledig onder de knie hebben, dan zullen ze die ook relatief gemakkelijk kunnen toepassen bij *het omvormen van formules.* Toch wordt de moeilijkheidsgraad hiervan onderschat. Het vlot hiermee omkunnen is een element bij de *oriëntering* van de leerlingen.

Bij *de eigenschappen van gelijkheden* gaat het om de twee gekende regels, die vaak foutief samengevat worden tot “van lid veranderen”. Beter is de leerlingen tenminste *volledige en zinvolle gehelen* te laten memoriseren: bijv. “beide leden van een gelijkheid met eenzelfde factor vermenigvuldigen”. Zo wordt wellicht een hele reeks fouten vermeden.

G48 *Vraagstukken zouden over het hele schooljaar gespreid aan bod moeten komen, want probleemoplossende vaardigheden worden maar verworven doorheen een proces van voortdurende aandacht.*

Een realiteitsbetrokken aanbieden van de leerinhouden kan tot vraagstukken leiden, waarin de oplossingstechniek met vergelijkingen kan worden toegepast, zoals onder meer bij grafieken en diagrammen. De leerlingen moeten inzien dat bij het omwerken van formules dezelfde rekenregels worden toegepast als bij het oplossen van een vergelijking.

Elders in de pedagogisch-didactische wenken worden de verschillende fasen van het oplossen van vraagstukken besproken (zie 5.1 bij probleemoplossende vaardigheden – V1).

G49 In het eerste leerjaar werden de leerlingen geconfronteerd met allerlei situaties die in formulevorm kunnen weergegeven worden. Dit is een goed uitgangspunt voor de begrippen *eenterm, veelterm en getalwaarde.*

Bij het berekenen van de getalwaarde van een veelterm vervullen de letters *de rol van ‘veranderlijke’*. Dat betekent dat ze verschillende (alle) waarden kunnen aannemen. De getalwaarde verandert in functie van het gekozen getal.

Voor de veranderlijke zal niet altijd de letter x genomen worden.

Vanuit de vaststelling dat in de hogere leerjaren van het secundair onderwijs in de toepassingen vooral gewerkt wordt met veeltermen in één veranderlijke, zal in de eerste graad het oefenmateriaal hoofdzakelijk bestaan uit *veeltermen in één veranderlijke*. Alleszins is een gradatie in de voorbeelden en oefeningen waarbij het aantal veranderlijken toeneemt, aangewezen.

De rekenmachine wordt zinvol ingeschakeld, d.w.z. waar met de getallen niet sneller uit het hoofd kan gerekend worden. Bij dat gebruik is het nuttig te herhalen hoe bepaalde situaties worden ingegeven, bijv in verband met het toestandsteken: -2^3, $(-2)^3$, -2^4, $(-2)^4$ ...

Het *elementaire niveau* kan beperkt worden tot veeltermen in één letter met lage exponenten bij de veranderlijke. Het gaat om het principe van het berekenen van een getalwaarde. Is dit niet aanwezig, dan wordt verder doorgroeien in wiskunde met meer lestijden moeilijk.

Het leerplan geeft hier als *basisniveau* een duidelijke begrenzing aan (met name ten hoogste drie termen en twee letters).

Het berekenen van getalwaarden wordt niet los gekoppeld van *contextsituaties.* Dit geeft een zekere realiteitswaarde aan de berekeningen (waardoor artificiële vormen vermeden worden) en laat de leerlingen toe een realiteitscontrole op hun resultaat uit te voeren.

G50 Op het *niveau basisvorming* heeft het geen zin met meer dan één letter te werken. Eentermen optellen en vermenigvuldigen kan hier als een afzonderlijke toepassing van de distributieve eigenschap aan bod komen.

Voor deze bewerkingen bestaan zogenaamde *praktische schikkingen*. Wiskundig zwakke leerlingen zijn wellicht gebaat met het ordelijk werken volgens een vaste schikking, waar rekening gehouden is met ontbrekende machten. Dit mag geen dwingend harnas worden. Ook een berekening met een netjes onder elkaar geschreven uitwerking is zinvol.

Voorbeeld

$$\begin{aligned}(x-4)(x^3-2x^2+6) &= x^4-2x^3+6x-4x^3+8x^2-24\\ &= x^4-6x^3+8x^2+6x-24\end{aligned}$$

Ook hier zal geregeld oefenen gespreid over een langere tijd, met enkele oefeningen op geregelde tijdstippen, meer opleveren dan een intense periode na elkaar. De normale basisoefeningen zullen een normaal gebruik van breuken bevatten. Let wel, in het eerste leerjaar werd het manueel rekenen met breuken beperkt tot eenvoudige breuken (met noemers tot 20 en/of gemakkelijk factoriseerbaar). De leraar van het tweede leerjaar dient zich te realiseren dat bewerkingen met breuken voor deze leerlingen een ernstige verhoging van de moeilijkheidsgraad inhouden. Dergelijke oefeningen kunnen als extra training en herhaling worden aangeboden, maar in toetsen worden dergelijke situaties beperkt gehouden.

Het oefenen met veeltermen is een gelegenheid om in ‘zinvolle wiskundesituaties’ de rekenregels van bewerkingen te onderhouden.

Bij het algebraïsch rekenen is *afwisseling in de opgaven van belang.* In een eerste periode kan *een bepaalde techniek aangeleerd worden* en specifiek ingeoefend. *Daarbij is een snelle correctie en bijsturing noodzakelijk zodat geen training op basis van fouten ontstaat.* Daarna komen *geregeld herhalingsoefeningen* aan bod, waarbij gemengde oefeningen optreden. De leerlingen moeten zich telkens opnieuw instellen op de opdracht. Een goede foutenanalyse kan leerlingen leren hun fout aan te wenden om hun vaardigheid bij te sturen. In de eerste graad kan de leraar hier nog een aantal sturende functies opnemen, toch is het belangrijk dat de leerling zich ook voor de foutenanalyse en bijsturing engageert.

G51 Het *basisniveau* beperkt zich tot werken *met één letter en positieve exponenten.* Merk op dat eentermen in feite altijd positieve exponenten hebben, zodat de interpretatie van de doelstelling kan beperkt worden. Ook quotiënten van eentermen worden beperkt gehouden (bijv. positieve exponenten in deeltal en deler).

G52 De doelstelling geeft drie beheersingsniveaus aan: *de formule kennen* (dat is onbetwistbaar), *ze verklaren* (is voor interpretatie vatbaar), *ze toepassen* (dus gebruiken).

De formule *verklaren* betekent hier concreet: *voorbeelden geven en de formule kunnen berekenen,* bijv. met behulp van de distributieve eigenschap uitgaande van het ene lid rekenen naar het andere. De verklaring koppelen aan het gekende gebruik van *oppervlakten* (met in elkaar liggende vierkanten) zal het inzicht alleen maar versterken, en vooral de rol van het dubbelproduct verhelderen. Deze werkwijze kan het verwoorden van de formule ondersteunen.

Voor het *elementaire niveau* worden de oefeningen beperkt tot standaardvormen met één letter.
Voor *het basisniveau* komt het erop aan vooral *het inzicht in de formules* van de merkwaardige producten $\left(a+b\right)^2$ en $(a+b)(a-b)$ te realiseren en die vlot te memoriseren. Daarbij wordt ervan uitgegaan dat het aanbieden van te complexe vormen het verwerven van deze kern eerder zal verstoren. Vormen met tweetermen of veeltermen voor a en b behoren niet tot de basisleerstof.

Een mogelijke werkwijze om het memoriseren bij leerlingen te ondersteunen, is hen de formule te laten opnemen in *een formularium* dat ook de volgende jaren kan functioneren (hierover afspraken in de vakgroep maken). Telkens geconfronteerd worden met de noodzaak tot opzoeken zal hen eventueel motiveren de formule te memoriseren. *Het gebruik van een formularium dient een veel ruimere doelstelling* (als het ruimer is dan deze formules). Het leert leerlingen hun kennis eventueel te controleren, (terug) op te zoeken en bij te sturen.

G53 *Ontbinding in factoren* is maar bepaald tot op een constante na, want met behulp van de distributiviteit kan altijd een of andere constante afgezonderd worden. Om dergelijke misverstanden uit te sluiten bij evaluatie zijn afspraken noodzakelijk.

Door de beschikbaarheid van software (computeralgebrasystemen) heeft het ontbinden in factoren *veel aan belang verloren.* In de praktijk wordt het nauwelijks nog gehanteerd. We zullen veel sneller grijpen naar numerieke benaderingsmethoden, ook al gezien de complexiteit van sommige realiteitsgebonden situaties. Toch lijkt het verantwoord het ontbinden in factoren nog aan te leren in functie van het snel *bepalen van nulpunten van eenvoudige functies*. Het is vergelijkbaar met het hoofdrekenen. Wie het vlot kan, heeft er alleen maar voordeel bij. Leerlingen die meer wiskunde in hun pakket zullen opnemen in de tweede graad kunnen hier dus wat meer getraind worden.

Zoals eerder gezegd volstaan in de praktijk *vormen in één letter*. *Vlotheid krijgt de bovenhand op ingewikkelde vormen.* Training met meer letters heeft voor het overgrote deel van de leerlingen geen zin.

5.2.2.6 De samenhang tussen getallen en getallenvoorstellingen verwoorden en gebruiken

1 Doelstellingen

G54	De hoofdeigenschap van evenredigheden formuleren en toepassen.	

2 Pedagogisch-didactische wenken

G54 De *hoofdeigenschap van evenredigheden* maakt de omzetting van gelijkheid van verhoudingen (breuken) naar gelijkheid van producten. Deze eigenschap volstaat om gemakkelijk met verhoudingen te werken. De afgeleide eigenschappen kunnen in de tweede of de derde graad aan bod komen als ze daar nodig zijn.

De hoofdeigenschap wordt vaak gebruikt bij *de berekening van de vierde evenredige bij drie gegeven getallen of van de middelevenredige tussen twee gegeven getallen.* Gezien de betekenisvolle behandeling van evenredigheden (zie deel 1) zullen deze toepassingen best in het kader van vraagstukken aan bod komen.

5.2.2.7 Wiskundige terminologie begrijpen en correct gebruiken.

1 Doelstellingen

G55	Terminologie in verband met machten correct gebruiken: - Macht, grondtal, exponent.	5

2 Pedagogisch-didactische wenken

G55 De uitbreiding van het exponentbegrip wordt geleidelijk opgebouwd. Eerst volstaan getallenvoorbeelden, daarna kan het grondtal door een letter worden weergegeven, nog wat later ook de exponenten (zie G45). Daaruit volgen de regels in symbolen.

Omdat het letterbegrip recent is ingevoerd, moet heel wat aandacht besteed worden aan het berekenen van getalwaarden, waarbij de letters de rol van plaatshouder krijgen. Zo kan bijvoorbeeld de problematiek van grondtal nul aan bod komen.

5.2.2.8 Beweringen argumenteren

1 *Doelstellingen*

G56	Beweringen, antwoorden en oplossingen argumenteren vanuit eigenschappen.	
	V	De regels voor het rekenen met machten met natuurlijke exponent argumenteren.
	V	De hoofdeigenschap van evenredigheden argumenteren.

2 *Pedagogisch-didactische wenken*

G56 Vanuit het actief onderzoeken van relaties tussen begrippen worden leerlingen geconfronteerd met *vele vormen van beweringen en vermoedens*. *Niet elk vermoeden leidt tot een 'eigenschap'*, niet elke bewering zal blijken juist te zijn, veralgemeenbaar ... Deze besluitvorming moet geargumenteerd (verklaard, verantwoord) worden. Ook bij actief probleem oplossen zullen de leerlingen hun oplossing of hun redenering op een of andere wijze moeten kunnen verklaren, argumenteren.

Waar mogelijk zullen de eerder spontane opmerkingen om een oplossing te 'verdedigen', gebruikt worden om leer- en klassengesprekken te houden, *waarin de leerlingen onderling en ten aanzien van de leerkracht hun argumentatie uitwisselen.* De leerkracht zal ervoor zorgen dat in deze fase *aangebrachte argumenten kritisch bevraagd en getoetst worden.* Belangrijk hierbij is dat weerhouden argumenten als valabel aanvaard worden en dat de reden van het afwijzen van argumenten wordt ingezien.

De hoofdeigenschap van evenredigheden gaat uiteraard terug op de definitie van breuken. Daarin zijn de tellers en noemers gehele getallen. Als de eigenschap van gelijkheden beschikbaar is (beide leden met eenzelfde getal vermenigvuldigen of delen), dan is de verklaring meteen gegeven. Zo krijgen leerlingen ook in getallenleer een beetje zicht op de samenhang van eigenschappen.

5.3 Meetkunde

5.3.1 *Eerste leerjaar*

5.3.1.1 Algemene doelstellingen meetkunde

1 *Meetkundige kennis en vaardigheden gebruiken om ruimtelijke en vlakke situaties te modelleren.*

2 *Meetkundige concepten ontwikkelen, herkennen, verwoorden en gebruiken.*

3 *Meetkundige relaties herkennen, onderzoeken, verwoorden en gebruiken.*

4 *Meet- en tekenvaardigheid ontwikkelen.*

5 *Vormkenmerken van ruimtelijke en vlakke figuren herkennen, verwoorden en gebruiken.*

6 *Problemen oplossen in verband met lengte, oppervlakte en volume.*

De algemene doelstelling van meetkunde in het eerste leerjaar is een intuïtieve verkenning van de ruimte en een uitgebreide verkenning van het vlak. Leerlingen worden geconfronteerd met een aantal voorbeelden om begrippen en eigenschappen op te bouwen. Tegenvoorbeelden geven is even belangrijk in de ontwikkeling van het 'eigenschapgevoel' als voorbeelden. De leerlingen krijgen hierdoor een juist aanvoelen van *het concept veralgemenen* in de wiskunde. Vooral in de vlakke meetkunde moet dan aandacht besteed worden aan de moeilijke overgang van *het intuïtief verkennen, ervaren, onderzoeken en aanvaarden* naar *het nauwkeurig omschrijven van begrippen en eigenschappen en het argumenteren* van de eigenschappen. Beide aspecten moeten in ruime mate aanwezig zijn.

Het *kennen* van meetkundige begrippen en eigenschappen houdt in dat ze *herkend* worden in de omgeving en op figuren, dat er *voorbeelden* van kunnen gegeven worden, dat er vlot mee kan omgegaan worden in *tekeningen*, en dat kan *verwoord* worden wat ze betekenen. Voor leerlingen waarvoor in het verdere curriculum *formalisering* een belangrijke rol speelt, worden hogere eisen gesteld aan de verwoording. Zo kan van meetkundige begrippen *een definitie gegeven worden*. Dit volgt vlot uit de fase van herkennen en verwoorden. Daar gaat het immers om het duidelijk argumenteren *waarom* een bepaalde situatie aan een begrip beantwoordt. Om bijvoorbeeld aan te geven *waarom* een aangegeven figuur een vierkant is, zal de leerling moeten verwoorden dat de vier zijden even lang zijn en de vier hoeken even groot zijn. Dit komt ook ter sprake in het leerproces, als de leerling bijvoorbeeld verkeerde figuren aanwijst. De definitie is dan alleen maar een duidelijk herkenbare vorm van verwoording. Toch is die belangrijk, want die kan gehanteerd worden in redeneringen, omdat de kenmerken van het begrip ondubbelzinnig en in een hanteerbare vorm opgesomd worden.

Het vastleggen van de correcte inhoud van begrippen en het formuleren van hun eigenschappen kan leiden tot het ontdekken van *samenhang*. Een goed inzicht in deze *ordening* is een basis voor het verklaren en het bewijzen van eigenschappen in het tweede leerjaar. Een strenge structuur met axioma's, stellingen en bewijzen wordt in de eerste graad niet nagestreefd. Wat nog niet geformaliseerd haalbaar is, mag nog intuïtief omschreven worden.

In de ontwikkeling van meetkundig inzicht levert *effectief tekenen* een soms onderschatte bijdrage. Het eerste leerjaar kan het moment zijn om een aantal van deze tekenvaardigheden bij te schaven en daardoor het meetkundig inzicht. Het tekenen is een belangrijke stap bij *het onderzoeken* van meetkundige situaties. Daarbij uitsluitend uitgaan van voorgetekende situaties kan ertoe leiden dat keuzeproblemen voor de ligging van punten of lijnstukken niet aan bod komen. Soms leiden precies deze situaties tot inzicht in de voorwaarden van een eigenschap. Door het vrij laten van de keuze komen uitzonderingsituaties vaak als vanzelfsprekend aan bod.

Probleemoplossende vaardigheden komen uiteraard aan bod bij het oplossen van problemen die binnen en met meetkunde kunnen gesteld worden. Hier ligt een kans om het hele arsenaal aan kennis van *meten en metend rekenen* uit de basisschool te herhalen.

Ook het uitvoeren van tekenopdrachten kan bijdragen in het verwerven van probleemoplossende vaardigheden. Daartoe moeten een aantal methoden en constructies niet zonder meer als algoritmen worden gepresenteerd, maar als echte problemen onderzocht worden.

5.3.1.2 Aansluiting met het basisonderwijs

In de eerste graad komt geen afzonderlijk onderdeel metend rekenen aan bod. De basiskennis en de basisvaardigheden zijn in de lagere school voldoende ontwikkeld. In de eerste graad volgen slechts enkele (beperkte) aanvullingen in wiskunde en wetenschappen. Dat neemt niet weg dat de reële situatie anders kan zijn, m.n. een aantal leerlingen blijven moeilijkheden hebben met metend rekenen.

Over het algemeen worden drie problemen gesignaleerd.

- *Het niet functioneren van referentiematen*

  Dit komt vooral tot uiting in het hanteren van onmogelijke resultaten in berekeningen. Uit dergelijke antwoorden blijkt dat sommige leerlingen niet beschikken over het controleautomatisme om te reageren op de onmogelijkheid van dergelijke resultaten. Ze aanvaarden het resultaat omdat ze geen realistische voorstelling hebben van de grootteorde.

  Ondersteuning kan door de leerlingen te confronteren met goede referentiematen voor de veel voorkomende ‘grootheden’. Ondersteunend werkt ook het duidelijker plaatsen van een resultaat in de context van de vraagstelling.

- *Ontbrekende maateenheden in het metriek stelsel*

  In de basisschool komen maateenheden zoals decameter en hectometer nog nauwelijks aan bod. Dit doorbreekt het decimale aspect van de tabel van maateenheden. Waar nodig en zinvol kunnen de termen met deca en hecto nog aangeleerd worden (bijv. aan leerlingen die Latijn in hun pakket hebben). Het kan kort gebeuren bij een historische situering van het metriek stelsel. Oefeningen op het gebruik van deze maateenheden zijn in het secundair niet aangewezen.

  Afhankelijk van het leermateriaal dat gebruikt werd in de basisschool, hebben leerlingen leren werken met een tabel om herleidingen te maken. In de technische vakken en praktijkvakken wordt vaak verwezen naar deze tabel. Als men de ontbrekende eenheden toch wil omzeilen, kan men in de tabel dam vervangen door 10 m, en hm door 100 m.

	km	100 m	10 m	m	dm	cm	mm

- *Herleidingen*

  Herleidingen zijn in de basisschool beperkt tot contextgebonden situaties en tot realistische overgangen (voorbeeld: van kilometer naar meter; tegenvoorbeeld: van kilometer naar millimeter). Ook in de eerste graad zijn kale herleidingoefeningen niet zinvol.

  In wetenschappen bestaat de tendens om bij maatgetallen van grootheden met een factor 10^3 te werken. De benamingen (voorvoegsels zoals tera, giga, mega, kilo, milli, micro, nano, pico) zijn hierop gebaseerd.

5.3.1.3 Meetkundige kennis en vaardigheden gebruiken om ruimtelijke en vlakke situaties te modelleren

1 Doelstellingen

M1	Ruimtelijke en vlakke situaties onderzoeken en daarbij meetkundige concepten en relaties voorstellen en verwoorden.	
	E	Een schets maken bij een vlakke situatie.
	E	Een schets maken bij een eenvoudige, concrete ruimtelijke situatie.
	B	Het terugkeerpatroon in figuren onderzoeken, verwoorden en argumenteren.
	B	Meetkundige concepten en relaties illustreren met betekenisvolle voorbeelden uit de leefomgeving.
	B	Meetkundige concepten en relaties illustreren met betekenisvolle voorbeelden uit wetenschappen, techniek en kunst.
	V	Het gebruik van meetkundige concepten en relaties argumenteren als ze gebruikt of toegepast worden in concrete situaties.

2 Pedagogisch-didactische wenken

M1 Meetkunde heeft te maken met inzicht (met 'zien') in de basiselementen van figuren en in hun samenhang en relaties. Dit inzicht wordt in de aanvangsfase van de meetkunde grotendeels gerealiseerd door 'kijken' (observeren, beschouwen) en 'tekenen' (vastleggen, vergelijken, besluiten). De leerlingen raakten in het basisonderwijs op die manier vertrouwd met een aantal meetkundige begrippen, bijv. figuren, onderlinge ligging van ribben en zijden, verbanden tussen figuren …

Die meetkundige kennis kan in de eerste graad functioneren om meetkundige situaties te modelleren. Ze wordt uitgediept en aangevuld vanuit ervaringen met de ons omgevende leefwereld. Die biedt twee duidelijke uitgangspunten om meetkunde op te bouwen vanuit observatie: het verkennen van ruimtefiguren en het onderzoeken van patronen in figuren.

Onder ruimtelijk inzicht wordt verstaan, het zich kunnen voorstellen van ruimtefiguren en het zich inleven in ruimtelijke situaties waarover slechts beperkte informatie beschikbaar is. Meer nog dan bij de meetkunde in een vlak moet aandacht worden besteed aan het inzicht (dus aan het leren 'kijken naar'). Dit kan door het observeren van een aantal ruimtelijke situaties, het voorstellen van ruimtefiguren, het oplossen van vraagstukken over ruimtefiguren. Het is echter niet de bedoeling in de eerste graad een systematische studie te maken van ruimtemeetkunde.

De behandeling is zeer intuïtief en gebruikt slechts een minimaal aantal begrippen. De aanschouwelijkheid wordt ondersteund door het gebruik van materiaal (traditionele ruimtefiguren, blokken, foto's, afbeeldingen ...).

Bij observatie word je relatief snel geconfronteerd met het tekenen van wat je ziet en met het verklaren van wat je ziet. Meetkunde is meer dan een abstracte ordening van eigenschappen, die verbonden zijn door bewijzen.

Patronen in vlakvullingen en versieringsmotieven zijn vaak opgebouwd met behulp van de traditionele vlakke figuren. Het onderzoeken van enkele voorbeelden daarvan is een uitgelezen moment om meetkundige figuren te verbinden met de realiteit.

Naast het meetkundig onderzoeken van vlakvullingen en motieven kan aan de leerlingen gevraagd worden om zelf dergelijke figuren na te tekenen of te ontwerpen. Het uitwerken van zo'n figuur vraagt een zekere vaardigheid en een intuïtief sterk ontwikkeld gevoel voor meetkundige eigenschappen.

De doelstellingen van de eerste graad gaan verder dan leren observeren en kijken en het voorstellen daarvan. Dit gebeurde al in de basisschool. Ook de mentale (denk)handeling bij het observeren is belangrijk. Bijvoorbeeld om het beeld genomen vanuit een camera te herkennen, hoef je niet noodzakelijk op de plaats van de fotograaf zelf te staan. De mentale denkhandeling betekent dat je die stap slechts denkbeeldig zet. Je tekent wat je denkt te zien van op de plaats van de waarnemer. Dit vergt een sterk ontwikkeld ruimtelijk voorstellingvermogen en is niet voor alle leerlingen evident. Dat wordt maar ontwikkeld door vele observatieoefeningen in werkelijkheid, vanuit mentale verplaatsing en controle achteraf door reële observatie en bijsturing.

Er moet ruimte gemaakt worden voor het oefenen met allerlei voorstellingen van ruimtelijke situaties, bijv. perspectieftekeningen, projecties, aanzichten, plannen, schema's, plattegronden, kijklijnen, schaduwbeelden … Ook in het onderzoeken van vlakke situaties heeft observatie een belangrijke inbreng (bijv. hoe kom je op het spoor van eigenschappen?). De opdracht kan het uitwerken van een oplossing zijn (de voorstelling, de tekening …), maar evenzeer de vraag 'waarom' het zo is zoals je het voorstelt. En wellicht steekt precies in de uitgebreidheid, in de nauwkeurigheid van de formulering, in de samenhangendheid van het antwoord de meerwaarde die in de eerste graad aan deze observatieoefeningen wordt toegevoegd.

Het gebruiken van begrippen en eigenschappen kan voor een aantal leerlingen nog beperkt worden tot een intuïtief gebruik. Leerlingen, die doorstromen in wiskundig onderbouwde studierichtingen, moeten de houding verwerven van telkens die waaromvraag te willen stellen, en van dus zelf veel belang te hechten aan argumenteren en verklaren. Doorheen heel het curriculum zal hieraan aandacht besteed worden.

5.3.1.4 Meetkundige concepten ontwikkelen, herkennen, verwoorden en gebruiken

1 Doelstellingen

M2	Terminologie in verband met meetkundige begrippen gebruiken: - vlak, punt, rechte; - lijnstuk, halfrechte; - lengte, afstand, hoek.	26
M3	De afstand van een punt tot een rechte bepalen.	
	E	De afstand van een punt tot een rechte meten met een geodriehoek.
	V	De afstand van een punt tot een rechte definiëren.
M4	Zijde, diagonaal en hoek van een vlakke figuur herkennen en gebruiken in toepassingen.	26
	E	De zijden en hoeken van een vlakke figuur benoemen.
	E	De diagonalen van een vierhoek benoemen en tekenen.
M5	Straal, middellijn, koorde en middelpuntshoek van een cirkel herkennen en gebruiken in toepassingen.	26
	E	Straal, middellijn, koorde en middelpuntshoek in een cirkel tekenen.
	V	Straal, middellijn, koorde en middelpuntshoek in een cirkel definiëren.
M6	De middelloodlijn van een lijnstuk en de bissectrice van een hoek herkennen en gebruiken in toepassingen.	26
	V	De middelloodlijn van een lijnstuk en de bissectrice van een hoek definiëren.
M7	Een hoogtelijn en een zwaartelijn van een driehoek herkennen en gebruiken in toepassingen.	26
	V	Een hoogtelijn en een zwaartelijn van een driehoek definiëren.

2 Pedagogisch-didactische wenken

M2 De begrippen *lijnstuk, lengte en hoek* zijn al vertrouwd vanuit de basisschool. De herhaling van deze begrippen kunnen verwerkt worden in *een algemene herhalingsfase,* waarbij uitgegaan wordt van observaties in en van de natuurlijke, ruimtelijke omgeving.

De begrippen kunnen beschouwd worden als ‘primitieve’ begrippen en zonder veel plichtplegingen ingevoerd en gebruikt worden. De onderlinge relaties worden gaandeweg duidelijk en zijn geen onderwerp voor uitgebreide en geïsoleerde oefeningen.

De notaties zijn zo eenvoudig mogelijk. Voor de lengte van een lijnstuk [AB] gebruiken we

|AB|, en voor de hoekgrootte van een hoek met hoekpunt A: $\hat{A}$ (of α).

M3 Het intuïtieve aanvoelen van de afstand van een punt tot de rechte (m.n. de lengte van het 'kortste lijnstuk', bepaald door het punt en het voetpunt van de loodlijn) kan effectief door meting gecontroleerd worden. In de sorteringfase vooraf kan het vergelijken van de zijden van een driehoek (een rechthoekszijde is korter dan de schuine zijde) gebruikt worden, om tot de werkwijze te komen van het gebruik van het voetpunt van de loodlijn.

Als toepassing kan de afstand tussen twee evenwijdige rechten aan bod komen.

M4 De concepten driehoek, vierhoek … behoren al tot de basiskennis van de basisschool. Toch is het zinvol bij een herhaling even aandacht te besteden aan een correcte benoeming van de verschillende elementen en het correct noteren ervan.

M5 Het begrip straal heeft een dubbele betekenis, m.n. zowel het lijnstuk als de lengte ervan. Uit de context moet blijken wat bedoeld wordt.

Het begrip middellijn wordt gebruikt in de betekenis van rechte. In verband met technische toepassingen wordt het woord 'diameter' voorbehouden voor de lengte van een koorde door het middelpunt.

Het begrip middelpuntshoek wordt ingevoerd omwille van het gebruik bij schijfdiagrammen in het tweede leerjaar. Het is niet de bedoeling de eigenschappen van middelpuntshoeken al te geven.

M6 De kenmerkende eigenschappen van middelloodlijn en bissectrice (als meetkundige plaats) blijven voorbehouden voor het tweede leerjaar. Hier wordt de voor de hand liggende definitie gegeven (bijv. voor middelloodlijn: loodlijn door het midden van het lijnstuk).

Tekensoftware biedt meestal een eenvoudige werkwijze aan voor het construeren van middelloodlijnen en bissectrices. In de aanvangsfase is het aanbevolen het tekenen nog manueel uit te voeren, d.w.z. procesmatig opgebouwd vanuit de definitie. Eens leerlingen de begrippen en de software vlot hanteren, kan hen de verkorte werkwijzen aangewezen worden.

M7 Of de hoogtelijn (zwaartelijn) als lijnstuk of als rechte functioneert, moet uit de context van de situatie blijken.

5.3.1.5 Meetkundige relaties herkennen, onderzoeken, verwoorden en gebruiken

1 Doelstellingen

M8	In het vlak - evenwijdige en snijdende rechten herkennen en het symbool // correct gebruiken; - loodrechte rechten herkennen en het symbool ⊥ correct gebruiken.		27
	E	In een vlakke figuur evenwijdige, snijdende en loodrechte lijnstukken herkennen.	
M9	In de ruimte evenwijdige en snijdende rechten herkennen.		27
	E	In een ruimtefiguur - evenwijdige en snijdende lijnstukken herkennen; - loodrechte lijnstukken herkennen.	
	V	Op een ruimtefiguur kruisende rechten herkennen.	
M10	Eigenschappen verwoorden in verband met evenwijdigheid en loodrechte stand van rechten in het vlak.		
	E	Eigenschappen onderzoeken en verwoorden in verband met zijden en diagonalen in driehoeken en vierhoeken.	
	V	Eigenschappen onderzoeken en verwoorden in verband met bijzondere lijnen in driehoeken en vierhoeken.	
M11	Punten in het vlak bepalen door middel van coördinaten.		38
	V	Punten in de ruimte bepalen door middel van coördinaten.	

2 Pedagogisch-didactische wenken

M8 Het *elementaire beheersingsniveau* wordt opgebouwd vanuit observeren van situaties, waarbij evenwijdigheid, snijden en loodrecht staan van ribben en zijden onderzocht worden. Van daaruit gebeurt de overstap naar het *basisniveau*: het evenwijdig, snijdend, loodrecht zijn van de dragers en dus van rechten. Het is belangrijk dat de leerlingen van meet af aan evenwijdigheid en snijden van rechten als exclusieve (dus complementaire) gevallen zien.

M9 *Onderlinge ligging in de ruimte* zal in de eerste graad hoofdzakelijk gekoppeld worden *aan situaties met concrete ruimtefiguren* (zoals kubus en balk), aan de onderlinge ligging van de ribben en aan ruimtelijke situaties. Maar ook hier moet geleidelijk de overstap gemaakt worden van ribben naar de dragers van die ribben.

Specifieke aandacht moet gaan naar het onderscheid tussen snijdende en kruisende rechten. Vele voorbeelden van realistische situaties in een klaslokaal, op voorwerpen of op ruimtefiguren moeten het verschil duidelijk maken tussen hun onderlinge ligging in werkelijkheid en die op een vlakke voorstelling (waar ze vaak schijnbaar snijden).

Bij onderzoekssituaties kan al aandacht besteed worden aan het formuleren van een aantal vermoedens in verband met de onderlinge ligging van rechten, van vlakken … in de ruimte. Dit is geen pleidooi om hieraan expliciete hoofdstukken te besteden! Wel om de observatie van leerlingen te richten aan de hand van vragen en om wat daaruit als leerinhoudelijke resultaten komt, aan te grijpen om de intuïtieve basiseigenschappen, die veel 'gebruikt' zullen worden, beter te verwoorden en te expliciteren.

M10 Leerlingen kunnen een aantal situaties *zelf onderzoeken op voorbeelden* door kijken en door tekenen. Het vastleggen van hun bevindingen is een eerste stap in *het verwoorden van meetkundige eigenschappen*.

Mogelijke eigenschappen zijn:

- door een punt gaat juist één rechte evenwijdig met een gegeven rechte;
- door een punt gaat juist één rechte loodrecht op een gegeven rechte;
- als twee rechten evenwijdig zijn met eenzelfde rechte, zijn ze onderling evenwijdig;
- als twee rechten loodrecht staan op eenzelfde rechte, dan zijn ze onderling evenwijdig;
- als een rechte één van twee evenwijdige rechten snijdt, dan snijdt ze de andere;
- als een rechte loodrecht staat op één van twee evenwijdige rechten, dan staat ze loodrecht op de andere.

Deze doelstelling is een voorbereiding op een meer funderende aanpak van meetkunde. Op deze eigenschappen kan gesteund worden bij redeneringen. Deze eigenschappen zullen in het tweede jaar deel uitmaken van de *gereedschapskist meetkunde eerste graad*. Niet alles hoeft (kan) hier al bewezen te worden. Nu gaat de aandacht vooral naar het onderzoeken op voorbeelden en het verwoorden. Let wel, er is bij een intuïtieve ingroeifase wel een moment nodig, waarop de vermoede eigenschap als effectieve eigenschap bevestigd wordt. Niet elk onderzocht item zal een eigenschap worden. Eén voorbeeldsituatie laat niet toe te besluiten tot 'een eigenschap'.

Een *leerlingactieve* aanpak biedt meer leerkansen. Het gaat daarbij niet alleen om de leerinhouden van deze eigenschappen zelf. Die zullen wellicht nog wel een aantal keer moeten herhaald worden vooraleer ze efficiënt zullen functioneren bij argumenteren en bewijzen. Het gaat om *de verwoordingskansen,* waarbij de leerlingen leren hun bevindingen (op ruimtelijke figuren bijvoorbeeld) adequaat te formuleren. Het is een oefening in wiskundige taalvaardigheid. Het verhogen van die vaardigheid is precies een van de doelstellingen van de eerste graad. Belangrijk daarbij is dat de leerlingen zelf zoveel mogelijk 'aan het woord zijn', en dat voor zoveel mogelijk leerlingen. Vandaar de suggestie om dit in een proces in kleinere groepen te laten verlopen (groepswerk, hoekenwerk).

Een alternatieve aanpak is geleidelijk aan een *overzicht van eigenschappen* aan te leggen die in de lessen voorkomen en die bijvoorbeeld bij observatieoefeningen of tekenoefeningen aan bod komen. Ze kunnen ook door leerlingen worden aangebracht, als ze vermoeden een 'eigenschap' te hebben ontdekt. Ofwel wordt er 'onmiddellijk' over gereflecteerd met de klasgroep (is dit een eigenschap?), ofwel wordt een aantal items opgespaard, die dan later in een gecoördineerd moment aan bod komen en waarbij leerlingen zelf proberen hun vermoedens met voorbeelden te onderbouwen of vanuit tegenvoorbeelden af te wijzen.

M11 Met evenwijdige en loodrechte rechten kan een rooster opgebouwd worden. Verbonden met getallen (via de keuze van twee getallenassen als referentieassen) kunnen *een referentiestelsel en coördinaten* ingevoerd worden. Daardoor wordt plaatsbepaling van punten mogelijk (bijv. positie aflezen op een plan, de plaats weergeven op een figuur als die in een voorstelling ervan is aangegeven en omgekeerd). Coördinaten vormen een handig hulpmiddel om figuren te bepalen, hun eigenschappen te onderzoeken of om bijvoorbeeld het beeld van een figuur door een transformatie te beschrijven (cf. tweede leerjaar).

5.3.1.6 Meet- en tekenvaardigheid ontwikkelen

1 Doelstellingen

M12	Een afstand meten met een gewenste nauwkeurigheid en hierbij geschikte eenheden en instrumenten kiezen.	32
M13	Een lijnstuk tekenen tot op een millimeter nauwkeurig.	32
M14	Een lijnstuk tekenen dat dezelfde lengte heeft als een gegeven lijnstuk.	32
M15	Een hoek meten tot op een graad nauwkeurig.	32
	V – De onderverdelingen van de graad gebruiken.	
	V – In praktische situaties de som van zestigdelige hoekmaten berekenen.	
M16	Een hoek tekenen waarvan de grootte in graden gegeven is.	32
M17	Een hoek tekenen met dezelfde hoekgrootte als een gegeven hoek.	32
M18	Een evenwijdige rechte met en een loodrechte op een gegeven rechte tekenen met behulp van een geodriehoek.	35
M19	De middelloodlijn van een lijnstuk en de bissectrice van een hoek tekenen met behulp van een geodriehoek.	26 35
M20	Middelloodlijnen, bissectrices, hoogtelijnen en zwaartelijnen in een driehoek tekenen met behulp van een geodriehoek.	26

2 Pedagogisch-didactische wenken

Deze meet- en tekenvaardigheden zijn zo fundamenteel voor het vervolg dat hierin *geen onderscheiden beheersingsniveaus* kunnen geformuleerd worden. Ze behoren tot het elementaire beheersingsniveau. Uiteraard komen situaties aan bod waarin de vaardigheid teruggebracht is tot de essentie (meet een gegeven hoek). Daarnaast worden complexere situaties gepresenteerd waarin een hoek moet gemeten worden binnen een samengestelde figuur. De leerling kan dan bijvoorbeeld wel een correcte meetprocedure uitvoeren, maar een fout begaan bij het bepalen van de hoek die te meten is.

Beter dan deze vaardigheden in enkele lessen te willen realiseren, worden geregeld meetoefeningen aangeboden, waardoor het verwerven van de vaardigheid gespreid wordt in de tijd. Dat kan bijvoorbeeld bij het onderzoeken van eigenschappen van zijden en hoeken van figuren (meten van zijden, diagonalen of hoeken om de gelijkheid ervan te onderzoeken) of bij opgaven van vraagstukken, waarbij een ontbrekend gegeven moet afgelezen (gemeten) worden van een figuur.

M12 De nauwkeurigheid van het meetresultaat wordt bepaald door de nauwkeurigheid van het meetinstrument en van de uitvoering van het meetproces (bijv. het precies aflezen). De leerlingen moeten ervaren dat meetfouten inherent zijn aan het proces. Als met meetresultaten verder gerekend wordt, moet de foutenmarge in het oog gehouden worden, evenwel zonder een foutentheorie op te zetten.

Bij het bespreken van de keuze van de geschikte eenheden en instrumenten kan meer aandacht besteed worden aan realistische meetprocessen en -instrumenten uit de praktijk of uit de technische vakken.

M15 Wat nauwkeurigheid betreft, geldt dezelfde opmerking als bij lengte. Gezien de beperktheid van de graadboog of de geodriehoek, is een beperking van het meten tot op één graad verantwoord.

Het gebruik van de geodriehoek is bij vele leerlingen nog geen vaardigheid geworden. Bij de tekenprocedures kunnen de leerlingen zo nodig werkkaarten opstellen, met de precieze procedure, geïllustreerd met veel voorkomende situaties en met aandachtspunten in verband met nauwkeurigheid (cf. de plaatsing van de geodriehoek). Het gebruik van werkkaarten of een vademecum biedt een oplossing voor het steeds opnieuw moeten herhalen van de procedures. Eens uitgelegd en geoefend kan de leerling verwezen worden naar de werkkaart. Telkens wordt de leerling geconfronteerd met zijn kennispotentieel.

In het kader van de *verdieping* van de kennis kan aan de leerlingen enig inzicht in de historische ontwikkeling van hoekmaten aangeboden worden. Meteen krijgen ze een argument waarom de gebruikelijke zestigdelige hoekmaten het decimaal stelsel niet volgen. Dat is een aanleiding om iets in te brengen over honderddelige graden, die vaak nog in de landmeting gebruikt worden.

Ook praktische toepassingen uit de techniek kunnen aanleiding zijn om de onderverdeling van de hoekmaat aan te bieden. Overleg met de leraren technische vakken is hier aangewezen. Het is alleszins niet de bedoeling uitgebreide oefeningen te maken op omrekeningen van hoekmaten. In de praktijk worden vaak decimaalgenoteerde zestigdelige graden gebruikt en wordt de indeling in minuten en seconden achterwege gelaten.

M16 Het tekenen van hoeken is nog niet door alle leerlingen volledig verworven.

Het is zinvol ruimer aandacht te besteden aan het tekenaspect. Vele leerkrachten stellen vast dat het zelf maken van een tekening voor vele leerlingen een hele opgave is. Nochtans is zelf tekenen een belangrijke vaardigheid die bij het onderzoeken van figuren van belang is. Ook hier worden oefeningen ingelast, gespreid in de tijd om de vaardigheid te onderhouden.

M18 *Het tekenen van evenwijdige rechten en loodlijnen* heeft tot doel een aantal vaardigheden te verwerven, die vlot kunnen gebruikt worden om vlakke figuren te tekenen en om transformaties in het vlak uit te voeren. Zoals aangegeven bij het onderdeel *meet- en tekenvaardigheden* wordt onderscheid gemaakt tussen tekenen en construeren. Hier volstaat “tekenen”. Doel is vooral de tekeninstrumenten, zoals een geodriehoek, vlot te leren gebruiken.

M19 Bij meetkundige “constructies” hangt de nauwkeurigheid af van het gebruikte materiaal, o.a. bij het tekenen van de bissectrice van een hoek moet ermee rekening gehouden worden dat de nauwkeurigheid van de geodriehoek beperkt is.

Merk op dat hier nog geen sprake is van ‘constructie’. Die komt aan bod in het tweede leerjaar, als het onderliggende kenmerk behandeld wordt. Nu gaat het om het gebruik van de geodriehoek. Deze tekenwijze mag als ‘elementair’ beschouwd worden.

In sommige gevallen kan het nodig zijn het gebruik van de tekeninstrumenten afzonderlijk in te oefenen. Tekenopdrachten en constructies staan echter niet op zich. Afzonderlijke oefeningen op tekenen en construeren worden best vermeden. Oefeningen moeten passen in een ruimer meetkundig kader, bijv. van oefeningen en problemen op het verder tekenen van patronen, van symmetrie …

M20 Deze doelstelling geeft inhoudelijk geen nieuwe problemen bij de realisatie. Ze biedt de mogelijkheid om de algemene tekenvaardigheid te onderhouden of bij te sturen.

5.3.1.7 Vormkenmerken van ruimtelijke en vlakke figuren herkennen, verwoorden en gebruiken

1 Doelstellingen

M21	Vlakke situaties, in het bijzonder driehoek, vierhoek en cirkel, herkennen in ruimtelijke situaties.		
	E	Vlakke figuren herkennen in de zijvlakken van een ruimtefiguur.	
	B	Vlakke figuren herkennen in de diagonaalvlakken van een kubus en een balk en deze figuur tekenen (op ware grootte of op schaal).	
	V	Vlakke figuren herkennen in een vlakke doorsnede van ruimtefiguren en deze figuur tekenen (op ware grootte of op schaal).	
M22	Verschillende soorten driehoeken definiëren.		37
	E	De begrippen driehoek, gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, scherphoekige driehoek, rechthoekige driehoek en stomphoekige driehoek correct gebruiken in toepassingen.	
M23	Verschillende soorten vierhoeken definiëren.		37
	E	De begrippen vierkant, rechthoek, ruit, parallellogram en trapezium correct gebruiken in toepassingen.	
M24	Driehoeken en vierhoeken tekenen die aan gegeven voorwaarden voldoen.		
	E	Een gelijkbenige driehoek, gelijkzijdige driehoek, scherphoekige driehoek, rechthoekige driehoek en stomphoekige driehoek, vierkant, rechthoek, ruit, parallellogram en trapezium tekenen.	
	V	Een driehoek, een vierhoek tekenen bepaald door een beperkt aantal elementen.	
M25	Aan de hand van een schets of een tekening een kubus, een balk, een recht prisma en een cilinder herkennen.		29 30
M26	Een balk en een kubus voorstellen.		29 30
	E	Een balk en een kubus schetsen.	
	V	Een kubus, een balk en een recht prisma voorstellen in een perspectieftekening (bijv. cavalièreperspectief of isometrisch perspectief).	
M27	Een ontwikkeling van een kubus en een balk tekenen.		29 30
	E	In gegeven ontwikkelingen die van een kubus en een balk herkennen.	

	E	Een ontwikkeling van een kubus en een balk tekenen.	
	U	Een ontwikkeling van een cilinder en een recht prisma tekenen.	
M28	Van een ruimtelijke figuur opgebouwd uit twee of meer kubussen verschillende aanzichten tekenen.		36
	E	Van een ruimtelijke figuur opgebouwd uit twee of meer kubussen aanzichten herkennen in een aantal gegeven 'mogelijke aanzichten'.	
	E	Van een ruimtelijke figuur opgebouwd uit twee of meer kubussen (beperkt tot twee lagen in elke dimensie) verschillende aanzichten tekenen.	
	V	Van een ruimtelijke figuur opgebouwd uit twee of meer kubussen en voorgesteld in een vlakke tekening, verschillende aanzichten tekenen.	

2 Pedagogisch-didactische wenken

M21 Om *het ruimtelijk inzicht* te versterken moeten voldoende oefeningen gemaakt worden op het herkennen van vlakke figuren (in het bijzonder driehoek, vierhoek, cirkel) in ruimtefiguren.

Bij het voorstellen van ruimtelijke situaties in een vlakke tekening wordt de vorm en de grootte niet altijd behouden. Dit leidt soms tot problemen: waarom is deze driehoek rechthoekig, waarom is deze driehoek gelijkbenig, zijn deze zijden evenwijdig, loodrecht ...? Dit leidt tot het begin van argumenteren van beweringen, zonder dat het bewijzen worden.

Omgekeerd worden ook oefeningen gemaakt, waarbij de opgave bijvoorbeeld is: het tekenen in een gegeven kubus van een gelijkzijdige driehoek waarvan al een zijde gegeven is. Of bijvoorbeeld: teken een snijvlak met een kubus waarbij de doorsnede een vierkant is.

M22 De leerlingen zijn vertrouwd met *de soorten driehoeken* vanuit het basisonderwijs. Het volstaat om te verwijzen naar de gebruikelijke terminologie voor driehoeken. Een goede herhaling kan leiden tot het formuleren van correcte definities.

Voor verder gebruik in de meetkunde is *de inclusieve naamgeving* de meest zinvolle (m.a.w. een gelijkzijdige driehoek is ook gelijkbenig). In de basisschool is de term ongelijkbenig in gebruik voor de traditioneel 'ongelijkzijdige driehoek'. Strikt logisch beschouwd (negatie) is de term ongelijkbenig een betere keuze.

Deze doelstelling sluit uiteraard ook het onderliggende herkennen van driehoeken in. Dat betekent concreet een gegeven figuur herkennen als driehoek. Dit komt al aan bod in de basisschool. Nu wordt dit gekoppeld aan het herkennen van driehoeken (en de deelcategorieën) in situaties waar leerlingen eigenschappen (en/of gegevens) moeten gebruiken om de *kenmerken* vast te stellen.

M23 De leerlingen zijn al vertrouwd met *de soorten vierhoeken* vanuit het basisonderwijs. Een goede herhaling kan leiden tot het formuleren van definities.

Voor verder gebruik in de meetkunde is *de inclusieve naamgeving* de meest zinvolle. Dat betekent: een vierkant heeft ook de eigenschappen van een rechthoek, een rechthoek ook die van een parallellogram … Of met andere woorden: 'in een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor' is een eigenschap die uiteraard geldig is voor parallellogrammen, maar ook voor vierkanten, rechthoeken en ruiten. Het is mogelijk dat de leerlingen in de basisschool lange tijd gewerkt hebben met een exclusieve naamgeving, waarbij een vierkant geen rechthoek is … Dit is een andere benaderingswijze waarvoor even zinvolle argumenten gelden als voor de inclusieve. Leerlingen moeten hier eventueel de tijd krijgen zich aan te passen.

M24 De formulering 'gegeven voorwaarden' kan op verschillende niveaus geïnterpreteerd worden. Zo is er bijvoorbeeld een aanzienlijk verschil in moeilijkheidsgraad tussen opgaven als

- teken een gelijkbenige driehoek;
- teken een ruit waarvan een punt van een zijde, een hoekpunt en een drager van de diagonaal niet door dat hoekpunt gegeven zijn.

Een geleidelijk opvoeren van de moeilijkheidsgraad is een goede en al vertrouwde didactische praktijk.

Het is moeilijk om hier een echt sluitend elementair beheersingsniveau te formuleren. Het gebruik van *een rechtstreeks kenmerkende eigenschap* in de opgave is hiervoor een haalbaar criterium.

Voorbeelden

- Teken een gelijkzijdige driehoek met zijde 6 cm (kenmerk: drie even lange zijden en gelijk aan 6 cm).
- Teken een ruit waarvan de diagonalen 4 cm en 6 cm meten (kenmerk: diagonalen delen elkaar middendoor en staan loodrecht op elkaar).

Tekenopdrachten kunnen *als observatiefase benut worden om eigenschappen te ervaren die in het curriculum zullen volgen* (bijv. bij het tekenen van driehoeken kan de driehoeksongelijkheid als vermoeden geformuleerd worden). Deze intuïtieve verkenning bereidt de latere explicitering voor.

M25 Onder *ruimtelijk inzicht* wordt verstaan: *het zich kunnen voorstellen van ruimtefiguren en zich inleven in ruimtelijke situaties waarover slechts beperkte informatie beschikbaar is.* Meer nog dan bij de vlakke meetkunde moet aandacht worden besteed aan het inzicht (dus aan het leren 'kijken naar'). Dit kan door het observeren van een aantal ruimtelijke situaties, het voorstellen van ruimtefiguren, het oplossen van vraagstukken over lichamen.

Het is niet de bedoeling in de eerste graad een systematische studie te maken van ruimtemeetkunde. De behandeling is zeer intuïtief en gebruikt slechts een minimaal aantal begrippen. De aanschouwelijkheid wordt ondersteund door het gebruik van materiaal (traditionele ruimtefiguren, blokken, foto's, afbeeldingen ...).

In technologische opvoeding worden leerlingen geconfronteerd met het voorstellen (in perspectief en met aanzichten) van ruimtefiguren. Het is zinvol de daar overeengekomen conventies te respecteren.

M26 Het is niet de bedoeling een studie te maken van de verschillende perspectiefsoorten. Voor de perspectieftekening kan *het cavalièreperspectief* gebruikt worden (vluchtlijnen evenwijdig onder een hoek van 30° of 45° en met verkortingsfactor 0,5). In technologische opvoeding wordt *het isometrisch perspectief* aangeleerd.

Het is ook niet de bedoeling om fijn afgewerkte tekeningen te maken (waarbij het gaat om de precieze uitvoering van de tekentechniek). Het is er veeleer om te doen figuren gemakkelijk te kunnen voorstellen om er meetkundig op te redeneren, zoals bij onderlinge liggingen, een doorsnede … Vandaar dat voor *het elementair niveau* 'schetsen' kan volstaan. *Toch is het maken van nauwkeurige tekeningen soms een voordeel bij het onderzoeken van een vermoeden op tekeningen* (cf. een punt ligt op een ribbe, drie rechten gaan door één punt …). Ook later zal de nauwkeurigheid van de uitvoering vaak afhankelijk zijn van de situatie die onderzocht wordt.

Het voorstellen van ruimtefiguren kan gecombineerd worden met het tekenen op schaal.

M27 Bij *het maken van een ontwikkeling* zal niet uitsluitend de meest traditionele ontwikkeling (kruisvorm) aan bod komen. Inspiratie kan daarvoor gehaald worden uit allerlei verpakkingsmateriaal.

Aan ontwikkelen zal de omgekeerde operatie gekoppeld worden, m.n. het opnieuw samenstellen van de ruimtelijke figuur. Hiervoor bestaan ICT-mogelijkheden ter illustratie.

De ontwikkeling van een cilinder komt in de basisschool voor op niveau herkennen en gebruiken.

M28 Het tekenen van ruimtelijke situaties moet gradueel opgebouwd worden.

Voldoende en effectieve observatieoefeningen van realistische situaties (met blokken) zijn nodig om het tekenen te ondersteunen.

Het associëren van een realistische situatie met voorstellingen ervan en van verschillende voorstellingen onderling, kan leiden tot het analyseren van het opgebouwde model.

Gebruik van draadmateriaal, stokjes ... is zinvol om fundamentele kijkfouten te illustreren. Het gebruik van gekleurde vlakken kan soms het inzicht ondersteunen.

Anderzijds leggen de doelstellingen (en de eindtermen) wel *het zelf tekenen* op. Een aantal oefeningen moet nog manueel worden uitgevoerd. *Het elementaire beheersingsniveau blijft beperkt tot eenvoudige figuren* (zoals in de doelstellingen vermeld wordt: kubus, balk en blokkencombinaties).

Er is software ter beschikking waarmee ruimtefiguren kunnen voorgesteld worden. Daarbij zijn applets ontwikkeld om bepaalde figuren zowel in perspectief als in aanzichten voor te stellen. Dit materiaal kan bijvoorbeeld zinvol ingezet worden om inzicht te verwerven in bepaalde procedures (cf. openklappen van balk en kubus naar ontwikkeling).

5.3.1.8 Problemen oplossen in verband met lengte, oppervlakte en volume

1 Doelstellingen

M29	Vraagstukken oplossen waarbij meetkundekennis gebruikt wordt.		
M30	Vraagstukken oplossen waarbij het begrip schaal gebruikt wordt.		33
	E	De schaal bij een gegeven figuur aflezen en op de figuur gemeten lengten omrekenen naar ware grootte.	
	B	De schaal bij een gegeven figuur aflezen en in ware grootte gemeten lengten omrekenen naar de voorstelling op schaal.	
	V	Schaal in verschillende notatievormen weergeven, en vlot van notatievorm veranderen.	
M31	Vraagstukken over de omtrek en de oppervlakte van een driehoek, een vierhoek en een cirkel oplossen.		34
	E	De omtrek en de oppervlakte van een driehoek, een vierhoek en een cirkel berekenen als de formules gegeven zijn of kunnen opgezocht worden.	
	B	De formules voor de oppervlakte van een driehoek, een vierkant, een rechthoek en een parallellogram kennen en toepassen in vraagstukken.	
	V	Een strategie ontwikkelen om de oppervlakte te berekenen van een samengestelde figuur en een onregelmatige figuur en die berekening uitvoeren.	
M32	Vraagstukken over de oppervlakte en het volume van een kubus, een balk en een cilinder oplossen.		34
	E	De oppervlakte en het volume van een kubus, een balk en een cilinder berekenen als de formules gegeven zijn of kunnen opgezocht worden.	
	B	De formules voor de oppervlakte en het volume van een kubus, een balk en een cilinder kennen en toepassen in vraagstukken.	
	U	Vraagstukken over de oppervlakte en het volume van een recht prisma oplossen.	
	U	Een strategie ontwikkelen om de oppervlakte te berekenen van een samengestelde figuur en een onregelmatige figuur en die berekening uitvoeren.	
M33	Technieken van schatten gebruiken om lengte, oppervlakte en volume te schatten en die techniek gebruiken als controle van resultaten.		

2 Pedagogisch-didactische wenken

M29 Deze doelstelling past in het kader van de aanpak van vraagstukken. Omgekeerd biedt de aanpak van vraagstukken een rijke context voor de herhaling van de inzichten en vaardigheden die in de basisschool zijn verworven in verband met *meten en metend rekenen*.

De praktijk wijst uit dat de beheersingsniveaus van de leerlingen verschillend zijn. Een gedifferentieerde aanpak is nodig. Voor de ene leerling is een aangepaste herhaling van begrippen en vaardigheden noodzakelijk, voor een andere leerling moet precies gezocht worden naar een verdere uitdaging in een terrein dat al beheerst wordt. Toch moet *voor alle leerlingen een meerwaarde* gevonden worden. De aanpak van metend rekenen in de eerste graad moet dus meer zijn dan een loutere herhaling.

Een aanpak via contractwerk of hoekenwerk biedt mogelijkheden. Daarbij is het mogelijk dat leerlingen een werkwinkel krijgen specifiek op hun niveau (bijv. een hoek om tekorten bij te werken of een hoek met moeilijkere oefeningen). Een aanpak via een project dat in groep verwerkt wordt, biedt de mogelijkheid dat de leerkracht beschikbaar is voor die leerlingen, die het meest de herhaling nodig hebben. Anderen kunnen daarentegen al meer zelfstandig werken en zelfs voor zichzelf kleine herhalingsfasen of opzoekmomenten inbouwen.

Maar ook inhoudelijk kan een meerwaarde nagestreefd worden, bijv. de omzetting van volumematen (dm^3) naar inhoudsmaten (l) en massa (kg).

In het onderdeel probleemoplossende vaardigheden - V1 is uitgebreid aangegeven, hoe op verschillende wijzen kan gedifferentieerd worden.

Voorbeelden

- Meer complexe berekeningen, bijv. gegevens op schaal versus vraagstelling in werkelijkheid.
- Situaties waarbij verschillende grootheden gecombineerd worden.
- Meer complexe situaties, waarbij gegevens of de vraag meer verborgen voorkomen.
- Situaties waarbij de oplossing gevonden wordt in combinatie met andere onderdelen, bijv. meetkundige eigenschappen, vergelijkingen …
- Het gebruik van grootheden die niet exact berekenbaar of meetbaar zijn, bijv. verkeersintensiteit, stijgingspercentage …
- De oplossing (de output) is ‘ongebruikelijk’, bijv. de oplossing is een tabel of een diagram, een meetkundige figuur …
- De probleemstelling laat toe dat de leerlingen zelf een aantal opties nemen, die de oplossing beïnvloeden, bijv. in een project zoals de inrichting van een tuin, waar er keuze is tussen soorten planten met verschillende kostprijs …

M30 Het *begrip schaal* is al gekend vanuit de basisschool. Het komt ook in meerdere vakken aan bod. Afspraken tussen de verschillende vakken zijn aangewezen. Ook over het gebruik van de verschillende notatievormen (lijnschaal, breukschaal) moet, bijv. met aardrijkskunde, afgesproken worden welke nog aangeboden worden. Wiskundig gaat het over het weergeven van de verhouding tussen de werkelijke grootte en de grootte op de figuur (vlakke figuur of ruimtelijk model). Ook een schaal groter dan 1 (de werkelijke grootte is kleiner dan de grootte op de figuur) kan aan bod komen.

Het begrip schaal komt inherent aan bod bij de voorstelling van situaties. Die voorstelling gebeurt meestal niet op ware grootte. Aanbreng van het begrip schaal kan daarin vanzelfsprekend opgenomen worden. Daarin past de kritische reflex of de getekende situatie wel enige realiteitszin vertoont: kan dit zo voorkomen?

Belangrijk aandachtspunt is *de verhoudingsfactor*. Die is bij de gebruikte schaal op een plan of plattegrond lineair (recht evenredigheid). Diezelfde verhouding geldt echter niet voor oppervlakte en volume. Dergelijke ‘fouten’ worden wel eens gemaakt bij statistische voorstellingen in twee dimensies, waarbij in elke dimensie de schaalfactor wordt toegepast.

Veeleer dan afzonderlijke lessen over het begrip schaal, wordt het gebruik ervan *gespreid in de tijd en over meerdere toepassingen*. Vraagstukken en het oplossen van problemen bieden daartoe de gelegenheid. Bij het opgeven van een probleem over een klaslokaal, kan de effectieve lengte en breedte opgeven zijn. Even zinvol is de oefening waarbij een plattegrond en de schaal ervan gegeven is. Leerlingen worden dan geconfronteerd met meten en omrekenen met behulp van schaal.

Werken met schaal biedt de mogelijkheid van motiverende toepassingen op het rekenen met breuken. De schaalfactor is meestal een ‘eenvoudige’ breuk of daartoe te herleiden. Omrekeningen in beide richtingen (van voorstelling naar realiteit en van realiteit naar voorstelling) vragen voldoende vlotheid in de rekenvaardigheid.

M31 De leerlingen kennen vanuit het basisonderwijs geen echte formules voor de omtrek van figuren. De omtrek is de som van de lengten van de zijden en wordt praktisch volgens die ‘definitie’ ook berekend.

De leerlingen kennen wel de formules voor de oppervlakte van een driehoek, een rechthoek, een parallellogram en een cirkel. Voor de berekening van de oppervlakte van andere standaardfiguren worden die meestal omgestructureerd tot deze vier basisfiguren.

In de eerste graad kan ervoor gekozen worden het aantal formules uit te breiden. De nadruk ligt alleszins op *het gebruik van de formules in realiteitsgebonden situaties*.

Door middel van omstructurering of beroostering kan de oppervlakte van andere, meer grillige figuren benaderd worden.

M32 In het basisonderwijs werd voor het berekenen van het volume van ruimtefiguren hoofdzakelijk gewerkt met de (woord)formule: oppervlakte grondvlak maal hoogte.

Ook hier ligt de nadruk op het gebruik van de formules in realiteitsgebonden situaties.

M33 Bij het oplossen van problemen is *het controleren van het resultaat van belang* (zowel op realiteitswaarde als op exactheid). Ondersteunend hierbij werkt, als het mogelijk is, het vooraf schattend benaderen van het resultaat (bijv. schatten van een afstand, van de grootte van een hoek …). Bij het schatten wordt vaak gebruik gemaakt van intuïtief verworven referentiematen. Zo kan de oppervlakte/het volume van de standaardruimtefiguren gebruikt worden om die van andere, meer willekeurige ruimtefiguren te benaderen (bijv. een schatting van het volume van een gebouw). In de praktijk gebruiken we bij het schatten van oppervlakte en volume vaak afgeronde getallen. Meteen ligt hier een kans om zowel het schatten als het afronden van getallen te integreren in vraagstukken.

5.3.2 Tweede leerjaar

5.3.2.1 Algemene doelstellingen meetkunde

1 *Meetkundige kennis en vaardigheden gebruiken om ruimtelijke en vlakke situaties te modelleren.*

2 *Meetkundige concepten ontwikkelen, herkennen, verwoorden en gebruiken.*

3 *Meetkundige relaties herkennen, onderzoeken, verwoorden en gebruiken.*

4 *Meet- en tekenvaardigheid ontwikkelen.*

5 *Eigenschappen van ruimtelijke en vlakke figuren herkennen, verwoorden en gebruiken.*

6 *Vaardigheid ontwikkelen in het argumenteren en bewijzen van beweringen.*

7 *Problemen oplossen in verband met lengte, oppervlakte en volume.*

In het eerste leerjaar werd aandacht besteed aan *het nauwkeurig omschrijven van begrippen en eigenschappen.* In het tweede leerjaar moet deze vaardigheid verder verworven worden.

Ook de vaardigheid in *het construeren* wordt verder opgebouwd. Naast de geodriehoek zal de passer gebruikt worden om meetkundige situaties en figuren te tekenen op basis van een kenmerk. Leerlingen moeten ervaren dat een grotere nauwkeurigheid kan nagestreefd worden. Ze moeten naargelang de situatie en de vooropgezette nauwkeurigheid het gepaste materiaal hanteren.

Daarnaast moet de klemtoon liggen op *het onderzoeken van eigenschappen van vlakke figuren en van meetkundige problemen.* Uit het actief onderzoeken van voorbeelden en tegenvoorbeelden moeten leerlingen een 'vermoeden' formuleren. Leerlingen ontdekken zo welke elementen relevant zijn voor de formulering. Bij het onderzoeken van eigenschappen kan de vraag naar de omgekeerde eigenschap gesteld worden. Leerlingen moeten ervaren dat de omgekeerde (eigenschap) van een eigenschap niet altijd geldt.

Leerlingen moeten de eerste stappen zetten in *het verklaren van hun redenering.* Dit expliciteren van de redenering draagt bij tot de verfijning ervan en op langere termijn tot *de vorming van hun kritische houding*.

Voor het verklaren van meetkundige redeneringen zijn een aantal voorbereidende elementen van belang. Om figuren en meetkundige situaties goed te kunnen analyseren, moeten leerlingen beschikken over voldoende 'inzicht'. Dat wordt onderbouwd door *het zelf onderzoeken van eigenschappen en problemen*, het zelf hanteren van figuren en het tekenen van situaties.

De meeste eigenschappen van vlakke figuren komen in de gebruikelijke leerlijn maar aan bod nadat *congruentie en transformaties* als middelen om ze te onderzoeken en/of te verklaren zijn ingevoerd. Het lijkt aangewezen te wachten met de realisatie van deze doelstelling tot deze twee hulpmiddelen aanwezig zijn. Toch kunnen eerder al een aantal eigenschappen onderzocht worden op basis van de gekende eigenschappen van zijden, hoeken en diagonalen. Zo kunnen een aantal teken- en constructieoefeningen aangeboden worden.

De leerlingen moeten uit de eerste graad *een zinvolle kennisorganisatie* overhouden, die hen toelaat in te analyseren situaties vlot herkenningspunten en verbanden te vinden. Dit betekent dat ze beschikken over een ‘geordend’ aantal meetkundige eigenschappen, dat vlot kan toegepast worden bij het onderzoeken van meetkundige situaties, het verklaren van eigenschappen, het oplossen van meetkundige problemen. Een vlotte en soepele verwoording en een duidelijke visuele ondersteuning zullen het gebruik van die eigenschappen verhogen. Deze *toolkit (gereedschapskist)* kan geleidelijk en samen met de leerlingen worden opgebouwd (bijv. nadat een eigenschap ontdekt en onderzocht is, kan ze al of niet toegevoegd worden aan de lijst).

Deze eigenschappen moeten niet noodzakelijk allemaal a priori gememoriseerd worden. Het veelvuldig teruggrijpen naar deze lijst zal ervoor zorgen dat leerlingen deze eigenschappen wel ‘kennen’ op niveau ‘toepassing’. *Het overzicht moet voortdurend beschikbaar zijn.* Dat kan bijvoorbeeld in de vorm van een ‘vademecum’.

Mogelijke eigenschappen (gereedschapskist):

- Eigenschappen over de gelijkheid van lengte van de zijden en de grootte van de hoeken van driehoeken en vierhoeken.
- De driehoeksongelijkheid tussen de zijden van een driehoek.
- Eigenschappen over de diagonalen van vierhoeken.
- Eigenschappen over de hoeken bij een snijlijn van evenwijdige rechten.
- De eigenschappen van de middelloodlijn van een lijnstuk en van de bissectrice van een hoek en hun omgekeerde.
- Eigenschappen van (invariantie bij) een verschuiving, een spiegeling, een draaiing.
- De congruentiekenmerken van driehoeken.
- Eigenschappen over de symmetrie in driehoeken en vierhoeken.

Belangrijk is dat deze lijst van eigenschappen geen steriel overzicht is van een aantal geziene en/of bewezen eigenschappen. De lijst moet hanteerbaar zijn in nieuwe situaties. Daarom is een ordening op basis van *bruikbaarheid* zinvol.

Voorbeelden

Met welke hulpmiddelen kan verklaard, bewezen worden dat:

- twee rechten evenwijdig zijn;
- twee hoeken even groot zijn;
- de lengten van twee lijnstukken gelijk zijn;
- een punt het midden is van een lijnstuk;
- een vierhoek een parallellogram is;
- drie punten collineair zijn?

Een dergelijke opvatting en ordening van de gekende eigenschappen zal de leerlingen meer hulp bieden bij het zelfstandig exploreren van meetkunde. Ze verwerven geleidelijk aan inzicht in welke eigenschappen voor welke meetkundige besluiten kunnen gebruikt worden (bijv. waarmee kun je aantonen dat de lengten van twee lijnstukken gelijk zijn?).

In het tweede jaar wordt een duidelijke aanvang gemaakt met het verklaren en bewijzen van eigenschappen. In de rubriek redeneervaardigheden - V5 en in 5.3.2.7 wordt hiervoor een didactische aanpak geschetst. Voor de duidelijkheid voor de gebruiker zijn in de doelstellingen met een meer inhoudelijke beschrijving zowel het verwoorden als het verklaren of bewijzen aangegeven (dat laatste tussen haakjes). Meteen is duidelijk wat per item aan leerinhoudelijke kennis moet bereikt worden. Omdat bewijzen voor de leerlingen echter een nieuwe aanpak betekent, moet er extra aandacht besteed worden aan het 'leren bewijzen'. Vandaar dat een afzonderlijke rubriek verklaren en bewijzen is opgenomen (5.3.2.7). Daarin worden de eigenschappen opgesomd waarvan de verklaring of het bewijs als basis of als verdieping wordt verwacht. De leraar kan zo gemakkelijk een strategie bepalen in de opbouw van de bewijsvaardigheid.

Tenslotte moeten de leerlingen beschikken over probleemoplossende vaardigheden. Ze moeten *meetkundige problemen kunnen en durven aanpakken.* Die vaardigheden zullen maar effectief verworven worden door zelf meetkunde te doen. De rol van de leerkracht ligt dan minder op het doorgeven van de oplossing zelf, dan wel op het doorgeven van de zoekstrategieën die gehanteerd worden.

Het verwerven van deze meetkundige competenties laat leerlingen toe inzicht te krijgen in hun wiskundige mogelijkheden, en draagt zo bij tot de ontwikkeling van hun keuzerijpheid. Dit onderdeel kan de leraar interessante informatie aanreiken in verband met de oriëntering naar de tweede graad.

5.3.2.2 Meetkundige kennis en vaardigheden gebruiken om ruimtelijke en vlakke situaties te modelleren

1 Doelstellingen

M34	Ruimtelijke en vlakke situaties onderzoeken en daarbij meetkundige concepten en relaties voorstellen en verwoorden.	

2 Pedagogisch-didactische wenken

M34 Nieuwe leerinhouden in de meetkunde van het tweede leerjaar zijn: transformaties, congruentie en gelijkvormigheid van figuren. Concepten als middelloodlijn en bissectrice komen ook weer aan bod. De leerlingen kunnen *vlakke figuren en patronen in vlakke figuren* (zoals bij friezen, behangpapier, figuren van Escher …) *onderzoeken op deze leerinhouden*. Zo krijgen ze een natuurlijke, betekenisvolle basis.

Bij het onderzoek van figuren en patronen in figuren kunnen nog andere transformaties of situaties aan bod komen (bijv. een glijspiegeling of een cirkelspiegeling). Die kunnen gebruikt worden als voorbeeld of *tegenvoorbeeld* van bepaalde eigenschappen. (Wordt een rechte op een rechte afgebeeld? Wordt de lengte behouden?) Dit kan ingezet worden *als illustratie* bij een onderzoek en komt vooral in oefeningen aan bod. Het is niet de bedoeling dat deze voorbeelden tot de theoretische basiskennis van de leerlingen gaan behoren.

5.3.2.3 Meetkundige concepten ontwikkelen, herkennen, verwoorden en gebruiken

1 Doelstellingen

M35	In het vlak figuren herkennen die het beeld zijn van een gegeven figuur door een verschuiving, een spiegeling of een draaiing.		28
	V	In het vlak figuren herkennen die het beeld zijn van een gegeven figuur door een puntspiegeling.	
M36	De eigenschappen van een verschuiving, een spiegeling en een draaiing verwoorden.		
	V	De eigenschappen van een verschuiving, een spiegeling, een draaiing verklaren door ze te illustreren met voorbeelden.	
	U	Een verschuiving, een spiegeling, een draaiing definiëren als transformatie van het vlak.	
M37	Het complement en het supplement van een hoek bepalen.		
	E	In een figuur complementaire hoeken en supplementaire hoeken benoemen.	
	B	Een complementaire hoek en een supplementaire hoek van een gegeven hoek tekenen.	
	B	De grootte van het complement en het supplement van een gegeven hoek bepalen.	

M38	Overstaande hoeken, aanliggende hoeken en nevenhoeken herkennen in vlakke situaties.	26
M39	De eigenschappen van hoeken gevormd door twee evenwijdige rechten en een snijlijn verwoorden (en verklaren).	
	E De eigenschap over hoeken gevormd door twee evenwijdige rechten en een snijlijn verwoorden.	
	B De omgekeerde van de eigenschap verwoorden.	
	V De omgekeerde van de eigenschap verklaren.	
M40	Symmetrieassen en symmetriemiddelpunten in vlakke figuren bepalen.	27 35

2 *Pedagogisch-didactische wenken*

M35 Begrippen als *spiegeling, verschuiving, draaiing* zijn nieuw voor de leerlingen. In de basisschool werd wel aandacht besteed aan het herkennen van spiegelbeelden, maar dan in een reële context en met als hoofddoel het herkennen van symmetrie in figuren.

‘Figuren herkennen die het beeld zijn van …’ houdt alleszins in dat in het leerproces uitgegaan wordt van een gegeven figuur, een gegeven situatie, waarbij leerlingen *twee figuren onderling associëren met elkaar*, als zijnde de ene het beeld van de andere door een van de genoemde transformaties. En dat ze zien, hoe die figuur beeld is van zichzelf door de transformatie.

Versieringsmotieven, meetkundige patronen uit de realiteit kunnen onderzocht worden op figuren die beeld zijn van elkaar door een verschuiving, een draaiing (i.h.b. een puntspiegeling) of een spiegeling. In deze fase is het zinvol de leerlingen niet alleen te confronteren met de traditionele spiegelingen, verschuivingen en draaiingen. Andere voorbeelden die aan bod kunnen komen zijn glijspiegelingen en uitrekkingen of inkrimpingen.

Ook de omgekeerde vraag kan aan bod komen, m.n. een deel van een versieringsmotief of patroon vervolledigen op basis van een vastgesteld of aangegeven verband, bepaald door een verschuiving, een draaiing of een spiegeling.

Het nauwkeuriger onderzoeken van enkele voorbeelden laat toe op korte tijd de verschillende *transformaties* te ontdekken en de *kenmerken* ervan te formuleren (zijn de afstanden tot de spiegelas gelijk, staan de rechten die overeenkomstige punten verbinden loodrecht op de spiegelas, zijn de lijnstukken die overeenkomstige punten verbinden evenwijdig en even lang?). Een aantal *applets* bieden de mogelijkheid transformaties te *simuleren*.

Verschuiven gebeurt intuïtief *over een bepaalde afstand volgens een bepaalde richting en in een bepaalde zin*. Draaien gebeurt *om een centrum over een bepaalde hoek volgens een bepaalde (draai)zin (wijzerzin, tegenwijzerzin)*. De begrippen georiënteerd lijnstuk en georiënteerde hoek kunnen hiervoor ingevoerd worden.

Later bij bewijzen zal het *herkennen van transformaties in figuren* een belangrijke vaardigheid zijn. Een aantal oefeningen op het louter herkennen van de transformaties in figuren, losgekoppeld van verdere meetkundige consequenties, kan zinvol zijn. Bij de draaiing wordt de draaihoek eenvoudig gehouden. De complexiteit van de aangeboden situaties (bijv. verschillende vlakke figuren door elkaar getekend, de spiegelas gaat door de figuur, een puntspiegeling met centrum in de figuur of op de rand van de figuur) kan het bereiken van deze doelstelling enigszins bemoeilijken.

In de aanvangsfase is het *symbolisch noteren* van de transformaties voor vele leerlingen een probleem. De moeilijkheid is dat de notatie de nodige informatie moet bevatten om de transformatie volledig te bepalen:

- $t_{\overrightarrow{AB}}$ is de verschuiving bepaald door het georiënteerde lijnstuk $\overrightarrow{AB}$;
- s_a is de spiegeling t.o.v. de rechte a;
- $r_{(O,30°)}$ is de draaiing om O over een georiënteerde hoek van 30°.

Dergelijk *formalisme* is lastig in het gebruik, als dit veelvuldig moet geschreven worden. We kunnen dit *vermijden door met letters t, s of r te werken* (eventueel aangevuld met indices) en eenmaal heel duidelijk aan te geven welke de karakteristieken van die transformatie zijn. Dat kan dan in een zin (t is de verschuiving bepaald door het georiënteerde lijnstuk $\overrightarrow{AB}$) of symbolisch afgekort (t = $t_{\overrightarrow{AB}}$).

M36 De *eigenschappen van de transformaties* van het vlak moeten in de eerste plaats door de leerlingen *actief onderzocht* worden *op tekeningen (bijv. met behulp van ICT of meetkundesoftware)*. Het aangegeven beheersingsniveau van de doelstelling is *'verwoorden'*. Dit sluit zeker het niveau herkennen van de eigenschap in. Waar mogelijk zal een *verklaring* gegeven worden (*we aanvaarden zomaar niet wat gezegd wordt*), maar het niveau 'formeel bewijzen' wordt niet gevraagd.

Een verklaring geven betekent hier *het plausibel maken van de eigenschap* tegen de intuïtieve verwoording die aan de begrippen verschuiving, …. gegeven is. Dat zal gebeuren door 'onderzoekjes' van situaties. In een aantal heldere situaties wordt de leerling met vraagjes naar besluiten geleid.

Voorbeeld

- Spiegel een parallellogram.
- Welke figuur is het beeld?
- Controleer dat met de zijden van de gespiegelde figuur.
- Meet de zijden van de gegeven figuur en die van de nieuwe figuur. Kun je hieruit een eigenschap afleiden over spiegeling en de lengte van zijden?
- Meet de hoeken van de gegeven figuur en die van de gespiegelde figuur. Kun je hieruit een eigenschap afleiden over spiegeling en hoekgrootte?

Merk op dat een aantal van deze situaties al aan bod zal gekomen zijn bij de verkenningsfase bij de transformaties en de fase van het tekenen van het beeld van een figuur door die transformaties. Met andere woorden *een groot deel van het daar uitgetekend materiaal kan hier als voorbereiding gebruikt worden*. Leerlingen moeten dan niet opnieuw de constructies uitvoeren. Zo wordt tijd gewonnen. Het gaat meer om *het telkens verwoorden van wat vastgesteld wordt*. Merk op dat met een *meetkundig tekenprogramma* figuren snel kunnen 'veranderd' worden (het handje). Leerlingen kunnen zo snel controleren of eigenschappen 'veralgemeend' kunnen worden.

De eigenschappen die hier bedoeld worden, zijn:

- het behoud van lengte en hoekgrootte;
- het behoud van de collineariteit (het op een rechte liggen);
- het behoud van de evenwijdigheid van rechten;
- het behoud van de loodrechte stand van rechten.

Niet al deze eigenschappen moeten als een theoretisch onderdeel aangeboden worden. Een aantal kan aan bod komen als oefeningen op onderzoeken en leren formuleren van de gevonden resultaten. De 'autoriteit' van de leerkracht wordt dan ingeroepen om vast te leggen of het gaat om een eigenschap die wordt opgenomen in de gereedschapskist.

De essentie van het leerproces ligt in *het onderzoeken en het verwoorden*. De leerlingen mogen echter niet de indruk krijgen dat elke onderzochte situatie leidt tot een eigenschap. Een voorbeeld wordt gegeven door de cirkelspiegeling, waarbij een rechte niet noodzakelijk op een rechte wordt afgebeeld.

Het verkennen van meetkundige transformaties is een goede gelegenheid om *het begrip* *'transformatie'* intuïtief te onderbouwen. Het expliciteren ervan kan als *uitbreiding* aan bod komen in de vooropleiding van sterk wiskundige studierichtingen.

M37
M38 Deze begrippen krijgen *hun volle betekenis maar in het tweede leerjaar*. In het eerste leerjaar zijn ze niet expliciet aan bod gekomen. Deze begrippen (complement van een hoek, supplement van een hoek …) passen in een leerfase waarbij leerlingen *een aantal meetoefeningen* hebben uitgevoerd. Daarbij worden situaties voorzien waarbij overstaande hoeken, aanliggende hoeken, nevenhoeken, complementaire en supplementaire hoeken voorkomen. Vanuit een ruime *sorteeroefening* met allerlei hoeken leidt een bespreking tot de begripsvorming.

Het *elementair beheersingsniveau* is *'benoemen'*. Dit betekent dat de leerlingen in een verzameling van een aantal getekende hoeken, de complementaire en de supplementaire hoeken kunnen opnoemen. Om de begrippen vlot te herkennen is wel een minimale omschrijving noodzakelijk. Door meten kunnen de leerlingen zelf de karakteristieke eigenschap ontdekken. Voor verder gebruik wordt een duidelijke verwoording nagestreefd.

M39 Bij deze eigenschap hoort een hele rij benamingen van nieuwe begrippen (verwisselende binnenhoeken …). Het is belangrijk dat leerlingen op een tekening de verschillende soorten hoeken herkennen en benoemen, en dat ze in concrete, meetkundige situaties de gelijkheden uit de eigenschap vlot kunnen herkennen, verwoorden en toepassen.

Deze eigenschap biedt de mogelijkheid aan te tonen dat twee rechten evenwijdig zijn.

In het tweede leerjaar worden de leerlingen *voor het eerst echt geconfronteerd met eigenschappen verklaren en bewijzen.* Het verklaren van de eigenschappen uit *deze doelstelling* zal *relatief intuïtief* gebeuren, op basis van een verschuiving die de evenwijdigheid van rechten en de hoekgrootte behoudt. Ook het werken via meten op een aantal voorbeelden is mogelijk. Dan moet de eigenschap nog wel als eigenschap bevestigd worden. Hoe zwaar dit 'verklaren' hier speelt, zal afhangen van de volgorde waarin de leerinhouden gepresenteerd worden.

Eens deze eigenschappen ter beschikking zijn, kunnen ze wel behoorlijk strikt gehanteerd worden in 'bewijzen' als toepassing. De hoekensom in een driehoek is daarvan een voorbeeld.

M40 Het bespreken en bepalen van symmetrieassen en/of symmetriemiddelpunten wordt gekoppeld aan betekenisvolle voorbeelden zoals bij patronen in figuren, figuren van Escher … Leerlingen kunnen deze symmetrie zelf op het spoor komen, vanuit eenvoudige voorbeelden zoals vierkanten, ruiten, rechthoeken, gelijkzijdige driehoeken … die als modellen kunnen gebruikt worden.

Ook de omgekeerde oefening kan aan bod komen, m.n. het vervolledigen van een figuur waarvan de symmetrie is aangegeven.

5.3.2.4 Meetkundige relaties herkennen, onderzoeken, verwoorden en gebruiken

1 Doelstellingen

M41	Congruente figuren herkennen.	27
M42	De congruentiekenmerken van driehoeken formuleren en illustreren door tekening.	40
	U – De congruentie van twee figuren illustreren door aan te geven door welke verschuiving, spiegeling of draaiing de ene figuur een beeld is van de andere.	
M43	Gelijkvormige figuren herkennen.	27
M44	Het verband leggen tussen gelijkvormigheid van figuren en het begrip schaal.	33
M45	Het kenmerk van de middelloodlijn van een lijnstuk verwoorden.	26
M46	Het kenmerk van de bissectrices van een paar snijdende rechten verwoorden.	26

2 Pedagogisch-didactische wenken

M41 Vanuit het basisonderwijs kennen de leerlingen *congruente figuren* als *figuren die gelijk zijn van vorm en grootte*, figuren die door 'verplaatsen' op elkaar kunnen gelegd worden. Deze kennis kan nog intuïtief gebruikt worden bij het onderzoeken van allerlei realiteitsgebonden materiaal op congruente figuren. Het begrip zal nu verfijnd worden naar gelijkheid van overeenkomstige zijden en hoeken.

M42 Het overtekenen of construeren van een driehoek leidt op een natuurlijke wijze tot de vraag naar *congruentiekenmerken*: met behulp van welke elementen, zo klein mogelijk in aantal, kan de driehoek volledig bepaald worden? Voor een aantal leerlingen volstaat deze ontegensprekelijke manier van tekenen als verklaring van de kenmerken.

Het formuleren van afzonderlijke congruentiekenmerken voor rechthoekige driehoeken is niet echt noodzakelijk. Die zijn terug te brengen tot de andere kenmerken (van willekeurige driehoeken) waarbij de rechte hoek een van de gegevens is. Uiteraard kunnen deze kenmerken als oefening onderzocht worden.

Het gebruiken van de congruentiekenmerken in verklaringen wordt ingeoefend in een stapsgewijs proces. In een eerste stap worden ze toegepast in eenvoudige, snel te herkennen situaties (bijv. bewijs in een gegeven figuur de congruentie van twee aangeduide driehoeken). Ook de vraag waarom twee gegeven driehoeken niet congruent zijn, blijkt een goede oefening te zijn om de kenmerken te herkennen. Daarna wordt overgegaan naar meer complexe toepassingen (bijv. bewijs de gelijkheid van twee hoeken), waarbij de leerling zelf op zoek moet gaan naar de driehoeken, waarvan de congruentie gebruikt zal worden.

Zowel de transformaties als de congruentiekenmerken zijn geen doel op zich, maar dienen om eigenschappen van vlakke figuren te bewijzen.

Als *uitbreiding* kan een *verband* gelegd worden *tussen congruentie en transformaties*. Het aspect 'verplaatsing' bij congruente figuren (zie M41) kan geïllustreerd worden met behulp van transformaties, zonder evenwel een formeel bewijs op te stellen.

M43 In tegenstelling tot het begrip 'congruente figuren', waar gewerkt wordt naar het verwerven van congruentiekenmerken, blijft *het begrip gelijkvormige figuren* voor alle leerlingen beperkt tot een intuïtieve verkenning. De gelijkvormigheidskenmerken komen aan bod in de tweede graad.

In de basisschool hebben leerlingen al kennis gemaakt met herkennen van '*figuren van gelijke vorm'*. Schijnbaar gaat het om dezelfde leerinhoud. Toch kan het herhalen van deze inhouden in het secundair onderwijs een meerwaarde bieden, precies door het 'verklaren' van die gelijkvormigheid, dus in het onderbouwen van de bewering. Wel zijn de gelijkvormigheidskenmerken nog niet voorhanden.

M44 Het *verband tussen gelijkvormigheid en schaal* is voor vele leerlingen moeilijk.

Het begrip schaal werd al in de basisschool en in het eerste leerjaar behandeld. Het kan meetkundig onderbouwd worden met gelijkvormigheid van figuren. Het kan verbonden worden met meetkundige voorstellingen (plan, kaart, tekening op schaal, eventueel driedimensionaal).

Schaal is een 'lineair begrip'. Dat betekent: het werkt in één dimensie. Het werkt op de lengte. Wat leerlingen vaak zien op figuren is twee dimensies (of eventueel drie). Dat schept verwarring: als op een vlakke figuur de lengten met factor twee groter worden, dan wordt de oppervlakte vier keer groter. Bij statistische voorstellingen wordt hier soms *misbruik* van gemaakt om een groter effect te bekomen. Deze passen in *een synthese tussen de leerplanonderdelen schaal, gelijkvormigheid en gebruik van diagrammen.*

Het verband tussen *gelijkvormigheid en recht evenredige grootheden* ligt voor de hand. Dat kan verwerkt worden in een aantal vraagstukken op omrekeningen in verband met lengte, oppervlakte en volume.

M45 In het eerste leerjaar hebben de leerlingen de definitie van de middelloodlijn geformuleerd en de middelloodlijn leren tekenen met behulp van een geodriehoek. Aan de hand van meetoefeningen op een gegeven figuur kan nu *de kenmerkende eigenschap* afgeleid worden. Ook de omgekeerde vraag kan op deze wijze aangebracht worden.

Kenmerkende eigenschappen zijn eigenschappen die even goed als definitie zouden kunnen fungeren. De keuze van definitie en kenmerk hangt samen met de ontwikkeling van het begrip, de beschikbare kennis, de eenvoud van de formulering, de hanteerbaarheid ... De beschikbaarheid van meerdere kenmerkende eigenschappen maakt een begrip interessant bij onderzoek, in de toepassingen en bij het verklaren van eigenschappen.

Met eigenschap wordt bedoeld: als een punt op de middelloodlijn van een lijnstuk ligt, dan zijn de afstanden van dat punt tot de uiteinden van dat lijnstuk gelijk.

M46 De opmerkingen die in M45 gemaakt zijn over middelloodlijn van een lijnstuk, kunnen hier getransfereerd worden naar bissectrices van een paar snijdende rechten.

5.3.2.5 Meet- en tekenvaardigheid ontwikkelen

1 *Doelstellingen*

M47	Het beeld van een vlakke figuur tekenen door een verschuiving, een spiegeling of een draaiing.	35
	E — Het beeld van een lijnstuk, van een driehoek bepalen door een verschuiving, een spiegeling of een draaiing.	
	E — Het beeld van een veelhoek bepalen door een verschuiving of een spiegeling, waarbij ruitjes als hulp kunnen gebruikt worden.	
	V — Het beeld van een vlakke figuur bepalen door een puntspiegeling.	
M48	Met behulp van passer een hoek construeren waarvan de hoekgrootte gelijk is aan die van een gegeven hoek, en de werkwijze verklaren met congruentiekenmerken.	
M49	De middelloodlijn van een lijnstuk en de bissectrice van een hoek construeren met behulp van de passer.	35
M50	Driehoeken en vierhoeken construeren die aan gegeven voorwaarden voldoen.	

2 *Pedagogisch-didactische wenken*

M47 *Het tekenen van het beeld van een vlakke figuur door een meetkundige transformatie* is een toepassing op de constructies van evenwijdigen, loodlijnen, hoeken ... uit het eerste leerjaar. Deze constructies werden hoofdzakelijk uitgevoerd met de geodriehoek. Het tekenen van het beeld door een draaiing is een goede gelegenheid om de constructie met de passer van een hoek met hoekgrootte gelijk aan die van een gegeven hoek aan te leren (cf. congruentie voor een verklaring).

Het uitvoeren van effectieve tekenopdrachten is nuttig om leerlingen *inzicht bij te brengen in de opbouw van figuren en het gebruik van eigenschappen en hen te confronteren met nauwkeurigheid.* Leerlingen moeten zeker een aantal eenvoudige situaties eigenhandig kunnen uitvoeren. Het zelf uitvoeren versterkt het inzicht.

Met het oog op het onderzoek van figuren op eigenschappen kan het tekenwerk beperkt worden, door gebruik te maken van ruitjespapier en een oordeelkundige plaatsing van de figuur en/of de spiegelas.

Dat wil concreet bijvoorbeeld zeggen:

- de hoekpunten van de gegeven figuur zijn roosterpunten;
- het georiënteerde lijnstuk dat de verschuiving bepaald, is door roosterpunten gegeven;
- de spiegelas van de spiegeling valt samen met een rasterlijn of met diagonalen van ruitjes;
- het centrum van de puntspiegeling is een roosterpunt.

Het gebruik van ruitjes kan leiden tot een ‘machinaal’ uitvoeren door het tellen van ruitjes. Dit geeft geen inzicht. De aandacht van de leerlingen moet gevestigd worden op het telkens opnieuw bevragen van wat ze aan het uitvoeren zijn (bijv. bij de spiegeling: ik gebruik de loodlijn op de spiegelas, ik plaats een punt op gelijke afstand …).

Het uitvoeren van transformaties met behulp van een meetkundig tekenprogramma vergt inzicht. Leerlingen moeten de juiste instructies ingeven (bijv. bij ‘spiegel punt A ten opzichte van as b’: het aanklikken van spiegeling, punt, rechte). Het inzichtelijk werken wordt dus behouden, het uitvoeren kan overgenomen worden door de computer. Dit biedt een mogelijkheid om eens een complexere figuur te transformeren. Toch is de tijd die hieraan kan besteed worden, beperkt.

Het tekenen van het beeld door een verschuiving, een spiegeling of een draaiing kan uiteraard uitgevoerd worden zonder gebruik van ruitjes. Dit is de basisdoelstelling. Wel moeten we er ons bewust van zijn dat bijv. het telkens tekenen van de loodlijnen op de spiegelas of het overbrengen van de draaihoek … een omslachtige en tijdrovende bezigheid is voor de leerlingen. We besteden beter meer tijd aan het maken van zinvolle redeneeroefeningen. Situaties waarbij alle constructies uit te voeren zijn (dus geen ruitjes), met een complexe figuur of waarbij de onderlinge ligging van figuur en spiegelas bijkomende moeilijkheden genereert, zijn te beschouwen als *uitbreiding*. Hier geldt de slogan: *beter eerst de vlotheid in tekenvaardigheid dan de complexiteit van de situatie.*

Merk op dat de doelstellingen geen melding maken van het samenstellen van verschillende transformaties. Dat komt aan bod in de tweede graad.

M49 Nu het kenmerk behandeld werd, kan de constructie met passer verklaard worden. Leerlingen moeten inzien dat het gaat om het efficiënt gebruiken van meetkundige eigenschappen. Het inzicht in het kenmerk en in de constructie worden hierdoor versterkt.

M50 In het eerste leerjaar werd al aandacht besteed aan het tekenen van driehoeken en vierhoeken. De klemtoon kan hier meer liggen op het inzichtelijk tekenen op basis van gestelde voorwaarden en eigenschappen.

5.3.2.6 Eigenschappen van ruimtelijke en vlakke figuren herkennen, verwoorden en gebruiken

1 Doelstellingen

M51	Eigenschappen in verband met zijden en hoeken in een driehoek verwoorden (en bewijzen).	31 40
E	De eigenschap van de som van de hoeken van een driehoek verwoorden.	
E	De eigenschap van de basishoeken van een gelijkbenige driehoek verwoorden.	
B	De eigenschap van de som van de hoeken van een driehoek bewijzen.	
B	De eigenschap van de basishoeken van een gelijkbenige driehoek verwoorden en bewijzen.	
B	De driehoeksongelijkheid tussen de zijden van een driehoek verwoorden.	
B	Eigenschappen over de symmetrie in een driehoek verwoorden.	
V	De omgekeerde van de eigenschap van de basishoeken van een gelijkbenige driehoek bewijzen.	
V	De driehoeksongelijkheid tussen de zijden van een driehoek verklaren.	
V	Eigenschappen over de symmetrie in een driehoek bewijzen.	
M52	Eigenschappen in verband met zijden, hoeken en diagonalen van een parallellogram, een rechthoek, een ruit en een vierkant verwoorden (en bewijzen).	26 31 40
E	Eigenschappen in verband met zijden en hoeken van een parallellogram, een rechthoek, een ruit en een vierkant verwoorden.	
E	De eigenschap van de som van de hoeken van een vierhoek verwoorden.	
B	De eigenschap van de som van de hoeken van een vierhoek bewijzen.	
B	Eigenschappen over de diagonalen van vierhoeken verwoorden.	
B	Eigenschappen over de symmetrie in een vierhoek verwoorden.	
V	Eigenschappen in verband met zijden, hoeken en diagonalen van een parallellogram, een rechthoek, een ruit en een vierkant bewijzen.	
V	Eigenschappen over de symmetrie in een vierhoek bewijzen.	
M53	Driehoeken en vierhoeken classificeren aan de hand van eigenschappen.	37
E	Driehoeken en vierhoeken classificeren op basis van de eigenschappen van zijden en hoeken.	
B	Vierhoeken classificeren op basis van de eigenschappen van hun diagonalen.	

	V Driehoeken en vierhoeken classificeren op basis van het aantal symmetrieassen.	
M54	Zich vanuit diverse vlakke weergaven een beeld vormen van een eenvoudige ruimtelijke figuur.	36
M55	Aangeven welke informatie verloren gaat in een tweedimensionale voorstelling van een driedimensionale situatie.	29
	B Aangeven welke informatie verloren is gegaan in een perspectieftekening, een projectietekening van een driedimensionale situatie.	
	U Aangeven welke informatie verloren is gegaan in een tweedimensionale voorstelling met aanzichten van een driedimensionale situatie.	
M56	Aan de hand van een schets of een tekening een kegel, een piramide en een bol herkennen.	30

2 Pedagogisch-didactische wenken

M51
M52
Merk op dat het gevraagde beheersingsniveau *verwoorden* is. Het gaat om het onderzoeken van de eigenschappen vanuit voorbeelden en tegenvoorbeelden, het afleiden van de kenmerkende voorwaarden, het formuleren van de gevolgtrekking en het verwoorden in een eigenschap.

Merk op dat een aantal van de genoemde eigenschappen al tot de intuïtieve kennis van de leerlingen behoort. Sommige zijn al aan bod gekomen als vaststelling in de basisschool (bijv. zijden en hoeken van vierhoeken, diagonalen in vierhoeken). Daar zijn het eerder vaststellingen, waarmee niet veel meer gedaan werd. Nu worden die beweringen 'eigenschappen'. Dat betekent dat ze toch enigszins moeten *geargumenteerd worden. Het vinden van vele voorbeelden geeft aanwijzingen van eigenschappen, maar dat volstaat niet om een bewering tot eigenschap te maken.* Ook dat moeten leerlingen goed beseffen. In de eerste graad kan een bevestiging van de leraar hier soms volstaan: 'Dit is een eigenschap'. *Het bewijzen van de eigenschappen is een afzonderlijke doelstelling, die niet voor alle leerlingen op hetzelfde beheersingsniveau zal worden uitgewerkt.*

Vermits een aantal eigenschappen al intuïtief gekend zijn, kan de doelstelling niet beperkt blijven tot een loutere herhaling van die kennis. *Het gaat om het inzicht verwerven in het proces van het onderzoeken van eigenschappen.* En de wijze waarop hieruit een behoorlijke formulering wordt afgeleid. In het leerproces zelf zal dus veel aandacht besteed worden aan het verwoordingproces: welke vorm (als…dan ... of … als en slechts als …); welk zijn de 'kenmerkende' voorwaarden; en zijn die allemaal nodig …; welk besluit wordt getrokken; en is er meer mogelijk?

In de onderzoeksfase kan handig gebruik gemaakt worden van meetkundesoftware om een veelvoud aan voorbeelden te creëren. Hiermee kan ook snel geïllustreerd worden dat een eigenschap niet meer geldig is, als een voorwaarde weggelaten wordt.

M53 Het *classificeren van figuren* op basis van zijden en hoeken volstaat als *elementair beheersingsniveau*. Dit kwam overigens al volwaardig aan bod in het basisonderwijs.

De classificatie *op basis van diagonalen en van symmetrie* kan verder uitgewerkt worden. Beide classificaties kunnen sporadisch in de basisschool aangebracht zijn. Nu moet het verband met de eigenschappen duidelijker aangegeven worden.

M54 Deze doelstelling is zeer ruim interpreteerbaar. Je kunt je inderdaad zeer moeilijke situaties inbeelden, waarbij het niet zo eenvoudig is je een beeld te vormen van de ruimtelijke situatie.

Kunnen zeker aan bod komen:

- de gebruikelijke ruimtefiguren zoals kubus, balk (al in eerste leerjaar aan bod), recht prisma, piramide, cilinder, kegel en bol;
- eenvoudige blokkencombinaties;
- combinaties van twee of drie gebruikelijke ruimtefiguren (bijv. toren bestaande uit balk en piramide, cilinder en kegel).

Onder diverse weergaven kan verstaan worden: *een perspectieftekening, een voorstelling door een parallelprojectie, en de voorstelling met aanzichten.*

- De *perspectieftekening* kan zeker aan bod komen om de problematiek van de vlakke voorstelling aan te geven (verlies van hoekgrootte, van loodrechte stand, van lengte …). Toch is het niet de bedoeling om binnen wiskunde zelf voorwerpen in perspectief te laten voorstellen. Een samenwerking met plastische opvoeding is hier mogelijk.
- In wiskunde wordt geopteerd voor een vereenvoudigde vorm van voorstellen door middel van parallelprojectie. Twee voorstellingsvormen springen in het oog: *cavalièreperspectief en isometrische projectie*. Samenspraak in de vakgroep wiskunde (van de eerste graad) en met de vakgroep van technologische opvoeding is noodzakelijk. Het is aangewezen in het eerste en het tweede jaar dezelfde opties te gebruiken.
- In het tweede jaar wordt aandacht besteed aan *aanzichten*. En de wisseling in voorstelling (dus van aanzichten naar cavalièreperspectief, van cavalièreperspectief naar aanzichten). Een tussenfase kan zijn de overgang ook effectief met blokken te laten uitvoeren (twee aanzichten gegeven, maak de combinatie; cavalièreperspectief gegeven, maak het bouwwerk).

M55 Het gaat hier meer om *herkennen en identificeren,* dan wel zelf tekenen. Het gaat over *het lezen en interpreteren van gegeven figuren*, dan wel het zelf maken van figuren. Oefening in het associëren van een vlakke voorstelling (tekening) en de ruimtefiguur zelf, of van een perspectiefvoorstelling en aanzichten van eenzelfde figuur kunnen aan bod komen. Het verbeteren van foutieve tekeningen en het aanvullen van tekeningen kunnen de leerlingen op weg zetten naar het zelf maken van de voorstellingen.

M56 De meest voor de hand liggende tekening of schets die hier kan gebruikt worden, is de perspectieftekening. Ruimtelijke figuren of draadmodellen kunnen ondersteunend werken.

Ook aanzichten en ontwikkeling kunnen bij verdieping als voorstelling gehanteerd worden.

5.3.2.7 Vaardigheid ontwikkelen in het argumenteren en bewijzen van beweringen

1 *Doelstellingen*

M57	Vaardigheid ontwikkelen in het argumenteren van beweringen.	40
	E	Eigenschappen en redeneringen argumenteren als daarbij ondersteuning wordt aangeboden.
	B	De eigenschappen van hoeken gevormd door twee evenwijdige rechten en een snijlijn verklaren.
	B	De eigenschap van de middelloodlijn van een lijnstuk bewijzen.
	B	De eigenschap van de bissectrices van een paar snijdende rechten bewijzen.
	B	De eigenschap van de som van de hoeken van een driehoek en van een vierhoek bewijzen.
	B	De eigenschap van de basishoeken van een gelijkbenige driehoek bewijzen.
	V	De eigenschappen van een verschuiving, een spiegeling, een draaiing verklaren door ze te illustreren op voorbeelden.
	V	De constructie van een hoek waarvan de hoekgrootte gelijk is aan die van een gegeven hoek verklaren met congruentiekenmerken.
	V	De omgekeerde (eigenschap) van de eigenschap van hoeken gevormd door twee evenwijdige rechten en een snijlijn verklaren.
	V	De omgekeerde van de eigenschap van de middelloodlijn bewijzen.
	V	De omgekeerde van de eigenschap van de bissectrices van een paar snijdende rechten bewijzen.
	V	De omgekeerde van de eigenschap van de basishoeken van een gelijkbenige driehoek bewijzen.
	V	De driehoeksongelijkheid tussen de zijden van een driehoek verklaren.
	V	Eigenschappen over de symmetrie in een driehoek bewijzen.
	V	Eigenschappen in verband met zijden, hoeken en diagonalen van een parallellogram, een rechthoek, een ruit en een vierkant bewijzen.
	V	Eigenschappen over de symmetrie in een vierhoek bewijzen.

2 *Pedagogisch-didactische wenken*

M57 *Het argumenteren en bewijzen van meetkundige eigenschappen biedt een ideale kans om alle fasen van het redeneren te doorlopen.* Vanaf een onderzoek op voorbeelden en tegenvoorbeelden, al of niet gesteund door ICT-gebruik (meetkundige software), kunnen leerlingen komen tot het behoorlijk formuleren van een vermoeden of hypothese. In het onderzoeksproces worden ze al geconfronteerd met argumenten, die bij het opstellen van een verklaring nog moeten verfijnd worden. Zoals al beschreven in het onderdeel redeneervaardigheden (5.1) wordt dit proces afgesloten met het uitschrijven van een ordelijk bewijs. Ordelijk betekent dan niet alleen overzichtelijk en net geschreven, maar ook volgens “logische gevolgtrekkingen” (zonder dat er noodzakelijk logica bij betrokken wordt).

Het opstellen van een *meetkunde”bewijs”* bestaat gewoonlijk uit volgende *drie fase*n.

- De eerste fase is *het ontdekken van de kernidee van het bewijs.*
    - Welke transformatie beeldt een figuur af op zichzelf of op een andere figuur?
    - Welke congruente driehoeken kunnen gebruikt worden?
    - Welke hulplijn(en) moet(en) getekend worden?
- Dan volgt *het verfijnen van de redenering, het verklaren.*
    - Waarom wordt figuur 1 precies op zichzelf of op figuur 2 afgebeeld?
    - Waarom zijn de driehoeken congruent?
    - Waarom mag die eigenschap in deze situatie toegepast worden?
- Pas daarna volgt in een derde fase *het ordelijk uitschrijven* van het gevonden bewijs.

In het onderdeel redeneervaardigheden werd ruim ingegaan op de aanpak ervan in de lessen. Merk nog op dat het al of niet bewijzen van een eigenschap geen rechtstreeks verband houdt met het ter beschikking zijn van eigenschappen. In de eerste graad is het mogelijk dat aan leerlingen (of aan bepaalde groepen van leerlingen) een bewering als eigenschap geconfirmeerd wordt ‘op gezag van de leraar’. Beter dan de onmogelijke taak op te nemen ‘alles’ te willen bewijzen, worden *duidelijke en overzichtelijke bewijzen als model voor een bepaalde wijze van redeneren* aangeboden (zie de eigenschappen opgesomd bij het basisbeheersingsniveau). Het doel van bewijsvaardigheid is niet (uitsluitend) te overtuigen van de juistheid van de bewering, maar wel *denkwijzen en denkprocessen te ontwikkelen die leiden tot het beredeneren en het argumenteren van een bewering*. Dat is wat het grootste deel van de leerlingen zal overhouden van ‘bewijsvaardigheid’: het onderbouwen van hun standpunten, die later niet noodzakelijk wiskundig zullen zijn, met argumenten.

Zoals aangegeven in deel 5.1 kan het verwerven van redeneervaardigheid maar stapsgewijze verlopen. De eerste graad legt hier de basis voor de verdere ontwikkeling ervan in de tweede en de derde graad (en al of niet afhankelijk van de gekozen doorstroming). Meetkunde biedt heel wat kansen om dat proces te ondersteunen vanuit het voorafgaand onderzoek op voorbeelden, vanuit het gebruik van figuren en vanuit het gebruik van enkele duidelijke standaardschema’s, die het opstellen van een bewijs vereenvoudigen. (Bijv. bij congruentie. Welke driehoeken? Welk congruentiegeval? Welke overeenkomstige elementen in de driehoeken?) Ervaring toont dat een aantal leerlingen met dergelijke *schematische steun* wel zelf tot het bewijs kan komen. Andere leerlingen hebben die schema’s helemaal niet nodig. Toch kan het eveneens voor hen een hulp zijn om hun denken beter te leren structureren.

Gezien de zeer heterogene samenstelling van de leerlingengroepen en de uiteenlopende moeilijkheidsgraad van bewijzen moeten de aanbevelingen soepel geïnterpreteerd worden. De leraar zal de mogelijkheden, om hier al of niet verder op door te gaan, moeten afwegen tegen de beheersingsniveaus die de leerlingen van de klasgroep aankunnen. Met andere woorden, hier liggen heel wat kansen tot *differentiatie en verdieping*.

5.3.2.8 Problemen oplossen in verband met lengte, oppervlakte en volume

1 Doelstellingen

M58	Vraagstukken oplossen waarbij meetkundekennis gebruikt wordt.	
	B	Technieken van schatten gebruiken om lengte, oppervlakte en volume te schatten en die technieken gebruiken als controle van resultaten.
	U	Vraagstukken in verband met het volume van een kegel, een piramide en een bol oplossen.

2 Pedagogisch-didactische wenken

M58 De formule voor het volume (de inhoud) van een kegel en een piramide kan experimenteel afgeleid worden door het (die) te vergelijken met dat (die) van een cilinder en een recht prisma met dezelfde hoogte. Vraagstukken in verband met volume stellen de vraag naar de voorstelling van de hoogte in kegel en piramide.

5.4 Verdeling van de lestijden

Deze verdeling is opgemaakt op basis van de leerplandoelstellingen en de groepering ervan volgens het inhoudelijke criterium. Een doelstelling kan op verschillende plaatsen aan bod komen (cf. de letters a, b, c …). Het overzicht van de doelstellingen hoeft niet als richtinggevend aangezien te worden.

Inhoud is niet het enige criterium. Ook de realisatie van de leerplandoelstellingen over vaardigheden en attitudes behoort tot de opdracht van de wiskundevorming. De koppeling ervan aan lesdoelen werd uitvoerig toegelicht in de pedagogisch-didactische wenken van die onderdelen (5.1) en in deze van de leerinhoudelijke doelstellingen. De verdeling houdt rekening met de tijd die moet uitgetrokken worden om die vaardigheden en attitudes te ontwikkelen.

Voor het lesrooster werd uitgegaan van het voorziene minimaal aantal van vier wekelijkse lestijden wiskunde. De uitbreiding van de lestijden naar wekelijks vijf of meer kan besteed worden aan de verdieping van de leerstof en/of aan remediëring volgens de invulling die hieraan in het eigen schoolproject wordt gegeven. Het verdient aanbeveling deze opties te bespreken op de vakvergadering wiskunde en ze vast te leggen in een vakverslag.

De indeling in getallenleer en meetkunde is richtinggevend. Grondige afwijking hiervan kan de realisatie van een van deze onderdelen in gevaar brengen. De verdeling van de lestijden per onderdeel is suggestief voor een modale klas. Dat betekent dat afwijking hiervan mogelijk is volgens de specifieke noden en mogelijkheden van de klasgroep.

5.4.1 Eerste leerjaar

5.4.1.1 Getallenleer - 65 lestijden

Getallenkennis	G1a, G4a, G7a, G10a, G11a, G15, G16, G17, G18a, G19a, G24, G25, G26, G27, G28a, G29a, G30a, G31a, G32, G32a, G34, G35a, G36a	10
Bewerkingen	G2, G8a, G9, G10b, G11b, G12a, G13a, G14a, G18b, G19b, G21a, G28b, G29b, G30b, G31b, G35b, G36b	25-30
Problemen aanpakken	G1b, G3, G4b, G8b, G11c, G12b, G13b, G14b, G18c, G32b	30-25
Regelmaat en patronen	G1c, G5a, G19c, G20a, G21b	
Diagrammen, grafieken	G5b, G6, G7b, G21c	
Vergelijkingen	G19d, G20b, G22, G23	

5.4.1.2 Meetkunde - 35 lestijden

Verkenning van de ruimte en het vlak	M1a, M2a, M3a, M4a, M8a, M9a, M10a, M15a, M21a, M25a	14
Begrippen, onderlinge ligging	M1b, M2b, M3b, M6a, M7a, M8b, M9b, M10b, M11a	
Lengte, hoekgrootte	M1c, M2c, M12, M15b	
Tekenen	M1d, M11b, M13, M14a, M16, M17, M18, M19, M20a, M24a	
Vlakke figuren	M1e, M4b, M5a, M6b, M7b, M21b, M22,M23, M24b	7-9
Ruimtefiguren	M1f, M25b, M26, M27, M28	5
Problemen aanpakken	M1g, M3c, M4c, M5b, M8c, M9c, M11c, M14b, M20b, M24c, M29,	9-7
Omtrek, oppervlakte	M1h, M31, M32, M33	
Schaal	M1i, M30	

5.4.2 Tweede leerjaar

5.4.2.1 Getallenleer - 55 lestijden

Bewerkingen	G37a, G56a	12
Machten	G38a, G44, G45a, G55, G56b	
Problemen aanpakken	G37b, G38b, G39, G45b, G56c	28
Evenredigheden	G40, G41, G42, G46a, G54	
Diagrammen, grafieken	G43	
Vergelijkingen	G46b, G47, G48	
Algebraïsch rekenen	G49, G50, G51, G52, G53	15

5.4.2.2 Meetkunde - 45 lestijden

Transformaties	M35a, M36, M40a, M47	7-10
Snijlijn evenwijdigen	M37a, M38a, M39a	3-5
Congruentie	M41a, M42, M48a,	5
Ruimtemeetkunde	M54, M55, M56, M58a	5
Problemen aanpakken	M34a, M35b, M37b, M38b, M40b, M41b, M43, M44, M50a, M52a, M52b, M58b	7
Eigenschappen onderzoeken, argumenteren en bewijzen	M34b, M39b, M40c, M45, M46, M48b, M49, M50b, M51, M52b, M53, M57	15-20

6 Evaluatie

Het is niet moeilijk in te zien dat leerprocessen beter (vlotter) zullen verlopen als de leerling regelmatig informatie krijgt over zijn vorderingen en als de leerkracht een goed inzicht heeft in de aard van de eventueel optredende problemen. Evaluatie is daartoe een uitgelezen middel en vormt een belangrijk onderdeel van het onderwijsleerproces.

Schoolcultuur

De gehanteerde terminologie in verband met evaluatie, de verschillende opvattingen over de functie, de organisatievorm, de rapportering ... zijn echter *niet eensluidend*. Deze verscheidenheid wordt geïllustreerd door de verschillende betekenissen die bijvoorbeeld gegeven worden aan termen als toets, examen, permanente evaluatie, formatieve evaluatie, dagelijks werk, enz. Daarom is evaluatie van leerlingen en wat ermee gebeurt vaak verbonden met *een schooleigen cultuur*. Evaluatie van wiskunde moet hierin passen, omdat evaluatie over de vakken en de jaren heen wel een zekere eenvormigheid en duidelijkheid moet vertonen.

Functies van evalueren

Evalueren is het *waarderen* van iets of iemand. De term evalueren wordt in het onderwijs gebruikt voor waardering, als deze niet 'uit de lucht komt vallen', maar opgenomen is in de rij meten, waarderen, beslissen. Evaluaties gebeuren intentioneel. Evaluaties zijn niet vrijblijvend, omdat ze leiden tot een bepaalde *beslissing*. De functies van evalueren zijn verbonden met de aard van de beslissingssituaties.

Evaluatie kan de functie hebben van *resultaatsbeoordeling*. Over een periode van langere duur wordt het rendement van het onderwijsleerproces vastgesteld. Meestal gebeurt dit aan de hand van examens of summatieve toetsen. Deze vorm is allicht het meest vertrouwd.

Evaluatie kan de functie hebben van *plaatsing, oriëntering en selectie*. Evaluatiegegevens worden bijvoorbeeld gebruikt om leerlingengroepen samen te stellen, om differentiatie mogelijk te maken, om leerlingen te oriënteren naar de meest geschikte studierichting, of toe te laten tot een studierichting.

Evaluatie kan de functie van *diagnose* krijgen. Diagnose kan elke activiteit van de leerkracht zijn die erop gericht is een beeld te krijgen van de vorderingen van de leerlingen. Op de vaststelling van de aard en de oorzaak van de leermoeilijkheden kan dan een plan volgen om dit tekort te remediëren of bij te sturen.

In dezelfde zin kan een diagnose opgemaakt worden van de vorderingen van de leerlingen in verband met redeneer- en probleemoplossende vaardigheden. Vanuit een goed inzicht in de mogelijkheden en feitelijke situatie kunnen de leerlingen beter begeleid worden in hun leerproces.

Evaluatie kan de functie krijgen van *sturing van het onderwijsleerproces*. Er wordt informatie verzameld over de vorderingen van de leerlingen om het leerproces beter te organiseren. Dit soort evaluatie gebeurt voortdurend tijdens het leerproces. De leerling krijgt informatie over zijn vorderingen, de leerkracht krijgt informatie over het verloop van het leerproces.

Een bijzondere plaats wordt gegeven aan het evalueren van de beginsituatie. Dit kan leiden tot een georganiseerde herhaling met een gedifferentieerde aanpak. Het is zinvol gerichte herhalings- of remediëringspakketten te voorzien, die door de leerlingen zelfstandig worden verwerkt.

Evaluatie is medebepalend voor *de 'beslissing' op de scharniermomenten van het lesverloop*. De verkregen informatie kan door de leerkracht gebruikt worden om zijn didactisch handelen te beoordelen en te sturen. Bijsturing kan betrekking hebben op een aantal uiteenlopende factoren, bijvoorbeeld de leerinhoud kan te moeilijk zijn, de doelstellingen te hoog gegrepen, het tempo te hoog (of te laag), het beginniveau kan verkeerd ingeschat zijn, er kunnen problemen zijn van motivationele aard ... De leerkracht kan hierop inspelen door een bijkomend voorbeeld te geven, de formulering van een definitie of een eigenschap te hernemen, de voorziene oefeningen te beperken of aan te vullen … Sturing kan betekenen dat de leerkracht *gedifferentieerd* ingaat op de mogelijkheden van de leerlingen met aangepast oefeningenmateriaal, met remediëring, met ondersteuning van het leerproces door het leren van wiskunde te bespreken. Dergelijke sturing kan positief onderscheidend werken, bijv. door aan bepaalde leerlingen optimale ontwikkelingskansen te bieden door hen te confronteren met meer open problemen, met meer individuele tips over hun oplossingsproces, met gerichte aanwijzingen over heuristische methoden ….

Evaluatie in de brede betekenis heeft zowel betrekking op het beoordelen van de leerlingen en de beslissingen die hieraan verbonden worden, als op de informatie over het verloop van het onderwijs-leerproces zowel voor de leerling als voor de leerkracht. Ze kan betrekking hebben op een meer vrijblijvende begeleiding of op een beslissing met ingrijpende gevolgen voor de studieloopbaan (met meer of minder wiskunde).

Evaluatie van kennis en inzicht

De essentie van wiskundekennis is *de kennis van en het inzicht in begrippen en eigenschappen*. Dit houdt in: het kunnen geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden, het herkennen van het begrip of de eigenschap in contextsituaties, het kennen van de betekenis ervan, het kennen van een formulering van een definitie of de eigenschap, het kunnen toepassen ervan in diverse contextsituaties.

Evaluatie van het inzicht in begrippen en eigenschappen zou *de verschillende aspecten* moeten onderzoeken. Het *kennen* van een eigenschap *impliceert niet* vanzelfsprekend dat ze kan *toegepast* worden en omgekeerd. Dit impliceert dat ook in de evaluatie *in de loop van het onderwijsleerproces* meer aandacht moet besteed worden aan voornoemde aspecten.

Evaluatie zou ertoe moeten leiden dat de leerkracht nog tijdens het onderwijsleerproces informatie verwerft over misverstanden over begrippen, eigenschappen en methoden bij de leerlingen. Ze kunnen dan sneller bijgestuurd worden. Voor een leerling is het belangrijk te weten op welk niveau een begrip moet gekend zijn en waar hij zich in het leerproces bevindt. Zo kan hij de geboden hulp beter begrijpen en opnemen, of kan hij zelf een beter aangepaste leermethode kiezen.

Van een aantal begrippen, rekenregels en eigenschappen kan gesteld worden dat ze tot de *parate kennis* van de leerlingen moeten behoren. Deze parate kennis moet *als paraat getoetst* worden en geregeld in de loop van het jaar. Kennis waarvan aanvaard is dat ze niet meteen paraat moet beheerst worden, maar bijvoorbeeld wel is opgenomen in *een vademecum*, kan getoetst worden met gebruik van het vademecum. Voorwaarde is natuurlijk dat leerlingen er buiten de evaluatiemomenten functioneel mee leren werken.

Over het algemeen wordt aangenomen dat in het geheel van de toetsing een goede spreiding van de leerinhouden over *de verschillende kennisniveaus* (kennis, inzicht en toepassing) wenselijk is.

Evaluatie van vaardigheden

Vaardigheden moeten *als vaardigheden geëvalueerd* worden. Bij vaardigheid gaat het meestal niet over het weergeven van specifieke kennis, maar over *de wijze van uitvoeren of aanpakken*. Dat betekent dat meer dan bij kennis procesevaluatie aangewezen is. Het is zinvol een zogenaamde vaardigheidsanalyse te maken, d.w.z. een overzichtelijke lijst te maken van welke stappen leerlingen kunnen (moeten) zetten om de vaardigheid te verwerven of aan te wenden. (Bijvoorbeeld: welke rekenprocedures zijn voorhanden en hoe flexibel wordt hiermee omgegaan?) Deze lijst wordt dan gebruikt om leerlingen in het leerproces (stapsgewijze) te observeren. Vanuit dergelijke feedback kan de leerling zich dan beter bijsturen.

De leerling moet wiskundige procedures, methoden en technieken behoorlijk en efficiënt kunnen uitvoeren. Dit betekent dat ook de *procedure* (bijv. de verschillende stappen) moet geëvalueerd worden en niet slechts het eindresultaat. Hierin is ook ruimte voor evaluatie van de zelfcontrole van de leerling en voor het gecontroleerd uitvoeren (bijv. schatten, grootteorde, elementaire fouten vermijdend). Ook hier geeft de terugkoppeling, die leerlingen krijgen over de uitvoering tijdens het leerproces zelf, sneller inzicht in de gemaakte fouten.

Voor de toetsing van vaardigheden is het aan te bevelen om een in de tijd *gespreide toetsing* uit te voeren. Dit betekent dat het bezitten van een vaardigheid niet afhankelijk gemaakt wordt van het bezit ervan op dat ene examenmoment. Als feedback en bijsturing als doel wordt genomen, dan is permanente evaluatie bij vaardigheden aangewezen.

Technische vaardigheden

Voor de *evaluatie van hoofdrekenen* is het aangewezen dat de leerling geregeld beoordeeld wordt, al of niet op basis van enkele getoetste oefeningen. Daarbij speelt niet alleen het aantal oefeningen waarop correct werd geantwoord een rol, maar ook de vlotheid waarmee dit gebeurt (bijv. tijd). Anderzijds behoort *de evaluatie van de rekengedragingen* tot de beoordeling: nemen leerlingen vlot de hoofdrekenweg of grijpen ze te pas en te onpas naar hun rekenmachine. Door de feedback te concentreren op deze evaluatie kunnen we de leerlingen misschien meer bewegen tot effectief hoofdrekenen. Wellicht kan dat ook door hen af en toe bij een taak te confronteren met een beperkte reflectieopdracht over hun aanpak: heb ik deze opgave met hoofdrekenen opgelost, was dat zinvol, en eventueel waarom niet?

Het is evident dat de hulpmiddelen die tijdens het jaarwerk kunnen gebruikt worden, ook bij de evaluatiemomenten (toetsen zowel als examens) ter beschikking staan. Het is belangrijk om hierover duidelijke afspraken te maken met de leerlingen en in de vakgroep.

Dit is geen pleidooi om de rekenmachine onbeperkt toe te laten. De verwachting van leraren naar een zekere *parate kennis en voldoende rekenvaardigheid* bij de leerlingen is even redelijk als die van de argumentatie voor een zinvol gebruik van de rekenmachine. Zo is het zinvol in sommige situaties het gebruik van de rekenmachine uit te sluiten. Op de toetsen en examens kan een deel van de evaluatietijd besteed worden aan opgaven *waarbij de rekenmachine niet mag ingeschakeld worden of aan het opvragen van parate kennis* (zo wordt het zogenaamd opslaan van formules in het toestel opgevangen). Zo wordt duidelijker getoetst wat moet getoetst worden: rekenvaardigheid en parate kennis. Wiskundig sterke leerlingen zullen uiteraard dat arsenaal vlot kunnen gebruiken. Wiskundig zwakkere leerlingen zullen dan weer gebaat zijn *met de ondersteuning van de rekenmachine en een formularium, als de toetsing over andere doelstellingen gaat.* Bijvoorbeeld het kunnen oplossen van een vraagstuk of een deelaspect ervan, het kunnen mathematiseren van de opgave, kan duidelijker getoetst worden. Dat de leerling daarbij een hulpmiddel gebruikt, geeft geen problemen. Integendeel, het oordeelkundige gebruik van hulpbronnen behoort tot goede leervaardigheden

Bij het rekenen en het oplossen van problemen is *het schatten* van belang. Specifieke schatoefeningen kunnen inzicht geven in de kennis van schatprocedures. Dit kan onderwerp zijn van ‘inhoudelijke’ toetsing. Maar belangrijker dan deze inhoudelijke toetsing is *de evaluatie van de schatattitudes*. Dit kan gebeuren via een alternatieve evaluatie, onder meer door gebruik van observatieschema’s gedurende een werkles wiskunde. Als leraar zie je vrij vlug of de leerling spontaan naar de schatting grijpt of niet. Zoals met attitudes meestal het geval is, zal dit resulteren in een woordelijke feedback over de attitudes.

Voor het *tekenen* gelden gelijkaardige opmerkingen. Enerzijds kan de inhoudelijke kennis van methoden getoetst worden. Anderzijds is het flexibel omgaan met deze vaardigheid onderwerp van terugkoppeling, en van evaluatie. Ook hier past permanente evaluatie tijdens de uit te voeren opdrachten.

Taalvaardigheden

Het evalueren van de *wiskundige taalvaardigheid* is in de eerste graad moeilijk. Zoals aangegeven is de wiskundige taal van de leerlingen nog *in volle ontwikkeling*. De eerste graad is daarin voor vele leerlingen een scharniermoment.

De wijze waarop de leerling omgaat met de formulering van definities en eigenschappen maakt alleszins deel uit van de wiskundige taalvaardigheid. Anderzijds is in het onderdeel taalvaardigheden gepleit voor een ruimere benadering. *Het gaat ook over de beheersing van de wiskundetaal in redeneringen, in het analyseren van opdrachten en vraagstukken, in het formuleren van vermoedens …* In deze gevallen lijkt het aangewezen de evaluatie vooral te richten op (snelle) feedback aan de leerling zelf. Permanente evaluatie is meer aangewezen dan een eenmalige opvraging van een gememoriseerde tekst van een definitie of een eigenschap.

Het voldoende vlot beheersen van de wiskundetaal is een absolute noodzaak voor leerlingen die doorstromen in een studierichting met een ruimer pakket wiskunde in de tweede graad. *De evaluatie van taalvaardigheid geeft dan ook belangrijke signalen over de oriënteringmogelijkheden van de leerlingen.*

Een aantal leerlingen krijgt *vanuit de leerzorgondersteuning bijkomende taalsteun.* Die kadert best in een schoolse aanpak en afspraken. Binnen dat kader kunnen deze leerlingen beschikken over die taalsteun op toetsing en examens. Anderzijds mag deze taalsteun niet leiden tot een vertekend beeld van de werkelijke kennis en de mogelijkheden van de leerling op zijn wiskundig kunnen.

Redeneervaardigheden

Nog meer dan bij taalvaardigheden is omzichtigheid geboden bij de evaluatie van redeneervaardigheden. Zoals aangegeven in de rubriek redeneervaardigheden bij 5.1 gaat het hier om een breed terrein, waarbij zowel *het reproduceren en opstellen van bewijzen hoort, als het opbouwen van redeneringen vanaf het onderzoeken van een vermoeden, het vinden van argumenten …* De eerste graad is een scharniermoment waar leerlingen er voor het eerst intensief mee geconfronteerd worden. Op basis van hun ervaring maken ze een keuze voor een doorstroming in sterk of minder sterk uitgebouwde wiskunde. *De mate waarin leerlingen deze processen beheersen, is een aanwijzing voor de oriëntering op het einde van de eerste graad.* Het al of niet kunnen reproduceren van een aangeleerd bewijs heeft hierin een plaats, maar die is toch eerder beperkt.

Zoals in het onderdeel meetkunde aangegeven, kunnen leerlingen in de aanvangsfase van het leren bewijzen van eigenschappen *een aantal schema's ter ondersteuning* krijgen. Ook bij de toetsing kunnen ze die in beperkte mate blijven gebruiken. Daardoor kan een duidelijkere differentiële diagnose gesteld worden tussen enerzijds leerlingen die het bewijzen en argumenteren aankunnen zonder hulp en anderzijds diegenen die nog moeten terugvallen op die hulp. Ook dit is een element bij de oriëntering van leerlingen.

Probleemoplossende vaardigheden

De aandacht voor het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden leidt tot het aanbieden van meer open gestelde problemen, meer aan context gebonden vraagstukken …. Het oplossen van dergelijke problemen is een complex proces. Meer nog dan elders is feedback zowel *over het proces* als *over het eindproduct* belangrijk. De leerling zou informatie moeten krijgen over zijn kennis en de vaardigheid waarmee hij die kan hanteren, over de wijze van omgaan met de vraagstelling, het gebruik van gegeven informatie, het formuleren van vermoedens, over de vaardigheid waarmee heuristische methoden gehanteerd worden, over de sturing van zijn oplossingsproces en de wijze van interpreteren en verifiëren van resultaten.

Evaluatie van probleemoplossende vaardigheden heeft maar zin als *tijdens het proces* de wijze van werken van de leerling *systematisch, weloverwogen en voortdurend wordt opgevolgd*. Dergelijke evaluatie kan het vertrouwen van de leerling in zijn mogelijkheden sterk beïnvloeden. De leerkracht krijgt tijdens het leerproces belangrijke feedback, bijvoorbeeld over welke problemen uitdagend zijn, welke instructief, welke interesse wekken, welke niet succesvol zijn.

Reflectieve vaardigheden

Naast probleemoplossende vaardigheden wordt aandacht besteed aan het ontwikkelen van *reflectieve vaardigheden* bij de leerlingen. Dat wil zeggen het leren terugkijken op een proces dat 'afgelopen' is. Daarvan worden de leerkansen geconcretiseerd en geëxpliciteerd. Het bewuster omgaan met die leerkansen resulteert in een netto-effect bij een volgende opdracht.

Voorbeelden van reflectieve vragen op het uitvoeren van een opdracht:

- Wat was de opdracht? Heb ik het doel bereikt?
- Hoe is het proces concreet verlopen? De voorbereiding, de planning, de uitvoering, het besluit/antwoord?
- Welke concrete problemen deden zich voor? Hoe heb ik daarvoor een oplossing uitgewerkt?
- Wat leert me dit voor de aanpak van een volgende opdracht?
- Heb ik mezelf goed ingeschat (bij taken, bij keuze oefeningen portfolio)? Kon ik de oefeningen aan?

Evaluatie van attitudes

De leerkracht moet bij de evaluatie oog hebben voor de individuele inspanning, die de leerling doet om die doelen te bereiken. Enige omzichtigheid is geboden, want niet bij alle leerlingen is de spontane uitingsvorm de juiste weerspiegeling van de inzet. En sommige leerlingen hebben van nature uit meer tijd en inzet nodig om eenzelfde resultaat te bereiken.

Een hulpmiddel bij het evalueren van attitudes is een *observatielijst*, waarin een *aantal concrete gedragingen* opgesomd staan. Daarbij kan de leraar een aantal niveaus van verwachting aangeven die beantwoorden aan een verbale uitdrukking voor de 'beoordeling'. Zo ontstaat een categoriale beoordeling van attitudes, die de basis kunnen zijn voor een feedbackgesprek met de leerling.

Zeker voor attitudes geldt dat terugkoppeling tijdens het leerproces de meest effectieve weg van bijsturen is. Aanmoediging zal meer vermogen dan neerbuigend afkeuren. Een verbale waardering kan naast een 'resultaat' voor de inhoudelijke toetsing een blijk van waardering zijn voor de inzet van de leerling.

Van evaluatie naar zelfevaluatie

In de informatieve functie maakt evaluatie integrerend deel uit van het onderwijsleerproces. Belangrijk is alleszins dat de leerling *zelf informatie en daardoor inzicht krijgt over zijn leren*, zowel wat betreft het proces als het eindresultaat. Zo zal in het leerproces van probleemoplossende vaardigheden niet slechts de beoordeling van het eindresultaat belangrijk zijn. De informatie over zijn wijze van aanpakken en de vorderingen daarin geeft de leerling inzicht in de nodige bijsturing.

Procesevaluatie is een aangewezen weg om leerlingen vragen te leren stellen bij de leerinhouden. Dat is een goede ondersteuning bij de verwerving van leervaardigheden. Procesevaluatie is een aangewezen weg om de leerling *bewust te maken van de eigen mogelijkheden.* In die zin en in het kader van het levenslang leren (waarbij niet alle vorderingen 'getoetst' zullen worden) kan vertrouwd worden met procesevaluatie de groei naar zelfevaluatie bevorderen. Een mogelijke ondersteuning wordt geboden door opdrachten, waarbij de leerlingen zelf gebruik maken van een correctie- of een antwoordsleutel.

Het betrekken van de leerlingen bij de evaluatie of fasen ervan, *het bespreken van evaluatiegegevens en het formuleren van werkpunten* vanuit een gesprek kan ook bij deze 'jonge' leerlingen de gevoeligheid voor zelfevaluatie al aanscherpen.

Het *oplossingsproces van wiskundige problemen* biedt heel wat kansen om de aanpak van de leerlingen bespreekbaar te maken. Daarbij gaat het in de eerste plaats over de werkwijze, de rekenwijze, de terugkoppelende controle op de oplossingsweg. Zoals al bij probleemoplossende vaardigheden aangegeven moet dit echter verder gaan en moeten *ook de wijze van aanpakken, de leerkansen …* in het proces opgenomen worden. De leerling wordt hier geconfronteerd met vragen bij zijn individuele aanpak (hier dus niet zijn 'oplossing'). Ook voor wiskundig sterkere leerlingen liggen hier heel veel leerkansen, omwille van de sterke differentiatie die mogelijk wordt.

De *vele vormen van persoonlijk werk* die mogelijk zijn (zie APR 1 – Algemene pedagogische reglementering nr. 1), van individuele herhaling-, training- en driloefeningen tot kleine projecten waaraan individueel of in groep kan gewerkt worden, bieden vele mogelijkheden om de leerling te confronteren met zijn aanpak, zijn werkhouding, zijn motivatie …

Een stapje verder op weg naar zelfevaluatie is het aanreiken (en met de leerlingen doornemen) van *reflectieve vragen* over hun wiskundig bezig zijn (kennis, vaardigheden en attitudes). (Zie het onderdeel reflectieve vaardigheden – V1, en de aanbevelingen op de vorige pagina).

Uiteindelijk moet de leerling ertoe gebracht worden *dat hij bij zichzelf die vragen gaat stellen*. Dat is in de eerste graad niet weggelegd voor alle leerlingen. Sommigen zullen nog sterke sturing nodig hebben van de leraar, anderen kunnen dit, vaak ook nog onder begeleiding, al meer zelfstandig opnemen. Belangrijk is dat de leerlingen daartoe kansen aangeboden krijgen.

Een mogelijkheid daartoe wordt geboden door *het aanleggen van een portfolio* door de leerling. Werken met een portfolio is meer dan het verzamelen van gemaakte oefeningen. Dat is uiteraard al een eerste stap, maar het is meteen duidelijk dat het niet gaat om zomaar willekeurige oefeningen. De oefeningen moeten gericht gekozen worden in functie van wat de leerling aankan. Voor wiskundig sterke leerlingen zal een aantal kale oefeningen wellicht niet volstaan. In principe moet de leerling zelf kunnen beslissen over de samenstelling ervan. Dat vraagt uiteraard al een zekere maturiteit, die in de eerste graad vaak nog moet ontwikkeld worden. In de eerste graad moet de leraar daarbij nog hulp bieden, bijvoorbeeld door het aanreiken van diagnostische toetsen, waaruit de leerling voor zichzelf werkpunten kan bepalen of door het aanreiken van een ruime keuze aan adequaat oefenmateriaal. In de aanvangsfase van dit leerproces zal de leraar die keuzes met leerlingen bespreken.

Werken met een portfolio biedt een werkwijze, waarbij *gericht en gedifferentieerd kan ingegaan worden op de individuele noden van de leerling*. De leerling begeleiden naar meer zelfstandig leren is dus allesbehalve de leerling aan zijn lot overlaten. Leerlingen hebben nog niet altijd zicht op hun leren, op de mogelijkheden die er zijn om dat (bij) te sturen of de adequate aanpak ervoor. De leerling begeleiden in dat zoeken is de moeilijke rol die voor de leraar is weggelegd. Bij sommige leerlingen zal de leraar bijvoorbeeld heel concreet hulp moeten bieden bij de keuze van de oefeningen (het aantal en de soort) om een probleem bij te sturen of bij het hanteren van het correctiemateriaal.

Door het werken aan de portfolio leert de leerling nog *andere vaardigheden*. Zo krijgt hij een grote verantwoordelijkheid voor het eigen werk en *de planning* ervan. Hij leert *reflectievragen* te stellen bij zijn aanpak en verwerkt die in de portfolio zelf. Daardoor beschikt hij zelf, maar ook de begeleidende leraar, over een heel dossier over de vorderingen, de leerkansen, en leerproblemen die in het leerproces zijn voorgekomen. Tussentijdse evaluatie stelt de leerling en de leraar in staat de leerdoelen aan te passen en *het leerproces bij te sturen.* De feedback wordt gerichter en is daardoor effectiever. De bespreking met de leerling zal hem uitnodigen tot meer *eigen inbreng* in de evaluatie. In de portfolio is wellicht een evolutie merkbaar. Op die wijze is die een adequaat element bij *de oriëntatie van de leerling.* Omdat de leerling doorheen de hele portfolio meegewerkt heeft aan de keuzes in het leerproces, en aan de evaluatie ervan, zal hierdoor meer inzicht ontstaan in het eigen kunnen.

Leraren die hiermee willen starten moeten *een ingroeifase voorzien*, zowel bij de leerlingen als bij zichzelf. Ervaring leert dat het een proces is van vallen en opstaan, vaak gespreid over meerdere jaren. Best wordt een dergelijk project samen opgezet vanuit de vakgroep. Zo kan er heel wat uitwisseling plaatsvinden, zowel over het gebruikte materiaal, als over de aanpak en de motivatie van de leerlingen.

ICT-hulpmiddelen

In de leerplannen is het gebruik van ICT-hulpmiddelen opgenomen, zowel voor illustratie en demonstratie van begrippen en eigenschappen, als voor het effectieve gebruik ervan door de leerlingen bij het uitvoeren van berekeningen, het onderzoeken van eigenschappen en het verwerken van informatie.

De evaluatie van onderdelen waarbij in de ontwikkelingsfase en de verwerkingsfase een rekenmachine, een grafische rekenmachine of een computer gebruikt werd, zal hieraan aangepast zijn. Dat betekent dat bij de toetsing hetzelfde materiaal ter beschikking van de leerlingen moet staan.

Het spontane en accurate gebruik van ICT wordt geëvalueerd als onderdeel van de nagestreefde vaardigheid.

Voorbeelden

- Het heeft geen zin leerlingen in de verwerkingsfase ICT te laten gebruiken en op de evaluatiemomenten manuele automatismen te verwachten.
- Bij observatie in de klas moeten leerlingen gewezen worden op inefficiënt gebruik.
- Op dezelfde wijze moet gewezen worden op inadequaat gebruik als leerlingen bijvoorbeeld tussenresultaten noteren, eventueel zelf terug invoeren, al of niet na afronding, wat merkwaardige rekenverschillen kan veroorzaken.
- Als het gebruik van bepaalde werkwijzen met computer of rekenmachine als specifieke doelstelling wordt nagestreefd (bijv. gebruik bepaalde software, bepaalde functietoetsen, wiskundebijdrage in de algemene ICT-vorming) zal dit deel uit maken van de evaluatie.
- Met meetkundige software kunnen leerlingen een vermoeden onderzoeken vanuit een basisfiguur door het dynamisch maken van objecten uit de figuur (slepen). In dit geval is de computer een veredeld tekenblad, waarop de redenering wordt uitgevoerd. Ook voorheen moesten de leerlingen een tekening maken en maakte die deel uit van de evaluatie. Met het gebruik van een figuur op een machine kan dat evenzeer.

Bij dit soort evaluatie past een *permanente evaluatie* tijdens het leerproces zelf en geen testen met behulp van een reeks gekunstelde oefeningen. In de observatie moet een onderscheid gemaakt worden tussen enerzijds de vaardigheid in het gebruik van het toestel (bijv. de vlotheid bij het intikken bij computergebruik) en anderzijds het inzicht in het gebruik van de toestelgebonden wiskundige werkwijze.

Bedieningsvaardigheid op zich kan niet het enige doel zijn van wiskundelessen. Binnen het ‘vak wiskunde’ mag bijvoorbeeld klaviervaardigheid geen hypotheek leggen op het gebruik van de computer bij berekeningen of dataverwerking.

Voor wiskunde volstaat een relatief vlot gebruik van een rekenmachine of wiskundige software. Dat staat in functie van het wiskundige leerproces. Uiteraard zal een veelvuldig gebruik in de wiskundelessen bijdragen tot de algemene vlotheid. Er is geen principieel bezwaar tegen de beschikbaarheid van werkkaarten of stappenplannen die ook tijdens het jaar als hulpmiddel werden toegestaan.

De evaluatie van deze vaardigheid moet vooral gezien worden als aanmoedigend met het oog op een vlotter verlopen van het wiskundige proces. Zo moet een evaluatie gespreid over het jaar een beeld geven van de vorderingen van de leerlingen. Dit impliceert dat de leerlingen voldoende oefenkansen krijgen. Het vlotte gebruik van een rekenmachine of software vraagt meer dan een incidenteel gebruik in de les. Dit vraagt van de school en van de leerkracht een inspanning voor de leerlingen die niet zelf over het aangewezen materiaal kunnen beschikken.

Overleg in de vakgroep is nodig om vertrouwd te worden met deze voor wiskunde 'nieuwe' evaluatiesituaties. Over de aangewezen evaluatievorm, de gestelde eisen … is afstemming tussen de leerkrachten noodzakelijk. Zo kan afgesproken worden om het technisch gebruik van ICT (de vaardigheid van het bedienen) niet op het examen zelf te toetsen, maar bijvoorbeeld via de jaartoetsing, omdat 'permanente' of 'gespreide' evaluatie hier meer aangewezen is. Leerlingen moeten alleszins een duidelijk beeld krijgen van wat te verwachten is bij de evaluatie.

In sommige scholen wordt wiskunde ingeschakeld om *het ICT-raamplan* te realiseren (bijv. gebruik van een rekenblad, gebruik van een softwarepakket, het opzoeken van informatie op internet, het verkrijgen van een zekere gebruiksvaardigheid zoals werken met een muis). Het is evident dat de evaluatie van de hier nagestreefde vaardigheden bijdraagt tot de evaluatie van de realisatie van het raamplan volgens de schooleigen afspraken.

Organisatie van de toetsing

In de organisatie van de toetsen bestaat een ruime verscheidenheid tussen de scholen. Hoe die ook gebeurt, belangrijk is dat ze aansluit bij de onderwijspraktijk. Dit wil zeggen dat ze moet aansluiten bij de doelstellingen en de verwerkingsniveaus die tijdens het leerproces en de verwerkingsopdrachten werden nagestreefd.

Wat betreft de criteria die aan toetsen als meetinstrument moeten worden opgelegd, zoals validiteit (meet de toets wat beoogd wordt te meten?) en betrouwbaarheid (is het resultaat een zo adequaat mogelijke weerspiegeling van het bereiken van de doelstellingen door de leerling?) wordt verwezen naar de geëigende literatuur.

Verder wordt aangenomen dat de evaluatie zich niet mag beperken tot enkele momenten. Geregeld toetsen (zowel mondeling als schriftelijk) laat toe adequaat in te spelen op de problemen die zich stellen.

Evaluatie en beheersingsniveaus

Bij een aantal doelstellingen werden beheersingsniveaus geformuleerd. Ook in de evaluatie komen deze beheersingsniveaus aan bod.

- Het beheersingsniveau *elementair* betreft de elementaire kennis die leerlingen *perfect* zouden moeten *beheersen*. Het is *het absolute minimum.* Het elementaire beheersingsniveau komt niet in de plaats van het basisniveau. Het geeft een aanwijzing dat het basisniveau (wellicht met heel wat inzet) *mogelijk nog kan gehaald worden*, maar geeft daartoe geen garantie. Daartegenover staat dat het wel belangrijke informatie geeft over leerlingen *die het niet halen*. *Zonder deze kennis en vaardigheden kunnen leerlingen het vervolg van het curriculum wiskunde van de A-stroom nauwelijks of onmogelijk realiseren*. Als leerlingen dit beheersingsniveau, ondanks goede inzet en gerichte remediëring, onvoldoende aankunnen, dan zijn *consequenties in de oriëntering onvermijdbaar*. De capaciteiten van de leerling liggen dan niet op het vlak van studierichtingen met een wiskundige onderbouw. Dan is een positieve keuze voor andere capaciteiten van de leerling aangewezen.

  Omdat het elementaire niveau niet in de plaats kan komen van het basisniveau, zal de *evaluatie ervan maximaal 20 % van het totaal bedragen.*

- Het beheersingsniveau *basis* betreft de normale realisatie van de basisdoelstellingen, dus zonder ingewikkelde oefeningen en complexe toepassingen. Dit is *het te realiseren niveau voor alle leerlingen.*

Het bereiken van dit niveau zal de meeste tijd in beslag nemen. Ook in de evaluatie zal dit onderdeel het grootste deel uitmaken. *Basisniveau en elementair niveau samen dragen voor minimaal 70 % bij in de evaluatiegegevens.*

- Het beheersingsniveau *verdieping* betreft de verdieping van *de achtergrond van wiskundig kennis.* Er is meer aandacht voor samenhang, en voor vlotter functioneren van kennis en vaardigheden. De aanpak van deze onderdelen moet de leerlingen die wiskundig meer aan kunnen voldoende uitdagen opdat zij een studieloopbaan met meer wiskunde in hun pakket aandurven. Leerlingen die hier goed scoren kunnen *georiënteerd worden naar een studierichting met een sterke wiskundeonderbouw in aso, kso of tso.*

  Men kan dit niveau nastreven voor alle leerlingen, maar wel vanuit het besef dat dit niet voor iedereen haalbaar is, en ook niet hoeft. Dat wil zeggen dat men het realiseren van deze doelstellingen kan beperken tot een deelgroep van de leerlingen. *De leerlingen die dit niveau niet aankunnen of niet graag opnemen, zullen best georiënteerd worden naar een verdere studieloopbaan met een beperkt pakket wiskunde.*

7 Minimale materiële vereisten

De leerlingen moeten voor de meetkundelessen beschikken over behoorlijk tekenmateriaal (geodriehoek en passer).

De leerlingen beschikken over een rekenmachine. Het komt de didactische verwerking in de klas ten goede als de leerlingen in de fase van het aanleren over eenzelfde type toestel beschikken. Overleg binnen de vakwerkgroep is een noodzaak.

Het is noodzakelijk dat de leerkrachten wiskunde beschikken over behoorlijk en gemakkelijk toegankelijk materiaal voor het uitvoeren van tekeningen op het bord (geodriehoek en passer). Voor ruimtemeetkunde is de beschikbaarheid van een aantal standaardruimtefiguren (bijv. draadmodellen) sterk aanbevolen.

Tijdens de wiskundelessen en in het bijzonder de meetkundelessen is de beschikbaarheid van een behoorlijke ICT-ondersteuning een noodzaak (computer of laptop, beamer, software, applets). Het is aan de scholen zelf om uit te maken op welke concrete wijze dit gerealiseerd wordt, bijvoorbeeld een aantal lestijden vast gepland in een computerklas, de vlotte beschikbaarheid over transporteerbaar materiaal voor demonstratie, een computerhoek in de klas, een flexibele omwisseling van klassen en lessen … binnen het lesrooster. Wil ICT in wiskunde meer worden dan een extra speelmoment, willen in de wiskundevorming de vele mogelijkheden van de digitale didactiek gebruikt worden, en wil wiskunde bijdragen tot de realisatie van de vakoverschrijdende eindtermen ICT, dan is een quasi permanente beschikking over ICT-infrastructuur een belangrijk streefdoel voor de toekomst. De vakgroep zal hier overleg plegen om deze middelen zo professioneel mogelijk in te zetten en een ICT-implementatieplan opstellen.

Om gericht te kunnen differentiëren moet de soepelheid bestaan om de leeromgeving te kunnen aanpassen aan activerende werkvormen als hoekenwerk en contractwerk. Wil de lesaanpak de leerlingen meer tot zelfstandig werken en leren brengen, dan is de beschikbaarheid van vlot hanteerbaar leermateriaal en didactisch materiaal belangrijk. Ook hier zal de vakgroep werk maken van een implementatieplan.

8 Concordantie met de eindtermen

8.1 Eindtermen Wiskunde

1 Inhoudelijke eindtermen

1.1 Getallenleer

1.1.1 Begripsvorming - Feitenkennis

De leerlingen

1 kunnen natuurlijke, gehele en rationale getallen associëren met realistische en betekenisvolle contexten.

2 kennen de tekenregels bij gehele en rationale getallen.

3 weten dat de eigenschappen van de bewerkingen in de verzameling van de natuurlijke getallen geldig blijven en kunnen worden uitgebreid in de verzamelingen van de gehele en rationale getallen.

4 onderscheiden en begrijpen de verschillende notaties van rationale getallen (breuk- en decimale notatie).

5 hanteren de gepaste terminologie in verband met bewerkingen: optelling, som, termen van een som, aftrekking, verschil, vermenigvuldiging, product, factoren van een product, deling, quotiënt, deeltal, deler, rest, percent, kwadraat, vierkantswortel, macht, grondtal, exponent, tegengestelde, omgekeerde, absolute waarde, gemiddelde.

1.1.2 Procedures

De leerlingen

6 passen afspraken in verband met de volgorde van bewerkingen toe.

7 voeren de hoofdbewerkingen (optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling) correct uit in de verzamelingen van de natuurlijke, de gehele en de rationale getallen.

8 rekenen handig door gebruik te maken van eigenschappen en rekenregels van bewerkingen.

9 gebruiken doelgericht een rekentoestel.

10 ordenen getallen en gebruiken de gepaste symbolen ($\leq$, $<$, $\geq$, $>$, $=$, $\neq$).

11 berekenen machten met grondtal 10 en 2 met gehele exponent. Zij passen hierop rekenregels van machten toe.

12 kunnen:
- de uitkomst van een bewerking schatten;
- een resultaat oordeelkundig afronden.

13 gebruiken procentberekeningen in zinvolle contexten.

1.1.3 Samenhang tussen begrippen

De leerlingen

14 interpreteren een rationaal getal als een getal dat de plaats van een punt op een getallenas bepaalt.

15 kunnen het verband uitleggen tussen optellen en aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

16 herkennen het recht evenredig en omgekeerd evenredig zijn van twee grootheden in tabellen en in het dagelijkse leven.

17 kunnen vanuit tabellen met cijfergegevens het rekenkundig gemiddelde en de mediaan (voor niet-gegroepeerde gegevens) berekenen en hieruit relevante informatie afleiden.

1.2 Algebra

1.2.1 Begripsvorming - Feitenkennis

De leerlingen

18 gebruiken letters als middel om te veralgemenen en als onbekenden.

1.2.2 Procedures

De leerlingen

19 kunnen twee- en drietermen optellen en vermenigvuldigen en het resultaat vereenvoudigen.

20 kennen de formules voor de volgende merkwaardige producten: $(a+b)^2$ en $(a+b)(a-b)$; ze kunnen ze verantwoorden en in beide richtingen toepassen.

21 kunnen vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende oplossen.

22 kunnen eenvoudige vraagstukken die te herleiden zijn tot een vergelijking van de eerste graad met één onbekende oplossen.

1.2.3 Samenhang tussen begrippen

De leerlingen

23 ontdekken regelmaat in eenvoudige patronen en schema's en kunnen ze beschrijven met formules.

24 kunnen vanuit tabellen recht evenredige verbanden met formules uitdrukken.

25 kunnen functioneel gebruik maken van eenvoudige schema's, figuren, tabellen en diagrammen.

1.3 Meetkunde

1.3.1 Begripsvorming - Feitenkennis

De leerlingen

26 kennen en gebruiken de meetkundige begrippen diagonaal, bissectrice, hoogtelijn, middelloodlijn, straal, middellijn, overstaande hoeken, nevenhoeken, aanliggende hoeken, middelpuntshoeken.

27 herkennen evenwijdige stand, loodrechte stand en symmetrie in vlakke figuren en ze herkennen gelijkvormigheid en congruentie tussen vlakke figuren.

28 herkennen figuren in het vlak, die bekomen zijn door een verschuiving, een spiegeling of een draaiing.

29 weten dat in een tweedimensionale voorstelling van een driedimensionale situatie, informatie verloren gaat.

30 herkennen kubus, balk, recht prisma, cilinder, piramide, kegel en bol aan de hand van een schets, tekening en dergelijke.

31 kennen meetkundige eigenschappen zoals: de hoekensom in driehoeken en vierhoeken, eigenschappen van gelijkzijdige en gelijkbenige driehoeken, eigenschappen van zijden, hoeken en diagonalen in vierhoeken.

1.3.2 Procedures

De leerlingen

32 kiezen geschikte eenheden en instrumenten om afstanden en hoeken te meten of te construeren met de gewenste nauwkeurigheid.

33 gebruiken het begrip schaal om afstanden in meetkundige figuren te berekenen.

34 berekenen de omtrek en oppervlakte van driehoek, vierhoek en cirkel en de oppervlakte en het volume van kubus, balk en cilinder.

35 kunnen:
- het beeld bepalen van een eenvoudige vlakke meetkundige figuur door een verschuiving, spiegeling, draaiing;
- symmetrieassen van vlakke figuren bepalen;
- loodlijnen, middelloodlijnen en bissectrices construeren.

36 kunnen zich vanuit diverse vlakke weergaven een beeld vormen van een eenvoudige ruimtelijke figuur met behulp van allerlei concreet materiaal.

1.3.3 Samenhang tussen begrippen

De leerlingen

37 beschrijven en classificeren de soorten driehoeken en de soorten vierhoeken aan de hand van eigenschappen.

38 bepalen punten in het vlak door middel van coördinaten.

39 stellen recht evenredige verbanden tussen grootheden grafisch voor.

40 begrijpen een gegeven eenvoudige redenering of argumentatie in verband met eigenschappen van meetkundige figuren.

2 Vaardigheden

De leerlingen

41 begrijpen en gebruiken wiskundige taal in eenvoudige situaties.

42 passen communicatieve vaardigheden toe in eenvoudige wiskundige situaties.

43 passen probleemoplossende vaardigheden toe, zoals:
- het herformuleren van een opgave;
- het maken van een goede schets of een aangepast schema;
- het invoeren van notaties, het kiezen van onbekenden;
- het analyseren van eenvoudige voorbeelden.

3 Attitudes

De leerlingen

*44 ontwikkelen bij het aanpakken van problemen zelfstandigheid en doorzettingsvermogen.

*45 ontwikkelen zelfregulatie: oriëntatie, planning, bewaking, zelftoetsing en reflectie.

*46 ontwikkelen een kritische houding tegenover het gebruik van allerlei cijfermateriaal, tabellen, berekeningen en grafische voorstellingen.

*47 leren beseffen dat in de wiskunde niet enkel het eindresultaat belangrijk is maar ook de manier waarmee het antwoord bekomen wordt.

8.2 Overeenkomst

Et	Leerplan	Et	Leerplan	Et	Leerplan	Et	Leerplan
1	G1 G2 G3 G38 G39	13	G3 G4 G39	25	G3 G5 G6 G43	37	M22 M23 M53
2	G10	14	G24	26	M2 M4 M5 M6 M7 M19 M20 M38 M45 M46 M52	38	M11
3	G30 G31	15	G28	27	M8 M9 M40 M41 M43	39	G42
4	G25 G26 G27	16	G3 G39 G40 G41	28	M35	40	M42 M51 M52 M57 V5
5	G7 G15 G29 G34 G35 G36 G55	17	G3 G7	29	M25 M26 M27 M55	41	V4
6	G9	18	G19 G20 G21	30	M25 M26 M27 M56	42	V3 V4 V5
7	G1 G2 G3 G8 V2 G39	19	G50	31	M51 M52	43	V1
8	G3 G11 G30 G31 V2 G37 G39	20	G52 G53	32	M12 M13 M14 M15 M16 M17	*44	A4
9	G3 G13 V2 G37 G39	21	G22 G39 G47 G48	33	M30 M44	*45	A5
10	G24 G33 G37	22	G3 G23 G39	34	M31 M32	*46	A3
11	G18 G44 G45	23	G3 G5 G19 G20 G43	35	M18 M19 M40 M47 M49	*47	A3
12	G3 G12 G14 V2 G39	24	G3 G20 G46	36	M28 M54		

Doelstellingen die niet rechtstreeks refereren naar eindtermen

Eerste leerjaar			
G16 G17 G32	Deelbaarheid door een getal kleiner dan 10. Grootste gemeenschappelijke deler, kleinste gemeenschappelijk veelvoud. Wiskundige symbolen correct gebruiken.	M1 M3 M10 M21 M24 M29 M33	Ruimtelijke en vlakke situaties onderzoeken.. Afstand van een punt tot een rechte.. Eigenschappen evenwijdigen en loodlijnen. Vlakke figuren in ruimtelijke situaties herkennen. Driehoek met gegeven voorwaarden tekenen. Vraagstukken meetkundige kennis. Schatten van lengte, oppervlakte, volume.
Tweede leerjaar			
G49 G51 G54 G56	Getalwaarde veelterm. Macht eenterm. Hoofdeigenschap evenredigheden. Beweringen argumenteren.	M34 M36 M37 M39 M48 M50 M58	Ruimtelijke en vlakke situaties onderzoeken. Eigenschappen transformaties. Complement, supplement. Eigenschap evenwijdigen en snijlijn. Gelijke hoek construeren (congruentie). Driehoek met gegeven voorwaarden construeren. Vraagstukken meetkundige kennis.

9 Bibliografie/Media

9.1 Didactische werken

- BKOUCHE, R., CHARLOT, B., ROUCHE, N., *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*. Paris, Armand Colin, 1991.
- DRIJVERS, P., *Wat a is, dat kun je niet weten.* Utrecht, Freudenthal Instituut, 2006.
- FREUDENTHAL, H., *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Reidel Publ. Comp., 1973.
- GRAVEMEIJER, K.P.E., *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, CDβ Press, 1994.
- KRABBENDAM, H., *Rekenen voor de lerarenopleiding.* Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 1994.
- KRABBENDAM, H., *Algebra voor de lerarenopleiding.* Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 2005.
- KRABBENDAM, H., *Meetkunde voor de lerarenopleiding.* Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 2005.
- LAFARGUE-SORT, J., MARQUIS, B., *Les méthodiques pour résoudre des problèmes*. Paris, Hatier, 1992.
- LAGERWERF, B., *Wiskundeonderwijs in de basisvorming*. Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 2000.
- LOWYCK, J., VERLOOP, N., e.a., *Onderwijskunde*. Leuven, Wolters, 1995.
- POLYA, G., *How to solve it*. Princeton, University Press, 1973.
- POSAMENTIER, A.S., STEPELMAN, J., *Teaching secondary school mathematics*. New York, Merill Publishing Company, 1990.
- SCHOENFELD, A. H., *Mathematical problem solving*. London, Academic Press, 1985.
- STEUR, H., *Levende wiskunde. Toepassingen geordend naar wiskundig onderwerp*. Culemborg, Educaboek, Tjeenk-Willink, 1980.
- VAN DORMOLEN, J., *Aandachtspunten*. Utrecht, Bohn, Scheltema en Holkema, 1982.
- VAN DORMOLEN, J., *Didactiek van de wiskunde*. Utrecht, Bohn, Scheltema en Holkema, 1976.
- VAN VUGT, P., *Remediëren wiskunde, de basisschool voorbij.* Lannoo, 2006.
- CENTRE DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'a dix-huit ans*. Nivelles, CREM, 1995.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, *Curriculum and Evaluation Standards for school mathematics* . Reston, Virginia USA, NCTM, 1989.

9.2 Geschiedenis van de wiskunde

- BURTON D., *The history of mathematics. An introduction*. Boston, Allyn and Bacon Inc., 1985.
- KAISER, H., NÖBAUER, W., *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht*. München, Freytag, 1984.
- STRUIK, D.J., *Geschiedenis van de wiskunde*. Utrecht, Het Spectrum, 1990.

9.3 Tijdschriften

- UITWISKELING. Driemaandelijks tijdschrift, Groenstraat 18, 3221 Nieuwrode.
- WISKUNDE EN ONDERWIJS. Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraren, C. Huysmanslaan 60, bus 4, 2020 Antwerpen.
- EUCLIDES. Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, De Schalm 19, 8251 LB Dronten.

- NIEUWE WISKRANT. Tijdschrift voor Nederlands wiskunde onderwijs, Freudenthal Instituut, Aïdadreef 12, 3561 GE Utrecht.
- PYTHAGORAS. Wiskundetijdschrift voor jongeren, Postbus 41, 7940 AA Meppel.

9.4 Documenten secundair onderwijs (VVKSO)

- Het persoonlijk werk van de leerling, Algemene pedagogische reglementering 1, VVKSO
- Werken in de eerste graad, visie tekst eerste graad, VVKSO
- Leerstoornissen, VVKSO,

9.5 Documenten basisonderwijs

- Wiskunde Leerplan, VVKBaO D/1998/0938/02
- Getallenkennis, toelichtingen, VVKBaO D2001/0938/02
- Bewerkingen, toelichtingen, VVKBaO D2002/0938/01
- Meten en Metend rekenen, toelichtingen, VVKBaO D2002/0938/01
- Meetkunde, toelichtingen, VVKBaO D2002/0938/04

9.6 Websites

Uitwiskeling:	http://www.uitwiskeling.be
Nederlandse vereniging voor wiskundeleraren:	http://www.nvvw.nl/
Tijdschrift Pythagoras:	http://www.pythagoras.nu/mmmcms/public/
Freudenthalinstituut:	http://www.fi.uu.nl/nl/
Wiskunde starttips (eerste jaar):	http://wiskunde1.starttips.com
(tweede jaar):	http://wiskunde2.starttips.com

http://www.wisweb.nl
http://www.rekenweb.nl
http://www.ircc.edu/portal/layout_web1.aspx?AdminEdit=False&PortalPageID=324$
http://www.examenbundel.nl
http://www.math4all.nl/
http://www.vierkantvoorwiskunde.nl/index.html
http://www.math.ru.nl/kangoeroe/

Websites begeleiding

Antwerpen:	http://www.dsko.be/
Brugge:	http://www.dpbbrugge.be/wiskunde/
Gent:	http://www.vsko.be/kogent/dpb-so-vakgebieden-home.htm
Hassselt:	http://www.diohasselt.be/dpbso/
Mechelen-Brussel:	http://www.kerknet.be/vic.onderwijs.mb/home.htm