VLAAMS VERBOND VAN HET
KATHOLIEK SECUNDAIR ONDERWIJS

LEERPLAN SECUNDAIR ONDERWIJS

WISKUNDE

TWEEDE GRAAD ASO
Eerste leerjaar - tweede leerjaar

WISKUNDE

Tweede graad

Eerste leerjaar: 4 lestijden per week
of 5 lestijden per week

Tweede leerjaar: 4 lestijden per week
of 5 lestijden per week

In voege vanaf 1 september 2002

D/2002/0279/047

Inhoud

Situering van het leerplan ---- 5

1 BEGINSITUATIE ---- 6

2 ALGEMENE DOELSTELLINGEN ---- 8

3 ALGEMENE PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN ---- 10

4 MINIMALE MATERIËLE VEREISTEN ---- 13

5 LEERPLANDOELSTELLINGEN - LEERINHOUDEN PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN ---- 14

5.1 Vaardigheden en attitudes ---- 18
5.1.1 VAARDIGHEDEN ---- 18
5.1.2 ATTITUDES ---- 25

5.2 Eerste leerjaar ---- 30
5.2.1 MEETKUNDE ---- 30
5.2.2 GETALLENLEER ---- 41
5.2.3 REËLE FUNCTIES ---- 47
5.2.4 ANALYTISCHE MEETKUNDE ---- 52
5.2.5 BESCHRIJVENDE STATISTIEK ---- 57

5.3 Tweede leerjaar ---- 60
5.3.1 MEETKUNDE ---- 60
5.3.2 ANALYTISCHE MEETKUNDE ---- 68
5.3.3 REËLE FUNCTIES ---- 71
5.3.4 ALGEBRAÏSCH REKENEN ---- 77
5.3.5 BESCHRIJVENDE STATISTIEK ---- 78
5.3.6 RIJEN, TELPROBLEMEN EN REKENEN MET KANSEN ---- 81

6 EVALUATIE ---- 84

7 OVEREENKOMST EINDTERMEN EN DOELSTELLINGEN ---- 87
7.1 Eindtermen wiskunde ---- 87
7.2 Overeenkomst ---- 89

8 BIBLIOGRAFIE ---- 90

Situering van het leerplan

Dit leerplan werd opgemaakt op basis van de eindtermen wiskunde van de tweede graad van het secundair onderwijs.
Het is bestemd voor de leerlingen van het algemeen secundair onderwijs.
Voor het aantal lestijden wordt gerefereerd aan de Lessentabellen - Voltijds secundair onderwijs - Tweede graad van het Vlaams Verbond van het Katholiek Secundair Onderwijs.

1 BEGINSITUATIE

Voor het eerste leerjaar van de eerste graad A-stroom is er een gemeenschappelijk leerplan. In het tweede leerjaar hebben de leerlingen het leerplan a gevolgd.
De basisdoelstellingen worden hier kort samengevat. Een volledige beschrijving van de leerplandoelstellingen, met het nagestreefde niveau van verwerken en met de bijbehorende pedagogisch-didactische wenken is opgenomen in de leerplanbrochure van de eerste graad, D/1997/0279/032 - Licap september 1997.

1.1 Beginsituatie in verband met getallenleer

De volgende leerinhouden werden volgens het leerplan van de eerste graad behandeld.

Natuurlijke, gehele en rationale getallen: interpretatie en gebruik in situaties uit het dagelijks leven, notatie (o.m. wetenschappelijke schrijfwijze) en ordening.
Bewerkingen met natuurlijke, gehele en rationale getallen: hoofdrekenen, cijferen, gebruik van een rekenmachine. Machten met een gehele exponent van rationale getallen.
Eigenschappen van de bewerkingen met natuurlijke, gehele en rationale getallen.
Delers en veelvouden van natuurlijke getallen, priemgetal, grootste gemeenschappelijke deler, kleinste gemeenschappelijk veelvoud.
Vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende en bijbehorende vraagstukken.

Getalwaarde van een eenterm en een veelterm.
Som en product van twee- en drietermen.
Merkwaardige producten: de formules $(a + b)^2$ en $(a - b)(a + b)$.
Ontbinden in factoren d.m.v. de distributiviteit van de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling en d.m.v. bovenstaande formules voor de merkwaardige producten.

Evenredigheden.
Recht en omgekeerd evenredige grootheden, grafische voorstelling van recht evenredige grootheden, bijbehorende vraagstukken.

Coördinaat van een punt in het vlak.
Tabel, staafdiagram, strook- en schijfdiagram, grafiek: aflezen en interpreteren, voorstelling van gegevens.
Rekenkundig gemiddelde en mediaan.
Procentberekeningen.

1.2 Beginsituatie in verband met meetkunde

De volgende leerinhouden werden volgens het leerplan van de eerste graad behandeld.

Basisbegrippen van de meetkunde: punt, rechte, lengte, hoek. Meten en tekenen. Schaal.
Onderlinge ligging van rechten.
Constructie van een evenwijdige aan een gegeven rechte, loodrechte op een gegeven rechte, de middelloodlijn van een lijnstuk en de bissectrice van een hoek. Gebruik van de geodriehoek.

Het beeld van een vlakke figuur bepalen door een verschuiving, een spiegeling en een draaiing. Eigenschappen van een verschuiving, een spiegeling en een draaiing.

Congruente en gelijkvormige figuren herkennen.
Congruentiekenmerken van driehoeken.

Driehoeken en vierhoeken: soorten, hoogtelijn, zwaartelijn, eigenschappen in verband met zijden, hoeken, diagonalen, merkwaardige lijnen en symmetrie.
Cirkel: straal, middellijn, koorde, middelpuntshoek.
Vraagstukken over omtrek en oppervlakte van vlakke figuren.

Ruimtefiguren: kubus, balk, recht prisma, cilinder, kegel, piramide, bol herkennen; balk en kubus voorstellen, vanuit diverse vlakke weergaven een beeld vormen van een eenvoudige ruimtelijke figuur.
Vraagstukken over oppervlakte en volume van kubus, balk en cilinder.

1.3 Beginsituatie in verband met vaardigheden en attitudes

In de eerste graad van het secundair onderwijs en in het basisonderwijs werd aandacht besteed aan de ontwikkeling van een aantal vaardigheden en attitudes. Vermits het om een aanzet gaat, kunnen bij onderscheiden leerlingen zeer verschillende resultaten bereikt worden. Het gaat hierbij dus om een proces dat in de tweede en de derde graad moet opgevolgd en uitgebreid worden.

Rekenvaardigheden
- het vlot rekenen met getallen (hoofdrekenen, cijferrekenen en rekenen met een rekenmachine);
- het rekenen met algebraïsche vormen.

Meet- en tekenvaardigheden
Wiskundige taalvaardigheden
- het begrijpen van wiskundige uitdrukkingen (zowel mondeling als schriftelijk);
- het lezen van figuren, tekeningen en grafieken;
- het verwoorden van gedachten en inzichten (zowel mondeling als schriftelijk).

Denk- en redeneervaardigheden
- het onderscheid maken tussen hoofd- en bijzaken, gegeven en gevraagde, gegeven en te bewijzen;
- het begrijpen van een redenering of argumentatie bij een eigenschap.

Probleemoplossende vaardigheden
- een opgave herformuleren, een goede schets of een aangepast schema maken, notaties invoeren, onbekenden kiezen, voorbeelden analyseren.

Leervaardigheden
- het verwerken van losse gegevens;
- het verwerken van samenhangende informatie;
- het raadplegen van informatiebronnen;
- het plannen van de studietijd;
- het sturen van het eigen leerproces.

Zin voor nauwkeurigheid en orde.
Zin voor helderheid, bondigheid, eenvoud van taalgebruik.
Kritische zin,
o.m. een kritische houding tegenover de eigen berekeningen, beweringen, handelingen.
Zelfvertrouwen, zelfstandigheid en doorzettingsvermogen bij het aanpakken van problemen.
Zelfregulatie,
o.m. oriëntatie, planning, bewaking, zelftoetsing en reflectie.
Zin voor samenwerking en overleg.

2 ALGEMENE DOELSTELLINGEN

2.1 Wiskunde en wiskundevorming

Wiskunde

Wiskunde biedt middelen tot het begrijpen, het beschrijven, het verklaren en het beheren van systemen en situaties uit onze omgeving. Het gaat in het bijzonder om natuurverschijnselen (bijv. in de natuurwetenschappen, beschrijving in de ruimte rondom), om technische realisaties (bijv. automatiseringsprocessen) en om menselijke relaties (bijv. het gebruik van statistische gegevens in de economie en in de media).
Een kenmerk van wiskunde is het creëren van modellen voor die beschrijving. De mathematisering van een situatie of een probleem betekent dat, na analyse en kwantificering, een wiskundig model (bijv. een evenredigheid, een vergelijking, een functioneel verband, een stelsel, een meetkundig verband, ...) wordt gevonden, waarin de situatie of het probleem kan beschreven worden. De bijbehorende oplossingstechnieken kunnen tot een effectieve oplossing leiden. Kritische toetsing van de oplossing in de beschreven realiteit kan leiden tot het aanvaarden, verwerpen of bijstellen van het wiskundig model.
Een ander kenmerk van wiskunde is het steeds verder ordenen en organiseren van de verworven inzichten in samenhangende schema's en systemen, waarbij ook de toepasbaarheid en de beperkingen van wiskundesystemen kunnen beschreven worden. Van nieuwe vaststellingen wordt geprobeerd ze te verbinden met of te verantwoorden vanuit de bestaande systemen.

Wiskundevorming

De wiskundevorming in het secundair onderwijs heeft een dubbele rol: het ontwikkelen van een wiskundig basisinstrumentarium en het ontwikkelen van het denken in het algemeen.

Enerzijds moeten leerlingen een minimale kennis en vaardigheid verwerven in het wiskundige instrumentarium, nodig om goed te kunnen functioneren in een maatschappij, waar wiskunde in vele toepassingen gebruikt wordt. Daarom moeten wiskundige begrippen en verbanden een brede betekenis krijgen in relatie met voldoende realiteitsgebonden situaties en moeten veel gebruikte wiskundige technieken en methoden voldoende beheerst worden (al of niet met gebruik van hulpmiddelen zoals een rekenmachine, een computerprogramma, een formularium).
Wil deze kennis en vaardigheid adequaat gehanteerd worden, is een efficiënte kennisorganisatie noodzakelijk. Daartoe moet voldoende aandacht besteed worden aan de samenhang tussen begrippen en eigenschappen en tussen de eigenschappen onderling. Efficiënte toegankelijkheid van de kennis houdt in dat ze inhoudelijk niet slechts logisch geordend is, maar eveneens dat een ordening beschikbaar is, die gericht is op het gebruik ervan in toepassingen, ook in nieuwe situaties.
In het concrete verwervingsproces en in de toepassingen kan de bewondering voor de schoonheid en de verwondering voor het vaak verrassende van wiskunde groeien.

Anderzijds draagt de wiskundevorming bij tot een fundamentele denk- en attitudevorming. Bij het verwerven van wiskundekennis en wiskundige methoden worden algemene denkmethoden (bijv. het analyseren, het synthetiseren, het hanteren van symmetrie en analogie, het systematisch en methodisch werken), verwervingstechnieken van kennis (bijv. herhaling, verbanden leggen, toetsing, verdere abstractie) en attitudes (bijv. het opbouwen van vertrouwen in het eigen kunnen, doorzettingsvermogen en kritische zin) ontwikkeld.
Bij het mathematiseren en het oplossen van problemen kunnen leerlingen vaardigheden en strategieën verwerven die breder toepasbaar zijn. In het proces van het argumenteren en het bespreken van de kwaliteit van een wiskundige oplossing zal wiskunde bijdragen tot het verwerven van een kritische houding, ook ten aanzien van het eigen denken en handelen.

Omdat dit vormingsproces niet los verloopt van de sociale context van de klas, wordt onrechtstreeks bijgedragen tot de vorming van sociale vaardigheden.

2.2 Algemene doelstellingen voor wiskunde in de tweede graad

Voor de wiskundevorming in de tweede graad van het algemeen secundair onderwijs kunnen de volgende algemene doelstellingen vooropgesteld worden.

Kennis en inzicht

De leerlingen gebruiken en onderhouden de kennis en de inzichten verworven in de eerste graad.
De leerlingen ontwikkelen

- een wiskundig instrumentarium van begrippen, eigenschappen en methoden;
- het inzicht in verbanden tussen de wiskundige leerinhouden onderling en tussen de wiskundige leerinhouden en andere vakdisciplines;
- het inzicht in verbanden tussen het wiskundig instrumentarium en problemen die wiskundig vertolkt kunnen worden;
- het inzicht in het verwerken van numerieke informatie en beeldinformatie;
- een aantal redeneermethoden om hun bevindingen te argumenteren en te verklaren;
- een aantal wiskundige denkmethoden om o.m. verbanden te leggen, te ordenen en te structureren.

Vaardigheden

De leerlingen onderhouden de vaardigheden verworven in de eerste graad.
De leerlingen ontwikkelen

- rekenvaardigheden;
- meet- en tekenvaardigheden;
- wiskundige taalvaardigheden;
- denk- en redeneervaardigheden;
- probleemoplossende vaardigheden;
- leervaardigheden.

Attitudes

De leerlingen ontwikkelen

- zin voor nauwkeurigheid en orde;
- zin voor volledigheid;
- zin voor helderheid, bondigheid, eenvoud van taalgebruik;
- kritische zin;
- zelfvertrouwen, zelfstandigheid en doorzettingsvermogen;
- zelfregulatie;
- zin voor samenwerking en overleg;
- waardering voor wiskunde als een dynamische wetenschap en als een component van de cultuur.

Verwerking in het leerplan

De wiskundevorming kan in de tweede graad aangeboden worden met een verschillend aantal wekelijkse lestijden. De realisatie van de algemene doelstellingen hangt daarmee samen. Dit resulteert in een verschil in leerplandoelstellingen en andere klemtonen op een van de voornoemde aspecten van de wiskundevorming. Dit wordt geconcretiseerd in deel 5.

De *vaardigheden en attitudes* worden voorzien voor de gehele tweede graad en worden verwerkt in 5.1. Het spreekt voor zich dat ze met een groter aantal lestijden wiskunde diepgaander kunnen gerealiseerd worden. In de tekst van 5.1 zelf wordt de nuancering in functie van het verschillend aantal lestijden aangebracht.

De wiskundige *leerinhouden* worden verwerkt in leerplandoelstellingen (5.2 voor het eerste leerjaar en 5.3 voor het tweede leerjaar). Ze worden gepresenteerd in grote onderdelen volgens een inhoudelijke ordening: *meetkunde* met inbegrip van ruimtemeetkunde, *getallenleer* met een numeriek en een algebraïsch onderdeel, *reële functies, analytische meetkunde, beschrijvende statistiek* en een onderdeel *telproblemen en rekenen met kansen.* Deze inhoudelijke ordening wil het opzoeken van de doelstellingen vereenvoudigen. Dit betekent geenszins dat de leerinhouden in deze volgorde moeten aangeboden worden. Het leerplan wil daarentegen het leggen van bruggen tussen verschillende onderdelen en het geïntegreerd behandelen van onderwerpen stimuleren. Daartoe worden in de pedagogisch-didactische wenken verwijzingen opgenomen.

3 ALGEMENE PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de tweede graad van het algemeen secundair onderwijs wordt verder gebouwd op de wiskundige vorming van de eerste graad en het basisonderwijs. Dat houdt in dat de leerlingen de kennis, de inzichten en de vaardigheden die voordien verworven werden, blijven gebruiken en onderhouden, zonder dat dit leidt tot een systematische herhaling. Als uit een diagnostische toets blijkt dat bepaalde onderdelen onvoldoende verworven werden, kunnen die functioneel en gericht herhaald en bijkomend ingeoefend worden. Een meer gedifferentieerde aanpak is hier aangewezen.

Kennis en inzicht

In de tweede graad komen een aantal nieuwe leerinhouden en nieuwe wiskundeonderdelen aan bod. Daarbij moet voldoende aandacht besteed worden aan de *begripsvorming*. Een eerste abstractie van nieuwe begrippen wordt best onderbouwd met voorbeelden, die onder meer kunnen aansluiten bij de ervaringswereld van de leerlingen, bij de historische ontwikkeling van het begrip of bij de problemen die er mee kunnen opgelost worden. In een onderzoeksfase kunnen de leerlingen zelf ervaren wat de relevante en niet-relevante kenmerken van een begrip zijn. Bij het verbinden van nieuwe ervaringen aan het begrip of het niet meer behoorlijk functioneren van het begrip kunnen leerlingen hierop dan terugvallen. Door begrippen van bij de vorming te koppelen aan voorbeelden en/of problemen uit verschillende onderdelen worden ze breder en betekenisvoller opgenomen en wordt het gebruik ervan in de verschillende onderdelen vereenvoudigd. Dit kan een motivatie zijn om leerstofonderdelen geheel of gedeeltelijk geïntegreerd te behandelen.
De aanbreng van nieuwe eigenschappen kan op gelijkaardige wijze aangepakt worden.

Naast het aanzetten van nieuwe begrippen en eigenschappen zal er naar gestreefd worden een aantal begrippen en eigenschappen uit te diepen en op een hoger *verwoordingsniveau* te brengen, waarbij vertrouwde begrippen en eigenschappen met een redelijke exactheid worden vertolkt. Het ‘verwoorden’ van kennis en inzichten kan hierbij zowel slaan op het effectief vertolken ervan in een behoorlijke en vlotte taal, als op het beschrijven in een meer formele wiskundetaal met symbolen. Het overgaan van de ene vorm naar de andere verdient veel aandacht. Notaties en symbolen zijn geen doel op zich, maar een middel om de verworven begrippen en eigenschappen en de gemaakte redeneringen adequaat en beknopt uit te drukken. Hierbij moet echter rekening gehouden worden met de mogelijkheden van de leerlingen. Zo kunnen bij sommige onderdelen hogere eisen gesteld worden aan leerlingen met een uitgebreider pakket wiskunde.

Inzicht in de aangeleerde begrippen en eigenschappen impliceert dat de verworven kennis kan *toegepast* worden. De leerlingen moeten daartoe geconfronteerd worden met zinvolle en haalbare toepassingen binnen en buiten de wiskunde. Precies de toepassingen kunnen het inzicht verscherpen in verbanden tussen het gekende wiskundig instrumentarium en het oplossen van problemen, maar daardoor ook in de wiskundige begrippen en eigenschappen zelf.

Vaardigheden

Technieken en routineprocedures worden verder ingeoefend en aangevuld. Dat sluit het efficiënt gebruik in van rekentechnische hulpmiddelen, zoals rekenmachine en computer. Bij een aantal leerinhouden is het gebruik van een toestel met grafische mogelijkheden aangewezen.
Daarnaast moet, afhankelijk van het aantal lestijden wiskunde en de mogelijkheden van de leerlingen, aandacht besteed worden aan vaardigheid in verwoorden en formaliseren, probleemstellen en probleemoplossen, redeneren en verantwoorden. De leerkracht dient te beseffen dat deze vaardigheden slechts progressief opgebouwd worden.
Op de didactische aanpak van vaardigheden wordt ingegaan in de pedagogisch-didactische wenken bij 5.1.

Attitudevorming

Doorheen de wiskundevorming kunnen leerlingen een aantal *attitudes* en in het bijzonder *leerattitudes* verwerven, zoals orde, nauwkeurigheid, doorzettingsvermogen, zelfvertrouwen, ... Het aanpakken van problemen kan leiden tot een onderzoeksgerichte houding, tot methodisch en planmatig werken. Een leerproces waarin oplossingen worden vergeleken en getoetst, kan bijdragen tot samenwerking, overleg, structurering, zin voor helderheid, bondigheid, volledigheid, eenvoud in taalgebruik, waardering voor andere oplossingen.

Bij het bespreken van oplossingsmethoden en door het kritisch onderzoeken van elkaars oplossing kan waardering voor een andere mening aangebracht worden en daardoor voor de persoon van de andere. Zo kan binnen het wiskundeonderwijs aandacht besteed worden aan *waarden en sociale vaardigheden*.

Ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit *realiteitsbetrokken situaties* kan bij de leerlingen het besef doen groeien van de bruikbaarheid en de werkelijkheidswaarde van wiskunde. Ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit een historische context kan belangstelling en waardering opwekken voor de *historische en culturele aspecten* van wiskunde in het algemeen. Aanpak vanuit voorbeelden uit de bouwkunst en de schilderkunst kunnen de rol van wiskunde bij de ontwikkeling van bepaalde kunstvormen illustreren.

Actieve werkvormen

De leerlingen van de tweede graad beschikken over voldoende achtergrondkennis en voldoende ervaring met de wiskunde-opbouw om ze te betrekken bij het ontwikkelen van de leerinhouden. Een radicale keuze voor *actieve wiskundelessen* ligt voor de hand, zeker bij wiskundig-sterkere leerlingen. Begrippen en eigenschappen kunnen in goed gekozen didactische situaties door de leerlingen zelf onderzocht worden. Die leermomenten kunnen in leer- of klassengesprekken verwoord worden en aan de ervaring van anderen getoetst. Reflecties over dit proces zelf zijn aangewezen momenten om technieken in verband met 'leren-leren' (bijv. zich vragen stellen) aan te reiken.

In een *actief leerproces* leren leerlingen communiceren over wiskundige onderwerpen. De wijze waarop leerlingen onder elkaar en naar de leerkracht toe informatie over hun denkproces overdragen, mag zich niet beperken tot een rijtje wiskundige symbolen. Hun uitleg zou voor buitenstaanders begrijpbaar moeten zijn. Ook in de wiskundelessen is het hanteren van een verzorgde en behoorlijke taal belangrijk.

Van de leerlingen mag verwacht worden dat ze een grotere vorm van *zelfstandig leren en werken* opbouwen. De opbouw van het leerproces moet er op gericht zijn dat leerlingen actief deelnemen aan de wiskundelessen. Die moeten zo ingericht worden dat leerlingen zelf een deel van de opdracht aanpakken. Door goed gekozen, progressief opgebouwde opdrachten moeten leerlingen vertrouwd gemaakt worden met het opnemen van verantwoordelijkheid voor het eigen leren en werken.

Informatica en wiskunde

In onze maatschappij groeit de informatie- en communicatietechnologie (ICT) uit tot een veralgemeend hulpmiddel. De leerlingen moeten er doorheen het onderwijs mee vertrouwd worden. Wiskunde is een aangewezen weg tot het verwerven van inzicht in een aantal computertoepassingen (rekenwerk, grafische mogelijkheden, dataverwerking).

Heel wat *routine-rekenwerk* wordt in de praktijk niet meer manueel uitgevoerd. Ook in de wiskundeles kan het gebruik van moderne rekenapparatuur zoals computer en rekenmachine tijdbesparend werken, zeker bij getallen waar het handmatig rekenwerk veel tijd in beslag zou nemen. Routine-rekenvaardigheden blijven weliswaar belangrijk voor een snelle schatting, bijv. na afronding van de getallen. Maar men kan niet voorbij aan de consequentie dat aan de oefening van rekenvaardigheden minder tijd kan besteed worden. Uiteraard moet misbruik van de rekenmachine voorkomen worden. Foutief gebruik kan het inzicht in de wiskundige aanpak van een probleem zelfs verstoren. In die zin zal in de inzichtelijke fase of de aanbrengfase het rekenen soms nog ambachtelijk moeten gebeuren.

Wat het *algebraïsch rekenwerk* (formules, letterrekenen, vergelijkingen en ongelijkheden oplossen) betreft, bieden de computer en een aantal rekenmachines heel wat mogelijkheden. Ook hier is het zinvol in de tweede graad nog tijd te investeren in beperkt manueel rekenwerk, omdat het inzicht in de algebraïsche manipulaties nog te verwerven is. De aard van de oefeningen is dan niet gericht op complexiteit, maar op versterking van inzicht in de methode. Verder kan vanuit het inzicht in de relatieve beperktheid van de mogelijkheden bij het algebraïsch rekenen al aandacht besteed worden aan het numeriek benaderen van oplossingen.

De *verwerking van gegevens* die in de beschrijvende statistiek voorzien is, zal in beperkte mate manueel uitgevoerd worden. Computer en grafische rekenmachine kunnen hier zeer zinvol aangewend worden.

De computer en grafische rekenmachines zijn handige *didactische hulpmiddelen*, o.m. bij exploratieopdrachten. Door de snelheid waarmee de leerlingen een antwoord kunnen bekomen, krijgen ze snel terugkoppeling over hun denk-, reken- of oplossingsproces. De bijsturing die er op volgt kan het inzicht verhogen. Zo zullen de grafische mogelijkheden van een rekenmachine of een computer aangewend worden bij het onderzoek van functies en hun grafieken. En in de meetkunde kan eenzelfde relatie of situatie in een aantal verschillende posities of liggingen uitgeprobeerd worden waardoor de besluitvorming (bijv. bij het formuleren van een vermoeden of een vaststelling) efficiënter kan.

De computer of grafische rekenmachine brengt uiteraard ook nieuwe mogelijkheden en moeilijkheden mee. Mogelijkheden zijn bijvoorbeeld: het interpreteren van de randvoorwaarden van een probleem (bijv. de keuze van de dimensies van het grafisch scherm), het extrapoleren (vanuit een verband vastgesteld op een grafiek) of het verbinden van toepassingen met algebraïsch rekenen aan grafische karakteristieken van functies (bijv. bij het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden). Moeilijkheden die zeker aandacht vragen zijn bijvoorbeeld het verwoorden van wat waargenomen wordt bij het gebruik van ICT-hulpmiddelen. of het wiskundig expliciteren ervan.
ICT-hulpmiddelen kunnen ook gebruikt worden als controlemiddel op manueel uitgevoerde berekeningen of bij het verifiëren van vermoedens, veronderstellingen en schattingen. Daartegenover staat dat nieuwe controlevaardigheden (bijv. maken van schattingen) moeten aangeleerd worden, om meteen een kritische houding tegenover de resultaten en de mogelijkheden van deze nieuwe technologie te verwerven.
In de huidige tijd is het leren organiseren, gebruiken en interpreteren van informatie belangrijker dan het onthouden van de zoveelste formule. Naast het eigen geheugen worden elektronische geheugens, formularia, tabellen, … gebruikt. Het wiskundeonderwijs kan hieraan niet voorbij. Het kan nodig zijn de tijd te nemen om in eenvoudige gevallen inzicht in berekeningen, regels en formules te verwerven, maar het indrillen en het berekenen met ingewikkelder getallen moet gerelativeerd worden. De ingewonnen tijd kan besteed worden aan het oplossen van een probleem, een vraagstuk meer.

Wiskunde voor elke leerling

In de tweede graad wordt wiskunde aangeboden met een verschillend aantal wekelijkse lestijden. Er mag verwacht worden dat de leerlingengroepen meer homogeen zijn samengesteld dan in de eerste graad. Toch moet er nog voldoende aandacht besteed worden aan een *gedifferentieerde aanpak* van de leerlingen. Dit kan betekenen dat bepaalde onderdelen en doelstellingen gedifferentieerd aangeboden worden. Dit impliceert dat zowel bijzondere aandacht moet gaan naar de wiskundig minder begaafde leerling, als naar de leerling met meer wiskundige mogelijkheden.

Oriëntering

Op het einde van de tweede graad staan de leerlingen opnieuw voor een *keuze* in hun studieloopbaan. Ook het aantal wekelijkse lestijden wiskunde speelt daarin een rol. Vooral in het tweede jaar is het belangrijk de oriëntering voor te bereiden. Daartoe zal getracht worden de keuzerijpheid bij de leerlingen zelf te bevorderen. De verwerking van de leerinhouden (basis en/of uitbreiding) moet verschillende aspecten van wiskunde omvatten en voldoende uitdaging bevatten, opdat leerlingen zich een reëel beeld kunnen vormen van hun mogelijkheden en van de consequenties van hun keuze.

Relatie met het opvoedingsproject van de school

Een school wil haar leerlingen méér meegeven dan louter vakkennis. Haar intentieverklaring in dit verband is te vinden in het opvoedingsproject, waarin waardenopvoeding en christelijke duiding zijn opgenomen.

Een vakleerkracht in een school van het katholieke net zal geen andere wiskunde geven dan de collega's in een ander net. Wel heeft hij de taak om, waar de kans zich voordoet, naar het opvoedingsproject of een aspect daarvan te refereren. Als mededrager van het christelijk opvoedingsproject is elke leerkracht alert voor elke kans die het school- en klasgebeuren biedt om de diepere dimensie aan te reiken. Ook wiskundelessen bieden hiertoe de kans, niet in het minst in de persoonlijke contacten tussen leerlingen en leerkracht. Hoe beter de leerkracht de leerlingen persoonlijk kent, hoe beter hij zal aanvoelen wanneer er openheid is om met de leerlingen door te stoten naar zins- en zijnsvragen.

4 MINIMALE MATERIËLE VEREISTEN

De leerkrachten wiskunde hebben de beschikking over behoorlijk en gemakkelijk toegankelijk materiaal voor het uitvoeren van tekeningen op het bord, m.n. *geodriehoek en passer*. Ze kunnen vlot beschikken over een *overhead-projector* en *ICT-hulpmiddelen voor demonstratie*.

Leerkrachten wiskunde kunnen beschikken over *rekenmachines en wiskundige software* voor de didactische ondersteuning van hun lessen.
Voor de tweede graad betekent dit concreet:

- software voor meetkunde met interactieve en dynamische mogelijkheden
- software voor het exploreren van reële functies;
- software voor de verwerking van statistische gegevens (exploratie van grafische voorstellingen, berekeningen, voorstellen van gegevens in grafieken en diagrammen).

Deze software kan beschikbaar zijn op geavanceerde rekenmachines en/of op computer (eventueel met inbegrip van Internet voor exploratieopdrachten). ICT-hulpmiddelen moeten minimaal 20 % van de lestijden ter beschikking staan van de leerkracht.

De leerlingen beschikken over behoorlijk tekenmateriaal (*geodriehoek en passer*). Ze beschikken over een *rekenmachine* (of computer) met interactieve grafische functies (bijv. zoom-functie, trace-functie) en met mogelijkheden voor statistische berekeningen.

Opmerking in verband met de implementatie

De vakgroep wiskunde zal geregeld een evaluatie maken van het gebruik van ICT-hulpmiddelen en de vordering van de implementatie ervan. Dit is een gelegenheid om ideeën en werkmateriaal uit te wisselen.

Het komt de didactische verwerking in de klas ten goede als de leerlingen over eenzelfde rekenmachine beschikken. Het is niet wenselijk dat leerlingen in hun studieloopbaan geregeld van toestel moeten veranderen. De vakgroep wiskunde zal (afhankelijk van de studierichtingen) afspraken maken over de vereisten waaraan een toestel minimaal (bijv. grafisch) en maximaal (bijv. niet symbolisch) moet voldoen, in functie van het gebruik dat men er wenst van te maken. Om een continuïteit in het gebruik van rekenmachines te waarborgen doorheen de studieloopbaan van de leerlingen is het wenselijk dat ook afspraken gemaakt worden op het niveau van de scholengemeenschap. Als toch verschillende toestellen gehandhaafd worden, zou onderzocht kunnen worden of een leerling zijn toestel kan wisselen bij de overstap naar een andere school. Tenslotte moet voorzien worden dat leerlingen uit een sociaal minder begoed midden geen probleem ervaren met de beschikbaarheid van deze hulpmiddelen.

5 LEERPLANDOELSTELLINGEN – LEERINHOUDEN PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerplandoelstellingen van dit leerplan zijn opgemaakt op basis van de eindtermen wiskunde van de tweede graad van het secundair onderwijs.

Verschillende leerwegen

Wiskunde wordt in de tweede graad aangeboden met een gedifferentieerd aantal lestijden: 4 of 5 wekelijkse lestijden.

In opvolging van deze structureel ingebouwde differentiatie worden in het leerplan *twee verschillende leerwegen* voorzien om de voorgeschreven doelstellingen te realiseren, namelijk een *leerweg 4* (voor vier wekelijkse lestijden) en een *leerweg 5* (voor vijf wekelijkse lestijden). Daarmee wordt voor wiskunde een eerste stap gezet naar de *differentiatie* die in de tweede graad nodig is om de intrinsieke verschillen tussen de leerlingen op te vangen, bijv. in verband met het leertempo, het begripsvermogen, de capaciteit tot abstraheren, de redeneervaardigheid, de kennis van de eerder bestudeerde leerinhouden, de verwerking en de organisatie daarvan, de vaardigheid in het aanpakken van problemen, de motivatie, ….

Deze eerste opsplitsing van de leerlingengroep tweede graad op basis van het aantal lestijden zal grotendeels samenvallen met een keuze op basis van de intrinsieke mogelijkheden voor wiskunde. Daardoor mag verwacht worden dat de klasgroepen homogener worden en dus dat te grote verschillen vermeden worden. Hierdoor wordt in elke groep de *interne differentiatie* beter beheersbaar en kan die betere resultaten afwerpen. Zo kan de leraar binnen elke leerweg voldoende tijd uittrekken om wiskundig-zwakke leerlingen adequaat op te vangen en toch ook ruimte maken voor de ontwikkeling van wiskundig-sterke leerlingen.
Met het oog op het keuzeproces voor de derde graad en de verdere studie- en beroepsloopbaan moeten alle leerlingen binnen hun mogelijkheden voldoende kansen krijgen om de vormingskansen van een doorgedreven wiskundevorming te ervaren. Elke leerweg heeft daartoe zijn eigen specifieke mogelijkheden en beperkingen. Binnen elke leerweg zijn daartoe in dit leerplan heel wat mogelijkheden aangegeven. Om deze interne differentiatie maximale kansen te geven, werd bij de conceptie van dit leerplan uitgegaan van het gescheiden zijn van beide leerwegen, zoals dat ook structureel werd ingebouwd.

Voor een goed begrip van de leerwegen en de eigen accenten die daarbinnen gelegd worden, is het zinvol verschillende aspecten van de wiskundevorming te beschouwen.
Een eerste aspect betreft het *proces van vertalen*, vertolken van situaties en probleemstellingen in wiskunde, het *mathematiseringsproces*. Hier horen doelstellingen over het verwerven van probleemoplossende vaardigheden en het kritisch reflecteren over de gevolgde weg en het bekomen resultaat. Hier kunnen ook de doelstellingen ondergebracht worden over het concipiëren van wiskunde, bijv. begripsvorming, opbouw van eigenschappen, modelvorming, … en het herkennen daarvan in de maatschappelijke realiteit.

Een tweede aspect heeft te maken met de vaardigheid om wiskunde te laten *functioneren bij het effectief uitwerken van een oplossing*, bijv. het berekenen, het beredeneren van oplossingen. Het gaat in essentie om het verwerven van de vaardigheid in het uitvoeren van wiskundige technieken zoals rekenen, vergelijkingen en stelsels oplossen, grafieken lezen en tekenen, figuren of bijzondere lijnen construeren, …. Die vaardigheden moeten zowel manueel als met technische hulpmiddelen verworven worden, met inbegrip van de mogelijkheden uit de informatie- en communicatietechnologie (ICT). Een aparte vaardigheid in het laten functioneren van wiskunde is vanuit het beschikbare kennisbestand elementen aanbrengen om oplossingen, vermoedens en beweringen met argumenten te onderbouwen.

Een derde aspect betreft de *ordening*, de samenhang in wiskunde, de organisatie van de kennis, zodat die adequaat en flexibel kan gehanteerd worden. Hier past de aandacht voor de 'logische' ordening, maar ook voor een ordening die snel toegankelijk is bij het oplossen van problemen.

Bij het verwerven van de doelstellingen kunnen voor deze drie aspecten ook nog verschillende verwachtingsniveaus gesteld worden aan de gebruikte *wiskundetaal*. Dat wil zeggen dat verschillende eisen gesteld worden aan bijvoorbeeld de exactheid van een berekening, de verwoording en de ordening van een verklaring, de helderheid van een redenering, de kwaliteit van een wiskundige verwoording, het formalisme van de wiskundetaal. Het is niet omdat eenzelfde doelstelling in beide leerwegen voorkomt dat ze door de verschillende leerlingengroepen op eenzelfde (taal)niveau moet worden bereikt. Wiskundige taalvaardigheid is precies een van de aanwijzers in het keuzeproces van de leerlingen naar de derde graad toe.

Door het leggen van verschillende accenten op deze vier aspecten wordt een *brede waaier van inhoudelijke en didactische processen* mogelijk. Daartegenover staat dat in het algemeen secundair onderwijs een ruime wiskundevorming evenwel nog tot de *basisvorming* behoort. Deze enigszins tegenstrijdige opvattingen worden verzoend door in de tweede graad de vorming te concretiseren in *twee fundamentele maar onderscheiden leerwegen*.

Vermits de beginsituatie voor de twee leerlingengroepen dezelfde is, bevatten deze leerwegen voor een deel analoge of zelfs gelijke ‘doelstellingen’. Voor een deel kan ook de initiële aanpak analoog verlopen. Dat betekent niet dat voor alle leerlingen het leerproces op dezelfde wijze, in hetzelfde tempo en tot hetzelfde niveau zal verlopen. Vaak zal de leraar bij leerweg 5 voor het leerproces een *meer zelfontdekkende didactiek* hanteren, waar bij leerweg 4 soms een *meer geleide of gestuurde aanpak* nodig is. Het is evident dat ten aanzien van de leerlingen van de leerweg 5 hogere eisen kunnen gelden voor de gemeenschappelijke basiskennis. Hierin komt het verschil in eisen ten aanzien van de gehanteerde wiskundetaal tot uiting (bijv. meer of minder gebruik van symbolen).

Ten opzichte van leerweg 4 bevat de leerweg 5 ook een aantal bijkomende doelstellingen, zowel in de basis als in de uitbreiding.
Binnen *het aspect mathematiseren* betreft het soms een bijkomende leerinhoud, een uitbreiding van de kennis, een extra wiskundig begrip, eigenschap of model. Soms gaat het om een verfijnen, een exacter formuleren of het veralgemenen van begrippen of eigenschappen (bijv. alle mogelijke gevallen exploreren).
Van leerlingen die leerweg 5 volgen wordt verwacht dat ze bij het oplossen van problemen creatiever zijn in het bedenken van oplossingen en meer zelf initiatief nemen. Ook in de aard, het niveau, de uitgebreidheid van een toepassing (bij eenzelfde wiskundig model) bestaat de mogelijkheid de leerwegen te differentiëren. Mogelijkheden worden hier zeker geboden door oefeningen die een ruimer kennisgebied bestrijken, die verschillende traditionele kennisonderdelen integreren en/of die een meer open formulering hebben.
Het belang van een meer zelfontdekkende didactiek kan niet genoeg onderstreept worden. De leraar zal geregeld zelfstandige leersituaties op gang moeten brengen en opvolgen. Van de leerlingen wordt verwacht dat ze, op basis van aangeboden leerteksten of leermateriaal al een klein onderdeel van de leerinhouden zelfstandig kunnen verwerken. En dat biedt dan weer kansen om hen op eigen tempo (bijv. naargelang interesse, motivatie) te confronteren met allerlei motiverende (geïntegreerde) toepassingen. Gevolg van dit alles moet zijn dat bij de leerweg 5 de probleemoplossende vaardigheden, zo belangrijk in de transfer naar andere vakgebieden en voor de verdere studieloopbaan, in hoge mate kunnen gerealiseerd worden.

Binnen *het aspect technieken uitvoeren* mag verwacht worden dat leerlingen die leerweg 5 kiezen handiger, vlotter met de technieken kunnen omspringen. De ruimere tijd kan ook besteed worden aan een bijkomende techniek (bijv. verschillende methoden bij het oplossen van stelsels, het omvormen van formules, het algebraïsch rekenen).
Eenzelfde redenering is geldig voor de vaardigheden in argumenteren, verklaren, bewijzen, …. Deze belangrijke wiskundige vaardigheden blijven in de leerweg 4 zeker niet achterwege, maar een consequente en doorgedreven vorming is wellicht niet voor alle leerlingen vereist en haalbaar. Voor de leerlingen van leerweg 5 behoren ze tot de noodzakelijke voorbereiding op de derde graad.

Daar waar bij de leerweg 4 sporadisch aandacht zal besteed worden aan *het aspect van samenhang en opbouw*, is dat bij de leerweg 5 een fundamenteel aandachtspunt. Dit levert de leerlingen belangrijke bijkomende troeven voor een doorstroming naar sterk-wiskundig geprofileerde studierichtingen.

Samenvattend kan gesteld worden dat in het leerplan vele kansen aangereikt worden om de wiskundevorming, zowel uit de basisvorming als uit het fundamenteel gedeelte, optimaal te laten verlopen ook in functie van de vervolgopleidingen. Anderzijds kunnen de leerplandoelstellingen binnen de verschillende leerwegen maar optimaal gerealiseerd worden als leerweg 4 en leerweg 5 afzonderlijk kunnen verlopen.

Ordening van de leerplandoelstellingen

De leerplandoelstellingen worden opgedeeld in doelstellingen voor *vaardigheden en attitudes* en *leerinhoudelijke* doelstellingen. Het realiseren van het leerplan houdt het realiseren in van *beide* onderdelen.

De doelstellingen voor *vaardigheden en attitudes* worden uitgeschreven voor het *geheel van de tweede graad*. Dit betekent dat hieraan in het eerste *én* in het tweede leerjaar aandacht moet besteed worden. Deze inhoudsoverstijgende doelstellingen bestrijken een brede waaier van de wiskundevorming. Het betreffen doelstellingen die niet in een oogwenk gerealiseerd worden, maar waaraan voortdurend aandacht moet besteed worden. Omwille van hun brede formulering en hun ruim toepassingsgebied kunnen ze op verschillende niveaus en verschillende wijzen gerealiseerd worden. Het gaat daarbij meer om het verwerven van een wiskundige dispositie en methode, dan om concreet specifieke doelen. Daarom worden ze voor beide leerwegen op dezelfde wijze geformuleerd. Dat wil, zoals eerder aangegeven, niet zeggen dat ze op dezelfde wijze worden gerealiseerd. In de pedagogisch-didactische wenken wordt hierop genuanceerd ingegaan.

De *leerinhoudelijke* doelstellingen worden opgedeeld in doelstellingen *per leerjaar*. Ze worden onderverdeeld in onderdelen zoals meetkunde, getallenleer en algebra, …. Met die groepering wil het leerplan niet opleggen op welke wijze de verschillende nieuwe leerinhouden kunnen aangebracht worden. Ook de volgorde waarin de verschillende leerstofonderdelen in het leerplan zijn weergegeven is niet noodzakelijk de volgorde waarin ze in de klas moeten worden behandeld. Zo is een integratie van verschillende onderdelen mogelijk.
Om tegemoet te komen aan de onderlinge leerlingenverschillen is differentiatie noodzakelijk. Een eerste differentiatie wordt bepaald door de verschillende leerwegen. Binnen elke leerweg worden nog meer mogelijkheden aangereikt door het opsplitsen van de leerinhoudelijke doelstellingen in twee rubrieken: *basisdoelstellingen* en *uitbreidingsdoelstellingen*.
Voor elke leerweg vormen de basisdoelstellingen een minimum. Bij het opstellen van het jaarplan moet er over gewaakt worden dat ze volledig kunnen verwerkt worden.
De uitbreidingsdoelstellingen bieden differentiatiemogelijkheden volgens de mogelijkheden die haalbaar zijn met de klasgroep en volgens de verdere studieloopbaan van de leerlingen. Naast de uitbreidingsdoelstellingen worden in de pedagogisch-didactische wenken nog aanwijzingen gegeven. In beide gevallen staat de commentaar onder de titel *Uitbreiding*.

Verwijzing naar de eindtermen

Bij de doelstellingen is een *verwijzing naar de eindtermen* (kolom Et) opgenomen. Bij een aantal doelstellingen staan meer verwijzingen, als gelijktijdig aan het realiseren van meer dan één eindterm wordt gewerkt. De verwijzing bij een doelstelling naar een eindterm betekent niet dat die uitsluitend bij die doelstelling aan bod komt, want verschillende doelstellingen kunnen naar dezelfde eindterm verwijzen. Bij de doelstellingen in verband met vaardigheden en attitudes is een verwijzing opgenomen naar de algemene eindtermen. Deze algemene eindtermen worden zeker niet op één enkel lesmoment nagestreefd. In de praktijk komen ze voortdurend aan bod. Daarom wordt bij de inhoudelijke doelstellingen niet verwezen naar algemene eindtermen.
Het verband tussen eindtermen en doelstellingen wordt overzichtelijk voorgesteld in een concordantietabel in hoofdstuk 7.

Aanbeveling voor het aantal lestijden

Voor elke leerweg wordt een aanbeveling gedaan over het aantal te besteden lestijden. Deze getallen zijn slechts *richtinggevend*.
Een gelijk aantal lestijden voor de twee leerwegen betekent in de klaspraktijk niet dat het om parallelle lessen gaat. De keuze van de werkvorm en de keuze van de opdrachten is afhankelijk van de leerweg, zodat de leerlingen in beide leerwegen optimale leerkansen krijgen in functie van de te verwerven doelstellingen en vaardigheden.
Binnen de leerweg 5 werden een aantal lestijden verrekend expliciet bestemd voor *syntheseoefeningen*, waarbij het mogelijk is oefeningen aan te bieden die een specifiek onderdeel overstijgen of waarbij een groter geheel van de kennis moet gebruikt worden.

Leeswijzer

De presentatie van de leerplandoelstellingen en leerinhouden gebeurt onder de volgende hoofding.

	4	5	Leerplandoelstellingen en leerinhouden	Et

In de eerste kolom worden de doelstellingen genummerd. Een letter verwijst naar het leergebied.
In de tweede (respectievelijk derde) kolom is opgenomen hoe de doelstelling moet geïnterpreteerd worden binnen de leerweg 4 (respectievelijk leerweg 5). Daarbij staat ‘B’ voor *basisdoelstelling*, ‘U’ voor *uitbreidingsdoelstelling* en ‘–‘ voor *niet van toepassing*.

De vierde kolom beschrijft de leerinhoud en de doelstelling die daaromtrent moet nagestreefd en/of bereikt worden. Als er in een tekst verwezen wordt naar een doelstelling gebeurt dat met leerjaar, onderdeel, nummer en niveau. Zo verwijst **1 G 4 B** naar het **1**ste leerjaar, onderdeel **g**etallenleer, doelstelling **4**, **b**asis.
De vijfde kolom bevat de verwijzing naar de inhoudelijke eindtermen *wiskunde* met hun *nummer* (bijv. Et 27 verwijst naar eindterm 27).

Binnen de pedagogisch-didactische wenken wordt commentaar voorzien die voor beide leerwegen van toepassing is. Het betreft commentaar over instapmogelijkheden, concrete wijzen om de doelstelling te realiseren uitgaande van de gemeenschappelijke beginsituatie. Die commentaar komt onder de hoofding:

4 & 5	**Pedagogisch-didactische wenken**

Sommige commentaar is specifiek bedoeld voor de leerweg 4. Daarin komt vaak een afbakening aan bod, een nuancering van de algemene commentaar voor de specifieke leerlingengroep vier lestijden en commentaar over een specifieke didactische aanpak bij deze leerlingen. Die commentaar komt onder de hoofding:

4	**Pedagogisch-didactische wenken**

Anderzijds is commentaar voorzien specifiek voor de leerweg 5. Het betreft een beschrijving van eventueel hogere eisen, de uitbreidingsmogelijkheden, de kansen om leerlingen beter voor te bereiden op een keuze voor de derde graad. Die commentaar komt onder de hoofding:

5	**Pedagogisch-didactische wenken**

5.1 Vaardigheden en attitudes

5.1.1 VAARDIGHEDEN

4 & 5	Leerplandoelstellingen vaardigheden	Et
De leerlingen ontwikkelen (binnen het gekende wiskundig instrumentarium)		
V1	rekenvaardigheid, o.m. – het vlot rekenen met getallen (zowel hoofdrekenen, cijferrekenen als rekenen met een rekenmachine); – het rekenen met formules en algebraïsche vormen; – het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden, stelsels, …; – het voorspellen en inschatten van de grootte-orde van een resultaat; – het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het uitvoeren van berekeningen.	5
V2	meet- en tekenvaardigheid, o.m. – het analyseren en opbouwen van een figuur bij een redenering; – ruimtelijk voorstellingsvermogen; – het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het opbouwen van figuren.	1 5
V3	wiskundige taalvaardigheid, o.m. – het begrijpen van wiskundige uitdrukkingen (zowel mondeling als schriftelijk); – het lezen van figuren, tekeningen, grafieken en diagrammen; – het verwoorden van hun gedachten en hun inzichten (zowel mondeling als schriftelijk);	1
5	– het beheersen van een wiskundige vaktaal (o.m. symbolen) gericht op het geven van een bewijs.	
V4	denk- en redeneervaardigheden, o.m. – het onderscheid maken tussen hoofd- en bijzaken, gegeven en gevraagde, gegeven en te bewijzen; – het begrijpen van een redenering of argumentering bij een eigenschap; – het opbouwen van een redenering ter verklaring van een eigenschap of de oplossing van een probleem, dit houdt onder meer in: – een hypothese (vermoeden) formuleren en argumenteren; – een eigenschap formuleren op basis van een onderzoek op een aantal voorbeelden, een inductieve redenering; – een gegeven redenering op geldigheid onderzoeken; zelf een verklaring of een bewijs opstellen; – een eigenschap verantwoorden door de deductieve samenhang met andere eigenschappen aan te tonen; – het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het opbouwen van een redenering;	1 5 6
5	– het formuleren van een synthese van een wiskundig probleem door de (deductieve) samenhang met een reeks eigenschappen te geven.	
V5	probleemoplossende vaardigheden, zoals – een probleem leren ontdekken, het behoorlijk stellen en het te bereiken doel formuleren; – probleemoplossende vaardigheden (i.h.b. heuristische methoden) toepassen bij het werken aan problemen, zowel over alledaagse als over zuiver wiskundige situaties; bijv. een opgave herformuleren, een goede schets of een aangepast schema maken, informatie omzetten in een wiskundige vorm of omgekeerd, notaties invoeren, onbekenden kiezen, voorbeelden analyseren; – reflecteren op de gemaakte keuzen voor representatie en oplossingstechnieken; – resultaten controleren op hun betrouwbaarheid en volledigheid; – ICT-hulpmiddelen gebruiken om wiskundige informatie te verwerken en wiskundige problemen te onderzoeken.	2 3 4 5 6

V6	leervaardigheden, o.m. – het verwerken van losse gegevens; – het verwerken van samenhangende informatie; – het raadplegen van informatiebronnen; – het plannen van de studietijd; – het sturen van het eigen leerproces.	

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen moeten bij hun wiskundevorming een aantal vaardigheden ontwikkelen. Voor de duidelijkheid worden ze hier gescheiden geformuleerd. Dit betekent echter niet dat ze altijd zo gescheiden voorkomen. In een wiskundig leerproces wisselen ze voortdurend af.

Het is belangrijk te beseffen dat vaardigheden maar bereikt worden doorheen een proces van langere duur. Een aantal vaardigheden werden aangezet in het basisonderwijs en de eerste graad. Ze moeten verder uitgewerkt worden in de tweede graad en eventueel nog verder in de derde graad.
Vaardigheden worden niet automatisch gegenereerd door de ermee verwante leerinhouden. Er moet bewust aandacht aan besteed worden. Dit betekent niet noodzakelijk dat ze in afzonderlijke lessen gepresenteerd moeten worden. Ze dienen wel meermaals bij het spontaan gebruik geëxpliciteerd te worden.

Een aantal vaardigheden winnen aan belangrijkheid in functie van de vervolgopleiding van de leerlingen. De mate waarin leerlingen bepaalde vaardigheden beheersen is een aanwijzing voor het oriënteren van de leerlingen in functie van hun latere studie- en beroepsloopbaan.

5 Pedagogisch-didactische wenken

Bij een keuze voor vijf wekelijkse lestijden wiskunde mag verwacht worden dat de aandacht voor meer theoretische vaardigheden hoger ligt, zonder evenwel de meer praktische vaardigheden te verwaarlozen.

1 Rekenvaardigheid

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

In de tweede graad worden leerlingen geconfronteerd met een verdere ontwikkeling van het rekenen, zowel binnen de getallenleer (bijv. wortelvormen), het algebraïsch rekenen (bijv. ontbinden in factoren, rekenen met formules, rekenen met functievoorschriften), als in de meetkunde (bijv. wortelvormen bij de stelling van Pythagoras, evenredigheden bij gelijkvormige figuren, driehoeksmeting) en in de beschrijvende statistiek. Daarnaast worden rekenprocedures ontwikkeld voor het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels die voldoende moeten beheerst worden. Of het nu gaat over effectief rekenen of rekenprocedures, wiskunde kan daartoe niet gereduceerd worden. Ze zijn slechts *middelen* om problemen op te lossen. En daarbinnen krijgen ze hun juiste betekenis. Langdurig oefenen van rekenprocedures in een geïsoleerde situatie heeft dan ook weinig zin. Zoals hierboven vermeld, zijn er voldoende natuurlijke gelegenheden om een gepaste rekenvaardigheid te verwerven.

Met de opgang van geavanceerde *rekenmachines* en gemakkelijk toegankelijke en adequate *software* kan de aandacht voor het automatiseren van deze technieken en procedures beperkt worden. Het is nu al duidelijk dat wie later nog rekenprocedures nodig heeft, in de praktijk veelal zal gebruik maken van moderne informatie- en communicatietechnologie. Weliswaar is inzicht nodig in de precieze werking van de gebruikte procedures. Het gebruik van een rekenmachine of een computer mag het inzicht in de noodzakelijke basisvaardigheden dus niet verminderen. Maar er zal minder aandacht besteed worden aan de manuele beheersing ervan. Ook de kritische houding ten aanzien van wat op het scherm van een toestel verschijnt moet verworven worden. Anderzijds bieden rekenmachines nieuwe mogelijkheden. Praktische problemen die tot nu toe niet binnen het bereik lagen van het secundair onderwijs omdat de berekeningen (bijv. bij het oplossen van vergelijkingen) te ingewikkeld of te moeilijk waren, kunnen nu wel behandeld worden.

2 Meet- en tekenvaardigheid

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

De meet- en tekenvaardigheid die in de eerste graad verworven werd kan nu bij het onderzoeken van eigenschappen goed gebruikt worden. Het lezen en interpreteren van figuren is een belangrijk onderdeel van een meetkundig analyseproces. Ook bij de ontwikkeling van ruimtelijk inzicht is het voorstellingsvermogen essentieel. Leerlingen moeten de gewoonte aannemen bij een meetkundig probleem, zowel in het vlak als in de ruimte, een tekening of een schets te maken.

Het lezen en interpreteren van informatie uit grafieken en diagrammen kan onderhouden worden bij het oplossen van problemen, o.m. in het onderdeel beschrijvende statistiek, door die aan te bieden in allerlei presentaties. Bij de studie van reële functies krijgt het begrip grafiek meer wiskundig gehalte. Leerlingen moeten vaardig worden in het lezen van de informatie die in een grafiek verstrekt wordt. Ze moeten probleem, grafiek en voorschrift met elkaar kunnen verbinden. Niettegenstaande moderne technieken voorhanden zijn om een grafiek in een oogwenk te tekenen, is het eigenhandig tekenen zinvol. Zo worden de leerlingen geconfronteerd met attitudes zoals nauwkeurigheid en zorg.

Een bijzondere en ‘nieuwe’ vaardigheid is het omgaan met informatie uit meetkundige figuren gepresenteerd op het scherm van een computer of een grafische rekenmachine. Een eerste stap daarin is dat leerlingen de soms compact aangeboden informatie leren lezen en interpreteren. Daarnaast moeten ze ook het gebruik van dergelijke programma’s verwerven, zodat ze zelf met behulp van het toestel situaties kunnen onderzoeken.
Grafische rekenmachines en wiskundige software bieden de mogelijkheid om van bij de aanvang van de studie van functies de grafiek er bij te betrekken. Leerlingen kunnen de invloed van parameters op het verloop zelf in een oogwenk onderzoeken. Grafische rekenmachines kunnen als een veredelde pen een meerwaarde brengen aan de behandelde leerinhoud, zonder dat ze een aantal basisvaardigheden overbodig maken. Zo dienen leerlingen toch kritisch om te springen met de getoonde resultaten, bijvoorbeeld de begrensdheid inzien van het uitleesvenster of een snelle controle uitvoeren (cf. het schatten bij het rekenen) aan de hand van een nulpunt of van enkele specifieke punten, het stijgen en dalen van de grafiek, eventueel het asymptotisch gedrag.

3 Wiskundige taalvaardigheid

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

Wiskunde is uitgegroeid tot een wetenschap waarin begrippen en eigenschappen welomschreven moeten worden. Daartoe wordt de omgangstaal vaak verengd tot een meer *specifieke vaktaal* met eigen regels.
Begrippen, eigenschappen, procedures en wiskundige verbanden worden erin omschreven met behulp van typische *vaktermen* (bijv. vierkantswortel, evenredig, richtingscoëfficiënt, stelsel, evenwijdig met, middelloodlijn, ligt op gelijke afstand van, histogram, ...). Soms moet ook een onderscheid gemaakt worden tussen de wiskundige en de dagelijkse betekenis van een term, waarbij de wiskundige betekenis meestal minder vaag omschreven wordt. In de omschrijving van de begrippen en de formulering van eigenschappen worden naast vaktermen ook specifieke *kernwoorden* gebruikt, die wijzen op het veralgemeningsproces, verbanden, samenhang, ... (bijv. gelijk aan, als ... dan, daaruit volgt, alle, sommige, ...).
De wiskundetaal kent vanuit haar voorgeschiedenis een sterke *formalisering* en *symbolisering* die snelle communicatie en universalisering mogelijk maakt, maar die wiskunde voor sommige leerlingen precies zo moeilijk toegankelijk maakt. De eisen die gesteld worden aan deze formalisering zullen uiteraard toenemen naarmate de leerling voor een hoger aantal wekelijkse lestijden wiskunde kiest.
Naast de verbale taal is in wiskunde ook de specifieke *visuele taal* van tekeningen en wiskundige voorstellingen van belang. Een bijzondere vorm van visueel geordend aanbieden van informatie is die in tabelvorm.
Buiten de vaktaal waarmee wiskunde opgebouwd wordt, moeten leerlingen de *beschrijvende taal* blijven hanteren waarin over het wiskundig handelen gesproken wordt (met termen zoals definitie, eigenschap, kenmerk, verklaar ..., bereken..., los op ..., construeer ..., vraagstuk).
Tenslotte, reële problemen worden meestal niet rechtstreeks in de wiskundetaal gesteld. Een belangrijke vaardigheid is het omzetten, het *vertalen* van de omgangstaal naar de wiskundige vaktaal.

In de tweede graad moeten leerlingen vertrouwd geraken met de verschillende aspecten van de wiskundetaal. In een actief leerproces krijgen de leerlingen heel wat kansen om de verschillende communicatieve vaardigheden (zowel lezen, luisteren, spreken als schrijven) te hanteren en ze toe te passen op wiskundige situaties. In communicatie met andere leerlingen kunnen voorbeelden en tegenvoorbeelden van begrippen en eigenschappen besproken worden, wat de begripsvorming ondersteunt. Speciale aandacht kan gaan naar de betekenis van de wiskundige vaktermen en kernwoorden. De leerlingen moeten leren de geëigende vaktermen correct te gebruiken. Ze moeten geleidelijk vertrouwd geraken met strengere eisen die aan wiskundige wendingen worden gesteld. Toch mag dit niet leiden tot een stroef en steriel gebruik van de wiskundetaal. Leerlingen moeten ook leren hun ervaringen, bevindingen, vermoedens, besluiten en oplossingen te verwoorden. Precies in het verwoorden van hun gedachten en hun inzicht kunnen ze beter de tekortkomingen ervan ervaren en daardoor hun inzicht verdiepen.

Omdat wiskundige informatie ook visueel kan overgebracht worden, moet aandacht besteed worden aan het lezen en interpreteren van visuele informatie (bijv. op tekeningen in de meetkunde of informatie op een grafiek of een diagram). Het hanteren van een schets of een nauwkeurige tekening als middel tot communicatie moet aangemoedigd worden. Het maken van een meer abstracte of formele redenering zal ondersteund worden door het redeneren op figuren.

4 Pedagogisch-didactische wenken

Bijzondere aandacht moet besteed worden aan het verwerven van de leesvaardigheid bij het lezen van de tekst van opgaven, problemen en vraagstukken. Vaak is de moeilijkheid hier voor de leerlingen groter dan bij het uitvoeren van gekende rekentechnieken. Aan deze belangrijke stap, noodzakelijk bij het analyseren van problemen en het formuleren van vermoedens, moet bijzondere aandacht besteed worden.

5 Pedagogisch-didactische wenken

Het spreekt voor zich dat aan de taal van de leerlingen hogere eisen kunnen gesteld worden wat betreft exactheid, duidelijkheid, overzichtelijkheid en bondigheid.
Van de leerlingen mag verwacht worden dat ze de voordelen van een formelere taalvorm waarderen en daardoor gemotiveerd zijn om zich deze taalvorm eigen te maken. Het verwerven ervan verloopt echter niet zonder inspanning en zou in een geleidelijk en gedifferentieerd proces moeten gebeuren. Dat betekent concreet dat bepaalde aspecten al wel geformaliseerd kunnen worden, daar waar andere, bijv. bij nieuwe leerinhouden, nog op een minder geformaliseerd taalniveau kunnen verlopen. Formalisering en symbolisering zijn geen doel op zich, maar moeten functioneel ingeschakeld worden.
De leerlingen moeten een aantal argumentaties, verklaringen en bewijzen kunnen geven. Ook hier zal de wiskundetaal verzorgd worden. Bovendien zal voldoende aandacht besteed worden aan een ordelijke presentatie.

4 Denk- en redeneervaardigheden

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

Met denk- en redeneervaardigheden worden onder meer bedoeld abstraheren (bij de begripsvorming), een vermoeden formuleren, veralgemenen (ontdekken van een eigenschap), analyseren, synthetiseren, structureren, ordenen, analoog werken, argumenteren, bewijzen. Het gaat om meer dan het kunnen bewijzen van eigenschappen.

Vanuit het actief onderzoeken van relaties tussen begrippen worden leerlingen geconfronteerd met vele vormen van beweringen en vermoedens. Niet elk intuïtief vermoeden leidt tot een 'eigenschap', niet elke bewering zal blijken juist of veralgemeenbaar te zijn. Daarom is het zinvol bij deze besluitvorming aandacht te besteden aan de argumenten die ervoor kunnen gegeven worden. Ook bij actief probleemoplossen zullen de leerlingen hun oplossing of hun redenering op een of andere wijze moeten argumenteren.

Het verwerven van deze *redeneervaardigheid* vraagt een geleidelijke en geduldige aanpak. Zinvol is aandacht te besteden aan de verschillende fasen van het opbouwen van een redenering of een bewijs, o.m. het redeneren op een tekening, het argumenteren van delen van een redenering (bijv. het expliciteren van gegeven en te bewijzen), het inzien van en/of zelf ontdekken van de kernidee uit een redenering, het begrijpen en uitleggen van een gegeven bewijs, het maken van redeneringen in analoge situaties, het zelf uitschrijven van een behoorlijk geordende redenering.

5 Pedagogisch-didactische wenken

Er zal voldoende aandacht besteed worden aan het *verfijnen van de argumentatie* die leerlingen aanreiken om vermoedens te onderbouwen. Geleidelijk aan moet daaruit het inzicht in ‘wiskundig bewijzen’ groeien. Waar mogelijk zullen precies de spontane opwerpingen, om een oplossing te 'verdedigen', gebruikt worden om een leergesprek op te zetten. Het uitwisselen van argumentaties tussen de leerlingen onderling en ten aanzien van de leerkracht is een gelegenheid om die kritisch te bevragen en te toetsen. Belangrijk hierbij is dat weerhouden argumenten als valabel aanvaard worden en dat de reden van het afwijzen van argumenten wordt ingezien. In de eerste graad maakten de leerlingen al kennis met dergelijke ‘verklaringen’. In de tweede graad moeten deze verklaringen kwalitatief beter worden. Dat betekent dat naast de redenering zelf, ook het ordelijk uitschrijven ervan een doelstelling wordt. Ook verklaringen van moeilijke problemen zullen aan bod komen.

In de tweede graad moeten de leerlingen leren *zelf een bewijs op te bouwen*, bijv. als verklaring bij een eigenschap of een toepassing, als verantwoording van de oplossing van een probleem. Belangrijk daarbij is dat de leerlingen zelf leren een analyse maken van de mogelijkheden om een bewijs op te bouwen. In deze fase kunnen de leerlingen de wisselwerking tussen kenniselementen en zoekstrategieën en het belang van beide, ervaren. Daarna volgt het stap voor stap uitklaren en ordelijk uitschrijven van het hiervoor genoemde argumentatieproces. Het formele bewijs is daarin de laatste stap. Dit doel betekent niet dat nu alles moet bewezen worden. Voor nieuwere onderdelen volstaat een intuïtievere kennismaking. In de meetkunde kan bijvoorbeeld geïllustreerd worden dat voor redeneringen en verklaringen verschillende uitgangspunten mogelijk zijn.

Leerlingen kunnen in de tweede graad al kennismaken met verschillende bewijsvormen (inductie, ongerijmde, …). In een eerste fase moeten ze een bewijs en de specificiteit van de vorm ervan kunnen begrijpen en verklaren. In een volgende fase moeten ze zelf dergelijke bewijzen kunnen opstellen.

Tenslotte moeten leerlingen geleidelijk het inzicht verwerven dat ze voor hun verantwoordingen niet zomaar in het wilde weg argumenten kunnen aanbrengen, maar dat ze moeten terugvallen op een samenhangend geheel van eigenschappen. Het flexibel organiseren van deze kennis is een belangrijk doel voor de tweede graad. Zo vergt het inzicht in hun kennisorganisatie dat leerlingen het onderscheid begrijpen tussen definitie, kenmerk en eigenschap. Een strenge axiomatische opbouw (d.w.z. vanuit een minimaal axiomastelsel) moet evenwel niet worden nagestreefd.

5 Probleemoplossende vaardigheden

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

Leerlingen moeten vaardigheid verwerven in het zelfstandig oplossen van problemen. Het bevorderen van dit probleemoplossend denken is *een van de voornaamste opdrachten van leerkrachten wiskunde*. De transferwaarde van deze vaardigheden naar andere vakken kan zeer groot zijn. Probleemoplossende vaardigheden zijn ook een essentiële troef in de studie- en beroepsloopbaan van leerlingen.

De meest zinvolle aanpak van probleemoplossende vaardigheden lijkt die van een volgehouden *integratie in het normale lesgebeuren*. De leerlingen zullen deze vaardigheden maar verwerven doorheen een actief proces van zich vragen stellen, patronen ontdekken, antwoorden zoeken en onderzoeken, voorbeelden en tegenvoorbeelden opzoeken, vraagstelling vereenvoudigen, voorstellen analyseren, testen en bijsturen, vermoedens argumenteren, ...
Belangrijk is dat de leerlingen aantrekkelijke, haalbare problemen aangeboden krijgen. Vooral succeservaring zal leerlingen aanzetten om nieuwe en moeilijkere problemen aan te pakken. Leerlingen moeten evenwel ook problemen leren zien. Daarom zullen ook geregeld open problemen, weliswaar haalbaar op het niveau van de leerlingen, aangeboden worden. Problemen moeten niet noodzakelijk altijd buiten de wiskunde gezocht worden. Ook wiskundige situaties kunnen als aantrekkelijke problemen gepresenteerd worden.

Het verwerven van probleemoplossende vaardigheden is een lang en arbeidsintensief proces. Daarom moet de aanpak in de tweede graad aansluiten op de inspanningen die al in de eerste graad werden gedaan. Zo kan men terugvallen op verschillende stappen die voor leerlingen misschien al vertrouwd zijn.
In de eerste plaats zal aandacht besteed worden aan een goede *probleemstelling*. Het probleem moet voor de leerlingen duidelijk zijn (dit kan bijvoorbeeld door de leerlingen het probleem in eigen woorden te laten stellen). Als het gaat om het onderzoeken van verbanden of eigenschappen moet dit leiden tot een duidelijke formulering van een vermoeden of hypothese.
Daarop volgt het *analyseren* en/of het *mathematiseren*. Dit betekent dat de leerlingen de wiskundige probleemstel-

ling in een opgave kunnen herkennen (bijv. het gaat er om aan te tonen dat rechten loodrecht op elkaar staan). Dit betekent onder meer dat ze bij een situatie gegeven en gevraagde kunnen bepalen, kwantificeerbare elementen kunnen opzoeken en wiskundig vertolken, relaties tussen elementen (gegevens onderling, gegevens en gevraagde) kunnen leggen en wiskundig vertolken, uit te voeren bewerking(en) kunnen bepalen. In deze fase worden vaak *zoekstrategieën* of *heuristische methoden* gebruikt. In een leerproces van probleemoplossende vaardigheden is het belangrijk deze te expliciteren. Bij een complexer probleem is het zinvol in deze fase een planmatige aanpak te voorzien en de uitvoering van het plan verderop te bewaken.
Daarop volgt het *uitschrijven van een oplossing, het berekenen van het resultaat of het uitschrijven van een verklaring*, het maken van een *(reken)proef*, het maken van een *realiteitsproef* (kan dit resultaat in deze context?) en het formuleren van een *antwoord* op het gestelde probleem.

Heuristische methoden
Voorbeelden van veel gebruikte heuristische methoden zijn:
- gegeven en gevraagde wiskundig expliciteren;
- bij een gegeven situatie een schets of een tekening maken;
- bij een gegeven situatie een voorbeeld of een tegenvoorbeeld geven;
- bij een situatie bijzondere gevallen onderzoeken;
- gebruik maken van analogie, symmetrie, …;
- een eenvoudigere probleemstelling onderzoeken;
- een of meer veranderlijken in het probleem constant houden;
- een gestelde voorwaarde laten vallen;
- het probleem voorstellen als opgelost.

Heuristische methoden worden veelvuldig gebruikt. Belangrijk is ze bewust te laten ervaren en te expliciteren op het ogenblik dat ze spontaan gebruikt worden. Een actieve aanpak van het leerproces laat toe dat leerlingen hierover onderling en met de leerkracht informatie uitwisselen. Met het oog op het verwerven van een hogere graad van zelf actief en zelfverantwoordelijk leren en werken, kan een aantal complexere oefeningen aangeboden worden, waarbij doelbewust het inzicht in het gebruik van een heuristische methode wordt nagestreefd.
Bij het oplossen van problemen worden de leerlingen geconfronteerd met het toepassen van hun kennis in diverse situaties. Het is belangrijk te beseffen dat probleemoplossende vaardigheden en heuristische methoden maar effectief zullen werken, als de leerlingen over een efficiënte kennisorganisatie beschikken. Het oplossen van problemen kan leerlingen precies motiveren deze kennisorganisatie te onderhouden.

De *rol van de leerkracht* kan erin bestaan leerlingen individueel tot nadenken aan te zetten, discussie over oplossingen uit te lokken en hierbij een kritische houding aan te bevelen. De leerkracht kan verkiezen minder inhoudelijke hulp aan te reiken, maar eerder te verwijzen naar het gebruik van heuristische methoden en de beschikbare kennisorganisatie (niet naar specifieke kennis). De leerkracht zou dezelfde werkwijze kunnen hanteren bij het klassikaal opstellen van bewijzen van eigenschappen en het opbouwen van redeneringen. Ook is het zinvol dat de leraar aan het eind van een oplossingsproces of een redenering de denkstappen eens controlerend overloopt en de gebruikte heuristische methoden eens expliciet laat formuleren of bevragen.
Het verdient aanbeveling dat voldoende differentiatie in de opdrachten wordt nagestreefd, omdat in de verwerving van probleemoplossende vaardigheden het verschil tussen de leerlingen erg groot kan zijn. Hierdoor kan zowel een wiskundig-sterke leerling aan zijn trekken komen, als tijd vrijgemaakt worden voor het begeleiden van de wiskundig-zwakke leerlingen. Voor wiskundig-sterke leerlingen kan men bijv. vlugger naar open problemen grijpen.

5 Pedagogisch-didactische wenken

Bij eenzelfde wiskundig model kunnen verschillende toepassingen gemaakt worden. Een gradatie in de oefeningen is noodzakelijk om vertrouwd te worden met bepaalde probleemstellingen, technieken, … Anderzijds moeten ook meer complexe opdrachten aan bod komen (bijv. oefeningen die een ruimer kennisgebied bestrijken of die verschillende traditionele kennisonderdelen integreren). Meer open geformuleerde opdrachten zullen meer uitdaging bieden aan de leerlingen en hen allicht ook meer motiveren.
Van de leerlingen mag verwacht worden dat ze zelf initiatief nemen en in het algemeen zelfstandig kunnen werken aan problemen. In die zin zal de beschikbare kennis voldoende adequaat georganiseerd worden, zodat een soepel gebruik mogelijk is.

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

Aan het verwerven van leervaardigheden moet ook in de tweede graad nog bewust gewerkt worden. Daarbij moet meer aandacht gaan naar het zelfstandig leren door de leerlingen. Belangrijk is dat de bijdrage van wiskunde kadert in een bredere aanpak van de problematiek leren-leren in de school en de groei naar een zelfverantwoord leren. Omdat het 'de leerling' is die adequate technieken moet verwerven, zal over de vakken heen toch een zekere eenvormigheid nagestreefd worden. Algemene technieken worden uiteraard vakspecifiek vertaald.

Bij het verwerven van wiskunde worden een aantal *leervaardigheden* geactiveerd.
Voorbeelden zijn

- het inprenten (notaties, symbolen, formules);
- het gebruik van de vormkenmerken van een tekst (titels, subtitels, afbeeldingen, schikking kaders, lettertype, tekstmarkeringen);
- de aandacht voor het begrijpen en analyseren van het geleerde;
- het opnieuw opzoeken en zo nodig inoefenen van voorkennis (het aanleggen of gebruiken van een vademecum kan hierbij ondersteunend werken);
- het verdiepen van de leertekst in leerboeken of notities (zich vragen stellen bij de leerinhoud, de tekst structureren bijv. met tekstmarkeringen, kleur, ..., het bijhouden van een kennisschema);
- het gebruiken van 'informatiebronnen' (een inhoudstafel, een register, een samenvatting van de leerinhouden in het leerboek, een vademecum, een handleiding van de rekenmachine);
- het zichzelf sturen bij het leren
  bijv. de keuze van het verwerkingsproces eigen aan de wiskundige leerinhoud,
  het oordeelkundig gebruiken van een antwoordblad, een correctiesleutel,
  het plannen van de studietijd,
  het onderzoeken van de gemaakte fouten (bijv. door de eigen werkwijze te vergelijken met die van anderen, aangeven waarom iets fout gegaan is) en hoe die kunnen vermeden worden.

Belangrijk is te beseffen dat *tijdens het leerproces* zelf al sterk kan bijgedragen worden tot het realiseren van leervaardigheden. Zo kan een leerproces waarin de leerling actief betrokken wordt bij het bevragen van de leerinhouden, die leerling leren 'vragen stellen'. Het 'analyseren' van een definitie of eigenschap in de klas ondersteunt het analyseren tijdens het instuderen. Het gebruik van een ordelijk bordschema met het geëxpliciteerd (niet automatisch) gebruik van verdiepingstechnieken (kleur, kaders, structuur) zal leerlingen aanzetten dit ook te doen. Het vergelijken van het bordschema met de neerslag van de leerstof in het leerboek (veel meer dan het aanduiden van de leerstof) en het wijzen op de vormkenmerken ervan ondersteunt het leren. Het hernemen van de structuur bij de aanknopingsfase van de les, het laten raadplegen van overzichten van leerinhouden (bijv. samenvatting in het leerboek en/of in een beschikbaar of eigenhandig aangelegd vademecum) zal hen telkens opnieuw confronteren met structurering en synthese van hun kennis en hen meteen leren hun voorkennis zelfstandig op te zoeken en aan te vullen. De wijze waarop de leerkracht omgaat met fouten en deze aangrijpt als leerkansen, kan leerlingen de waarde leren van het onderzoeken van hun fouten. De wijze waarop leerlingen betrokken worden bij het leerproces kan hun zelfwerkzaamheid en hun verantwoordelijkheid voor het eigen leren versterken.

5.1.2 ATTITUDES

4 & 5	**Pedagogisch-didactische wenken**	
De leerlingen ontwikkelen		
A7	zin voor nauwkeurigheid en orde, o.m. – een houding van gecontroleerd uitwerken en terugkijken op uitgevoerde opdrachten.	4
A8	zin voor helderheid, bondigheid, volledigheid, eenvoud en doelmatigheid van de gebruikte wiskundetaal, o.m. – de ervaring dat gegevens uit een probleemstelling toegankelijker worden door ze doelmatig weer te geven in een geschikte wiskundige representatie.	10
A9	kritische zin, o.m. – de ervaring dat bewijsvoeringen in wiskunde belangrijk en noodzakelijk zijn; – een kritische houding tegenover de eigen berekeningen, beweringen, handelingen, ...; – een reflectieve houding ten aanzien van gemaakte keuzen voor representatie en oplossingstechnieken; – een kritische houding tegenover de mogelijkheden en de beperkingen van het gebruik van wiskunde; – i.h.b. een kritische houding tegenover het gebruik van statistiek in de media.	4 6 9 47
A10	zelfvertrouwen, zelfstandigheid, doorzettingsvermogen en doelmatigheid bij het aanpakken van problemen en opdrachten.	12 13
A11	zelfregulatie, o.m. – een onderzoeksgerichte houding ten aanzien van feiten, opgaven en problemen; – het oriënteren, plannen, uitvoeren en bewaken van een oplossingsproces.	11
A12	zin voor samenwerking en overleg, o.m. – de ervaring dat ze hun mogelijkheden kunnen vergroten door samenwerking met anderen; – appreciatie voor een andere oplossing of aanpak.	14
A13	waardering voor wiskunde door inzicht in de bijdrage ervan in de culturele, historische en wetenschappelijke ontwikkeling, o.m. – voorbeelden geven van reële problemen die met behulp van wiskunde kunnen worden opgelost; – voorbeelden geven van gebruik van wiskunde in de kunst; – zin voor verwondering en bewondering, bijv. voor de elegantie van een redenering of een oplossing;	7 8
5	– een gerichte belangstelling voor wiskundige aspecten van situaties, problemen en oplossingen	

4 & 5	**Pedagogisch-didactische wenken**

Doorheen de wiskundevorming kunnen leerlingen een aantal attitudes en in het bijzonder leerattitudes verwerven. Omdat zoals bij leervaardigheden het de leerling is die attitudes moet verwerven, zal over de vakken heen een zekere eenvormigheid nagestreefd worden en moet de bijdrage van wiskunde *kaderen in een bredere attitudevorming in de school*.

Het is belangrijk te beseffen dat attitudes maar bereikt worden doorheen een *proces van langere duur*. Daarom zullen attitudes nagestreefd worden op grond van wat al verworven werd in de basisschool en in de eerste graad en zullen ze ook in de derde graad nog verder ondersteund worden.

In verband met de controle geldt de volgende opmerking. "Attitudes zijn altijd na te streven. De effecten ervan op de leerlingen maken geen deel uit van het inspectieonderzoek." (Vlor, Advies betreffende de eindtermen ... p. 22).

1 Zin voor nauwkeurigheid en orde

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

Zin voor nauwkeurigheid en orde kan nagestreefd worden bij de ontwikkeling van reken-, meet- en tekenvaardigheid. In de tweede graad moeten leerlingen beschikken over de gewoonte op hun uitvoeringsproces terug te kijken als een vorm van *controle*. Ze kunnen zo vlugger tot nauwkeurige resultaten komen.
Omdat de graad van complexiteit van de wiskunde en de opdrachten toeneemt, moet nauwkeurigheid nagestreefd worden bij het gebruik van notaties en symbolen, bij het verwoorden van definities en eigenschappen (zowel schriftelijk als mondeling). Het leerproces in de klas moet alleszins voldoende kansen bevatten om terugkoppeling te geven over antwoorden en oplossingen van leerlingen zelf. Het is precies in het toetsen van hun onvolmaakte antwoord dat leerlingen de kans krijgen het te corrigeren.
Ordelijk en systematisch werken is een belangrijke leerhouding. Ze kan bijgebracht worden bijvoorbeeld bij het noteren, het maken van oefeningen en het aanpakken van problemen.

5 Pedagogisch-didactische wenken

Van de leerlingen wordt verwacht dat ze de wiskundetaal in haar verschillende aspecten vlotter kunnen hanteren. Met het oog op de doorstroming worden hogere eisen gesteld aan de nauwkeurigheid van formuleringen en oplossingen. De leerprocessen kunnen zo geconcipieerd worden dat deze eisen in de tweede graad geleidelijk toenemen. Zo kunnen leerlingen er stilaan mee vertrouwd worden en er het nut van inzien.

2 Zin voor kwaliteit van de wiskundige representatie

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

Leerlingen moeten hun gedachten en hun inzicht behoorlijk leren verwoorden. Het leerproces in de klas moet daartoe voldoende effectieve kansen bieden. Vanuit de vaak intuïtieve verwoording in de fase van de begripsvorming of het vermoeden van een eigenschap moeten de leerlingen geleidelijk aan een correcte wiskundetaal hanteren. Een wiskundige formulering is vaak helder, bondig en van alle ballast ontdaan. Leerlingen kunnen hierbij ervaren dat het gebruik van dergelijke formuleringen vaak ook het denkproces helder doet verlopen. Ligt de beknoptheid van symbolische formuleringen voor de hand, dan is een behoorlijke verwoording ervan vaak een probleem. Dit vraagt bijzondere aandacht.

Omdat een zoekproces soms met vraag en antwoord, met gissen en missen en dus niet rechtlijnig ontwikkeld wordt, zal eens het doel bereikt, de uiteindelijke redenering synthetiserend overlopen worden, om een helder inzicht te bekomen. Voor leerzwakkere leerlingen biedt dit vaak de gelegenheid terug aan te pikken. Ook bij het oplossen van problemen zal aandacht besteed worden aan het overhouden van een duidelijke synthese. Een heldere oplossing zal meestal ook overzichtelijk zijn en gemakkelijker te begrijpen. Zowel bij het leerproces van de wiskundige inhouden zelf, als bij het probleemoplossen zal men bij het synthetiserend overlopen aandacht besteden aan de doelmatigheid van een aanpak door de voor- en nadelen van bepaalde werkwijzen te bespreken.

5 Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen die vijf wekelijkse lestijden wiskunde hebben gekozen moeten geleidelijk vertrouwd gemaakt worden met het opzoeken van de verschillende mogelijkheden en situaties bij wiskundige beweringen. Deze eis naar volledigheid moet hen confronteren met de mogelijkheid van verschillende situaties en interpretaties bij eenzelfde bewering (bijv. met een meer systematisch aangepakte gevalsonderscheiding) en met de consequenties van beweringen eens een bepaald kader is aanvaard.

3 Kritische zin

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

Wiskundevorming moet leiden tot een bevragende, onderzoekende, controlerende, verifiërende houding. Dit wil zeggen dat berekeningen (zowel bij hoofdrekenen en schriftelijk rekenen, als bij het gebruik van een rekenmachine), beweringen, argumenten en redeneringen niet zomaar worden aanvaard en overgenomen. Dit slaat op vermoedens, oplossingstechnieken, redeneringen door leerlingen ter bespreking in de klasgroep gebracht. Dit slaat ook op de zelf gekozen modellen of representaties en op de eigen berekeningen, oplossingen en redeneringen. Bij de keuze van een model of bij een berekening, een redenering, een oplossing van een probleem zijn zowel het proces als het eindproduct van belang. Oog krijgen voor de oplossingsmethode kan leiden tot het leren waarderen van andere oplossingen. Zo kunnen leerlingen een werkwijze of methode leren waarderen omdat ze eenvoudiger is, minder tijd vraagt, wiskundig helder geformuleerd is, sneller veralgemening toelaat.

Omwille van de plaats die wiskunde inneemt in de vorming (basisvorming versus fundamentele vorming) is het evident dat hier de verwachtingen ten aanzien van leerlingen van leerweg 5 hoger moeten liggen dan voor leerlingen van leerweg 4. Naarmate men doordringt in de wiskundekennis moet deze bevragende, onderzoekende, controlerende, verifiërende houding groeien. Ze is onmisbaar bij de verdere ontwikkeling van wiskunde. Gelukkig doen er zich meer kansen, meer mogelijkheden voor om ze te ontwikkelen.

Belangrijk is dat deze onderzoekende houding herkenbaar is in het didactisch optreden van de leerkracht. Zowel de aanbreng van nieuwe leerinhouden als het toepassen van kennis en het oplossen van problemen bieden kansen tot stimulerende klassengesprekken. Leerlingen zullen maar oog krijgen voor het oplossings'proces' als hieraan tijdens het onderwijsleerproces voldoende aandacht besteed wordt en als ze gestimuleerd worden verschillende oplossingen of antwoorden te vergelijken.

Doorheen het ontwikkelen van een dergelijke kritische houding worden leerlingen geconfronteerd zowel met de mogelijkheden als met de beperkingen van het gebruik van wiskunde in de praktijk. Dat is een belangrijke houding voor wiskundegebruikers, die de meeste leerlingen in de toekomst zullen zijn. Een gezonde relativering naast de verwondering over de mogelijkheden van de wiskunde kan anderzijds bij leerlingen leiden tot een gemotiveerde, evenwichtige keuze voor wiskunde in hun vervolgopleiding.

4 Zelfvertrouwen en zelfstandigheid

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

Bij vaardigheden werd uitvoerig ingegaan op het aanpakken van problemen. Het is niet moeilijk in te zien dat het verwerven van probleemoplossende vaardigheden een uitgelezen kans biedt om zelfwerkzaamheid en doorzettingsvermogen te verwerven.

Een goede aanpak van deze leerprocessen zal leerlingen een solide basis geven waarop zij kunnen terugvallen. Succeservaring zal daarbij het zelfvertrouwen en de motivatie van leerlingen onderbouwen. Wiskundig minder begaafde leerlingen geraken snel ontmoedigd als ze geen succes kennen. Ze moeten aangezet worden eenzelfde stap meermaals te hernemen. In een gedifferentieerde aanpak kunnen oefeningen zo aangeboden worden dat voor deze leerlingen de stappen niet te groot zijn. Voor anderen kan geopteerd worden voor een meer open vorm van aanbieden, zodat ze ook leren zelf een probleem te ontdekken en te stellen.

Het is evident dat leerlingen ook fouten zullen maken, welke leerweg ze ook volgen. In een te uitsluitend cognitief gewaardeerd leerproces worden leerzwakke leerlingen daardoor wel eens benadeeld. Het is belangrijk in te zien dat fouten maken inherent deel uitmaakt van het (wiskundig) leerproces. Een goede leerkracht zal deze aanwenden als belangrijke leerkansen. Een aanmoedigende en respectvolle benadering zal leerlingen zeker stimuleren en uiteindelijk leiden tot betere resultaten.

5 Zelfregulatie

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

Bij het oplossen van problemen moeten de leerlingen over een goede kennisorganisatie beschikken en zoekstrategieen kunnen hanteren. Daarnaast moeten ze hun zoeken en werken gecontroleerd kunnen uitvoeren. Dit betekent dat ze zelf hun werk kunnen 'reguleren'. Dit houdt onder meer in dat ze hun resultaat toetsen (bijv. bij een rekenresultaat zowel op juistheid als op realiteitswaarde). Het is echter niet alleen aan het einde van het proces dat 'controle' nodig is. Die kan van bij de aanvang in het oplossingsproces opgenomen worden. Van bij de verkenning van het probleem (de oriëntatie), bij het opmaken van een uitvoeringsplan en bij de uitvoering zelf kan stapsgewijze gewerkt worden en kan elke stap gecontroleerd worden. Zo leidt het aanpakken van problemen tot een onderzoeksgerichte houding en tot methodisch, planmatig en gecontroleerd werken. Bij het opzetten van een redenering, bij het verklaren van een eigenschap kunnen dezelfde regulatietechnieken gevolgd worden.

Het is evident dat leerlingen deze houding maar geleidelijk aan zullen verwerven en dat dit gemakkelijker zal gaan, naarmate deze houding tijdens de leerprocessen in de klas aan bod komt in de werkwijze van de leerkracht.

Met het ontwikkelen van een dergelijke onderzoeksgerichte houding kan wiskunde bijdragen tot een meer algemene vorming. Ze kan overgedragen worden op het aanpakken van andere dan wiskundige problemen. Zo kan ze ondermeer leiden tot de leerhouding van methodisch, planmatig en gecontroleerd werken. Op deze wijze kan wiskunde ook bijdragen tot het verwerven van een kritische houding ten aanzien van het globale eigen denken en handelen.

4 Pedagogisch-didactische wenken

Voor leerlingen die in de derde graad willen doorstromen in wiskundig sterk geprofileerde studierichtingen wordt verwacht dat ze over een goed ontwikkelde onderzoeksgerichte houding beschikken. Deze leerlingen moet de mogelijkheid geboden worden zich hierin te bekwamen. Dat vraagt van deze leerlingen en de leerkracht een extra inspanning, vermits deze doorstroming niet van alle leerlingen kan verwacht worden.. Een gedifferentieerde aanpak is hier aangewezen, maar zal niet alles kunnen opvangen. Daarom mag verwacht worden van die leerlingen dat ze extra persoonlijk werk voor wiskunde niet schuwen.

5 Pedagogisch-didactische wenken

Van leerlingen die kiezen voor een sterker wiskundepakket in hun vorming mag verwacht worden dat ze creatiever zijn in de aanpak van problemen, dat ze daartoe meer zelf initiatief nemen en dat ze in een hogere mate zelfstandig hun oplossingsproces en hun leerproces kunnen organiseren, uitvoeren en bewaken. Het zijn kwaliteiten die een belangrijke troef kunnen betekenen in hun ontwikkeling, hun verder studie- en beroepskeuze. Het leerproces moet voldoende gelegenheden creëren om leerlingen deze mogelijkheden te laten ontdekken en ontwikkelen. Meer open gestelde opdrachten kunnen hier een bijdrage leveren. Een andere mogelijkheid wordt zeker geboden door hen zelf een beperkt onderdeel van de leerinhouden te laten verwerken aan de hand van goed gekozen leermateriaal. In de tweede graad moet hierop weliswaar nog een door de leerkracht begeleide controlefase volgen.

6 Zin voor samenwerking en overleg

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

Een onderwijsleerproces waaraan de leerlingen volwaardig en actief kunnen deelnemen, waarin ze hun bevindingen en hun oplossingen kunnen vergelijken en toetsen aan die van anderen, kan hen een positieve waardering bijbrengen voor samenwerking en overleg. Bij het bespreken van oplossingsmethoden, bij het kritisch onderzoeken van elkaars oplossing kan waardering voor elkaars mening aangeleerd worden en daardoor waardering voor de persoon van de andere zelf.
Bij het uitvoeren van een aantal opdrachten, bijv. het oplossen van bepaalde (ruimer gestelde) problemen, het opzoeken van allerlei historische gegevens, het opzoeken op Internet over wiskundigen, belangrijke wiskundige stellingen, wiskundige illustraties of toepassingssituaties kan de samenwerking gestimuleerd worden door de opdrachten in groep te laten afwerken. Zo kunnen leerlingen aangezet worden tot samenwerking en overleg.

Actieve leerprocessen zullen wiskundig-sterke leerlingen zeker niet benadelen. Daarom moet er over gewaakt worden dat ook de wiskundig-zwakke leerling voldoende waardering ervaart in het onderwijsleerproces.

7 Waardering voor wiskunde

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

Wiskundevorming staat niet los van die van de andere vakken. Wiskunde zelf is doorheen eeuwen ontwikkeld precies in samenhang met de opvattingen en de problemen van die tijd. Een aantal historische contexten bieden ook vandaag nog een zinvolle instap om bepaalde wiskundeproblemen en leeronderdelen aan te pakken. Daarom zal die historische context geïntegreerd worden in de aanpak.

Een meer realistische aanbreng en voldoende concrete toepassingen moeten er borg voor staan dat de ontwikkeling van wiskunde bij de leerlingen niet los staat van de wereld rondom hen. Anderzijds biedt wiskunde heel wat kansen om door te dringen tot de essentie van bepaalde problemen en situaties. Door een beter begrijpen kan de verwondering en de bewondering voor de context groeien. De elegante wijze waarop met behulp van wiskunde, problemen beschreven en opgelost worden kan op zich al verwondering wekken.

In het kader van de meetkunde (zowel in het vlak als in de ruimte) en functieleer kan aandacht besteed worden aan het gebruik van wiskunde in de kunst, in het bijzonder in de muziek, de schilderkunst, de beeldhouwkunst en de bouwkunst.
Voorbeelden:
Vlakvullingen met behulp van transformaties (Escher, friezen, muurbekleding zoals behangpapier, Vasarely), fractalen, de boom van Pythagoras, ruimtelijke kunst vanuit veelvlakken (bijv. Roelofs), het gebruik van de gulden verhouding (harmonie in schilderijen, bijv. Mondriaan) en in gebouwen (bijv. het Pantheon, LeCorbusier), verhoudingen in muziekwerken (bijv. toonhoogten), het gebruik van sierlijke boogverbindingen in constructies, het gebruik van bepaalde krommen (o.m. parabolen, als vereenvoudigd model van daarop lijkende kettinglijnen), het gebruik van perspectief en projectie in het algemeen, de onmogelijke figuren van Escher, de kubuswoningen in Rotterdam.

5 Pedagogisch-didactische wenken

Op het einde van de tweede graad moeten leerlingen een keuze maken voor hun vervolgopleiding. Dit keuzeproces mag niet verengd worden tot één moment. De bekwaamheid in en de ingesteldheid ten opzichte van wiskunde kan doorheen de tweede graad geleidelijk groeien. Leerlingen kunnen er zich van bewust worden dat een wiskundige beschrijving, dat een typisch wiskundige aanpak van problemen en situaties, waarbij helderheid, bondigheid, … belangrijk zijn, hun goed ligt of hun belangstelling opwekt. Dit zijn elementen die hun keuzerijpheid kunnen bevorderen. Het wiskundig leerproces zal voldoende motiverende elementen inhouden, die gericht zijn op deze creatieve ontwikkeling.
De mate waarin de hier beschreven bekwaamheid en ingesteldheid kunnen verworven worden, kan voor leerlingen een aanwijzing zijn om in de derde graad voor een wiskundig geprofileerde studierichting te kiezen.

5.2 Eerste leerjaar

5.2.1 MEETKUNDE

4	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **meetkunde** worden ca. 35 lestijden besteed

gelijkvormigheid van vlakke figuren, de stelling van Thales en samenhang	ca. 15 lestijden
de stelling van Pythagoras en de driehoeksmeting van een rechthoekige driehoek	ca. 13 lestijden
ruimtemeetkunde	ca. 7 lestijden

5	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **meetkunde** worden ca. 43 lestijden besteed

gelijkvormigheid van vlakke figuren en de stelling van Thales	ca. 16 lestijden
samenhang congruentie, gelijkvormigheid en transformaties	ca. 5 lestijden
de stelling van Pythagoras en de driehoeksmeting van een rechthoekige driehoek	ca. 14 lestijden
ruimtemeetkunde	ca. 8 lestijden

4 & 5	Pedagogisch-didactische wenken

Doorheen de studie van de meetkunde verwerven de leerlingen methoden om meetkundige problemen te herkennen en op te lossen, zowel in het vlak als in de ruimte. De nadruk moet liggen op zelf onderzoeken, analyseren, ordenen, verklaren, …, waarbij o.m. congruentie, gelijkvormigheid, toepassing van basisstellingen en coördinaten *middelen* zijn om meetkundige toepassingen en denkproblemen te behandelen.

Alleszins moeten de leerlingen voldoende *zelf exploratief te werk gaan* in het onderzoeken van eigenschappen en opzoeken van verklaringen en samenhang.
Door exploratie, met behulp van heuristische methoden, leren leerlingen een meetkundige probleemstelling in een situatie of opgave herkennen. (Bijv. dit probleem is te herleiden tot het aantonen dat twee rechten loodrecht op elkaar staan of deze vraag is te herleiden tot een berekening of constructie, met behulp van een evenredigheid van lengten van lijnstukken.) Aan de leerlingen wordt, naast duidelijk herkenbare toepassingssituaties, een aantal opdrachten aangeboden, waarbij het verband met de toe te passen leerinhoud niet meteen mee gegeven is. Ze moeten dan zelf in een breder verband achterhalen waartoe het gestelde probleem herleidbaar is, d.w.z. in hun kennisbestand op zoek gaan naar welk meetkundig ‘model’ de situatie kan gemathematiseerd worden. Dit mathematiseren zal ondersteund worden als de leerlingen kunnen terugvallen op een goed toegankelijk kennisbestand. Dit kan een inhoudelijke ordening hebben, maar ook een op toepassingen gerichte ordening (bijv. met welke eigenschappen kan evenwijdigheid aangetoond worden, met welke eigenschappen gelijkheid van hoeken, …).
Dan worden *argumenten* onderzocht *om de oplossing te verklaren*. Dat betekent dat eigenschappen worden aangewezen waaruit de nieuwe bewering kan worden afgeleid. Van de leerlingen mag verwacht worden dat ze vaststellingen, vermoedens en beweringen niet zomaar aanvaarden, maar dat ze (mee) op zoek gaan naar argumenten of een verklaring. In het onderdeel redeneervaardigheden bij 5.1 werden een aantal algemene suggesties in verband met bewijzen opgenomen.

De wijze waarop de meetkunde wordt opgebouwd, verschilt sterk naargelang de leerlingengroep en/of studierichting. Sommige leerlingen zullen voor hun vervolgstudies en/of beroep baat hebben bij een abstractere wijze van denken en aanpakken. Anderen zullen dat hebben bij goede analysevaardigheden, ordeningsvaardigheden, …. Ook het aantal beschikbare lestijden heeft een invloed. De keuzen voor de opbouw van de meetkunde zullen door de leerkracht of de vakgroep tegen deze achtergronden afgewogen worden.
Enerzijds kunnen vanuit de kennisschema’s die de leerlingen in de eerste graad hebben verworven nieuwe leerinhouden onderzocht en ingepast worden. Voordeel hiervan is dat leerlingen een samenhangende kennisorganisatie krijgen waarop ze achteraf gemakkelijker kunnen terugvallen.
Anderzijds kunnen bepaalde onderdelen op een intuïtievere wijze afzonderlijk aangepakt worden (bijv. stelling van Thales, gelijkvormigheid, stelling van Pythagoras), om vandaar af geleidelijk aan meer aandacht te besteden aan opbouw en samenhang. Voordeel hiervan is dat minder tijd moet geïnvesteerd worden in het verwerven en bewijzen van de basiselementen en dus dat er meer tijd vrijkomt om aan het onderzoek van meetkundige eigenschappen te

besteden.

De leerlingen bezitten vanuit de eerste graad een aantal methoden en voorstellingstechnieken om *ruimtelijke situaties* te beschrijven. De eigenschappen, nu nog vaak in het vlakke meetkunde geformuleerd, moeten waar zinvol in ruimtelijke situaties geïllustreerd worden en bij het oplossen van ruimtelijke problemen toegepast worden.

Een aantal meetkundeonderwerpen vertonen raakpunten met onderwerpen die in dit leerplan in andere onderdelen vermeld worden. Dit biedt kansen voor een meer *geïntegreerde aanpak*. Voorbeelden zijn o.a. het koppelen van de stelling van Pythagoras aan de voorstelling van irrationale getallen en het integreren van een synthetische en analytische beschrijving van eenzelfde begrip of eigenschap.

Voor de illustratie van begrippen en eigenschappen kan (door de leraar of door de leerlingen) gebruik gemaakt worden van een *grafische rekenmachine* of *software*, die de analyse en manipulatie van meetkundige figuren toelaat. Meestal wordt de mogelijkheid geboden een of ander element van een figuur te 'veranderen', terwijl de andere automatisch 'aangepast' worden. Leerlingen kunnen dan op een aantal analoge figuren vaststellen, wat het effect is van die verandering en welke elementen 'onveranderlijk' blijven (bijv. een snijpunt, een lengte, een hoek). De meetkundige eigenschappen hebben vaak precies daarop betrekking.

4 Pedagogisch-didactische wenken

Leerlingen moeten leren een *meetkundige probleemstelling* te herkennen. Soms is het zinvol dit leerproces te ondersteunen door bij belangrijke eigenschappen enkele gerichte herkenningsoefeningen in te lassen. (Bijvoorbeeld: willen leerlingen de stelling van Thales kunnen gebruiken, moeten ze die eerst 'herkennen' in een figuur of configuratie; daarvoor moet de figuur 'transparant' gemaakt worden, d.w.z. ontdaan van het overbodige.) Bij dergelijke oefeningen wordt een eigenschap specifiek en in gemakkelijk toegankelijke situaties geïllustreerd, waarbij het hoofddoel niet is, het verder gebruik of een nieuwe eigenschap, maar precies het herkennen van de configuratie, bijv. de voorwaarden die het gebruik van de eigenschap toelaten.

Leerlingen dienen bij het oplossen van meetkundeproblemen of bij het formuleren van nieuwe eigenschappen op zoek te gaan naar een *verklaring*. Dat betekent niet dat meteen en voor elke bewering een formeel bewijs moet gegeven worden. Het geven van een verklaring en deze behoorlijk wiskundig weergeven verloopt via een geleidelijk leerproces. Hoe onvolmaakt dit proces in eerste instantie verloopt, de leerlingen moeten zelf op zoek gaan naar argumenten, ze verwoorden en ze op een ondubbelzinnige wijze noteren. Aangebrachte argumenten kunnen in een leergesprek door de leerlingen en de leerkracht bevraagd worden. Zo kunnen leerlingen de waarde ervan leren inschatten in functie van een redenering of een oplossing. Hetzelfde geldt voor het verband tussen argumenten.
Voor wiskundig-zwakkere leerlingen is het zinvol voldoende aandacht te besteden (bijv. doorheen een sterker geleid leergesprek over de aangebrachte argumenten) aan het ordelijk opbouwen en uitschrijven van redeneringen. Dit kan hen een sterker houvast bieden. Dit mag evenwel geen aanleiding zijn om leerlingen uitsluitend te confronteren met te memoriseren bewijzen of redeneringen. De kracht van een bewijs en zeker de vormende waarde, steekt allicht in de wijze waarop het opgebouwd werd.

Voor de opbouw van de meetkunde is *de keuze vanuit een intuïtievere aanpak zeker verantwoord* als binnen het studierichtingsprofiel gekozen wordt voor een minder sterke theoretische vorming.

5 Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen kunnen doorheen hun wiskundevorming een aantal attitudes en vaardigheden verwerven, zoals het gebruik van een behoorlijke wiskundetaal en het inzien van het belang van bewijsvoeringen. De studie van meetkunde kan hierin een grote bijdrage leveren, bijv. door het nauwkeurig omschrijven van de gehanteerde begrippen en eigenschappen. Daartoe zal voldoende aandacht besteed worden aan het verwerven van de *wiskundetaal* in haar verschillende aspecten, bijvoorbeeld het adequaat aanwenden van zowel woordelijke als symbolische formuleringen, het inzien van voor- en nadelen van een intuïtieve en/of een meer verfijnde verwoording, het inzien van het belang van het gebruik van zowel een actieve taal bij voorbeelden en tegenvoorbeelden als van een meer verbaal-formele taal bij veralgemeningen.
De leerlingen moeten zelf een redenering kunnen *argumenteren*. Daarbij gaat het in de eerste plaats om de 'juistheid' van de argumentatie. Toch moeten ze leren aandacht besteden aan de wiskundige vorm waarin die gepresenteerd wordt . Daarmee wordt onder meer bedoeld: een zinvol en ordelijk verloop van een redenering opbouwen en dat behoorlijk weergeven (schriftelijk en mondeling). Ook de samenhang van de argumenten verdient aandacht (bijv. de logische samenhang, de samenhang met gekende leerinhouden, verschillende bewijsvormen zoals een be-

wijs uit het ongerijmde, het geven van een tegenvoorbeeld, nodige en voldoende voorwaarden).
Naast het zelf laten onderzoeken van eigenschappen en de verklaring ervan moet voldoende tijd besteed worden aan de opbouw en de samenhang van eigenschappen. Het beschikbare kennisbestand moet zo georganiseerd worden dat het adequaat kan ingeschakeld worden bij het onderzoeken van meetkundige situaties en het oplossen van problemen.
De leerlingen zullen geconfronteerd worden met voldoende oefeningen met *een meer open probleemstelling*. Daarbij wordt meer aandacht besteed aan het verwerven van probleemoplossende vaardigheden. Die hebben een belangrijke transferwaarde naar andere vakken en naar de verdere studie- en beroepsloopbaan van de leerlingen. Ze bieden leerlingen een goede kans om hun kennisbestand adequaat te leren ordenen en toegankelijk te maken.

1 Gelijkvormigheid van vlakke figuren en de stelling van Thales

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
M1	B	B	Gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken formuleren.	35
M2	–	U	Gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken bewijzen.	
M3	B	B	In het vlak de verschillende situaties onderzoeken die zich kunnen voordoen bij de projectie van een lijnstuk en een rechte op een rechte.	
M4	B	B	De stelling van Thales formuleren.	35
M5	–	U	De stelling van Thales bewijzen.	
M6	B	B	Gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Thales toepassen bij constructies en bij het berekenen van de lengte van lijnstukken en dat gebruik verantwoorden.	35 39 41
M7	B	B	Gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Thales gebruiken bij het verklaren van eigenschappen, o.m. de metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek.	

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

Ontegensprekelijk bestaat er een *verwantschap* tussen de doelstellingen in verband met gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Thales. Het aanbrengen en verwerken van de leerinhouden kan daarom best geïntegreerd verlopen. De volgorde waarin deze onderwerpen behandeld worden zal afhangen van de keuzen die gemaakt worden in verband met de eigenschappen die men als ‘basis’ wil aanvaarden of die men wil bewijzen. De oplossing van een aantal toepassingen kan vaak verklaard worden vanuit beide leerstof-onderdelen. Het inzicht wordt versterkt door aandacht te besteden aan verschillende motiveringen. Een mogelijke *behandelingsvolgorde* is: gelijkvormigheid, projectie, stelling van Thales en dan geïntegreerde toepassingen. Een andere mogelijkheid is projectie en de stelling van Thales voor de gelijkvormigheid van driehoeken te bespreken.

1 De gelijkvormigheid van figuren is al onderzocht in de eerste graad. Bij driehoeken kan dit, zoals bij de congruentie, omschreven worden aan de hand van de overeenkomstige elementen (gelijkheid van de overeenkomstige hoeken en evenredigheid van overeenkomstige zijden).
Zoals bij de congruentie wordt gezocht naar nodige en voldoende voorwaarden opdat twee driehoeken gelijkvormig zijn. Hierbij kan erop gewezen worden dat deze eigenschappen een economie in het denken betekenen, m.a.w. slechts een beperkt aantal goed gekozen voorwaarden moet gecontroleerd worden.
De gelijkvormigheidsfactor kan aanleiding zijn om het begrip schaal te hernemen. Zoals aangegeven wordt in de commentaar van M8 kan de gelijkvormigheid van figuren ingeleid worden vanuit de begrippen congruentie en schaal, die al in de eerste graad werden behandeld.
Bij de herhaling van gelijkvormigheid tussen figuren kan aandacht besteed worden aan figuren die niet in eenzelfde vlak liggen (bijv. bij kubus, balk, grondvlak en bovenvlak prisma, evenwijdige snijvlakken in prisma en piramide).

3 De leerlingen hebben in de eerste graad intuïtief gebruik gemaakt van de *projectie* als ze in het vlak de coördinaatgetallen van een punt hebben bepaald en als ze ruimtefiguren hebben voorgesteld met aanzichten.
Zo hebben ze ervaren dat bij dergelijke voorstellingen informatie verloren gaat. Vaak wordt de lengte van

een lijnstuk niet behouden bij projectie. De projectie van een lijnstuk is zelfs niet altijd een lijnstuk. Deze inzichten worden hier verdiept door expliciete formulering in het vlak.

4 De verhouding van de lengten van lijnstukken wordt bij projectie wel behouden als die lijnstukken evenwijdig zijn. Zo kunnen de leerlingen zelf, door te meten op voorbeelden, onderzoeken dat in figuren met een bepaalde configuratie (snijlijnen van een bundel evenwijdigen) bepaalde verhoudingen van lengten van lijnstukken gelijk zijn. Dat leidt onder meer tot *de stelling van Thales*.
De stelling van Thales wordt zowel in verband gebracht met de situatie in een driehoek (met een snijlijn evenwijdig aan een zijde) als met de situatie op twee rechten gesneden door een aantal evenwijdigen. In het laatste geval kan het verband gelegd worden met het beeld van een geijkte rechte door een projectie.

6 Met behulp van de gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Thales kunnen een aantal *situaties onderzocht worden*, zowel in het vlak als in de ruimte. Dit kan leiden tot een aantal *constructies en berekeningen* (bijv. een lijnstuk in n gelijke delen verdelen, constructies van de vierde evenredige, verhouding van de lengten van lijnstukken berekenen, het verband opzoeken tussen de omtrekken en de oppervlakten van gelijkvormige figuren, het berekenen van afstanden die niet meetbaar zijn omdat ze ontoegankelijk zijn). Gelijkvormigheid en de stelling van Thales kunnen ook in verband gebracht worden met het vergroten en verkleinen van afmetingen.
Bij deze doelstelling ligt de klemtoon op het toepassen van de eigenschappen in berekeningen en constructies. In een eerste fase kan het volstaan dat leerlingen die effectief kunnen uitvoeren. Het ontdekken van de gelijkvormigheid of een situatie waarin de stelling van Thales kan toegepast worden, zal daarbij vaak intuïtief verlopen, bijv. door een onderzoek op figuren.
Toch moeten de leerlingen de nodige kritische zin ontwikkelen. Ze mogen de gelijkvormigheid van twee figuren niet zomaar intuïtief blijven aanvaarden. Daarom moeten ze in een volgende fase in een aantal aanschouwelijke situaties hun besluit kunnen verklaren, bijv. door een gelijkvormigheidskenmerk. Dat betekent dat ze kunnen motiveren waarom een kenmerk of de stelling van Thales toegepast kan worden. Precies in dit herkennen en nauwkeuriger omschrijven van de voorwaarden in een gegeven situatie ligt voor de leerlingen vaak het probleem.

7 Uit de gelijkvormigheid van driehoeken of de stelling van Thales kan besloten worden dat overeenkomstige lijnstukken evenredige lengten hebben of dat overeenkomstige hoeken gelijk zijn. Het onderzoek bij de hiervoor genoemde constructies en berekeningen leidt soms tot ‘algemene’ situaties, die dan in eigenschappen kunnen vastgelegd worden.
Mogelijke eigenschappen die hier kunnen bewezen worden zijn:

- eigenschappen van de middenparallel van een driehoek,
- de metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek,
- de bissectrice-eigenschap (in een driehoek verdeelt de bissectrice van een hoek de overstaande zijde in stukken die evenredig zijn met de aanliggende zijden),
- de eigenschap in verband met de verhouding van de lijnstukken waarin het zwaartepunt van een driehoek een zwaartelijn verdeelt.

Er zal voldoende aandacht besteed worden aan de motivering waarom een kenmerk of de stelling van Thales van toepassing is en aan het transparant maken (bijv. in de figuur) van de noodzakelijke voorwaarden.

5 Pedagogisch-didactische wenken

2 *Uitbreiding*
Afhankelijk van de genomen opties voor de opbouw van de meetkunde kunnen de kenmerken voor gelijkvormigheid van driehoeken als basiseigenschap aanvaard worden, plausibel gemaakt worden aan de hand van concrete voorbeelden of bewezen worden met beschikbare eigenschappen (bijv. afhankelijk van de gekozen volgorde kunnen of de gelijkvormigheidskenmerken of de stelling van Thales‘ bewezen’ worden).

3 *Uitbreiding*
Wat de leerlingen in de eerste graad intuïtief in de ruimte hebben ingezien, kan hier verdiept worden. Mogelijkheden zijn: de projectie onderzoeken van een vlakke figuur of een eenvoudige ruimtefiguur op een vlak (cf. aanzichten); onderzoeken welke informatie verloren gaat bij het projecteren op een vlak; een figuur opbouwen als de projecties op een horizontaal en een verticaal vlak (cf. aanzichten) gegeven zijn.

5 *Uitbreiding*
Afhankelijk van de genomen opties voor de opbouw van de meetkunde kan de stelling van Thales als basiseigenschap aanvaard worden, of verklaard, of bewezen worden met behulp van beschikbare eigenschappen. Ook kan een van de situaties als uitgangspunt genomen worden om daaruit andere vormen af te leiden.

6 Een aantal toepassingen kunnen zowel met Thales als met gelijkvormigheid van driehoeken verklaard worden. Dan kan men bewust aandacht besteden aan de verschillende motiveringen, zodat de leerlingen de toepasbaarheid en de voor- en de nadelen van het gebruik van elk van de eigenschappen ervaren.
Constructieproblemen kunnen redeneerproblemen worden (met gebruik van heuristische methoden), bijvoorbeeld: construeren van een driehoek als de hoeken en de omtrek gegeven zijn, construeren van een vierkant waarvan de som van een zijde en de diagonaal gegeven is.
Mits goede voorstellingen aan te reiken kan de stelling van Thales in ruimtelijke situaties geïnterpreteerd worden (bijv. schaduw van evenwijdige stokken, het berekenen van de hoogte van een gebouw met behulp van de schaduwbeelden van gebouw en een stok, de oppervlakte berekenen van de doorsnede van een gegeven piramide met een vlak evenwijdig met het grondvlak en op een gegeven hoogte).

2 Samenhang congruentie, gelijkvormigheid en transformaties

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
M8	B	B	Gelijkvormigheid van figuren beschrijven met behulp van schaal en congruentie.	34
M9	U	B	De samenhang onderzoeken tussen transformaties en de coördinaten van een punt en zijn beeld.	
M10	–	U	De samenstelling van twee verschuivingen, van twee spiegelingen, van twee draaiingen onderzoeken.	
M11	–	B	De relaties tussen de overeenkomstige elementen van homothetische figuren onderzoeken, formuleren en verklaren.	
M12	–	U	De samenhang onderzoeken tussen de congruentie van driehoeken en transformaties die de driehoeken op elkaar afbeelden.	
M13	–	U	De samenhang onderzoeken tussen de gelijkvormigheid van driehoeken en transformaties die de driehoeken op elkaar afbeelden.	

4 Pedagogisch-didactische wenken

8 De leerlingen kennen vanuit de eerste graad de begrippen schaal, congruentie en gelijkvormigheid van figuren. Tussen deze begrippen wordt nu het *wiskundig verband* geëxpliciteerd. De verwerking van deze doelstelling wordt ingepast in de aanbreng van de gelijkvormigheidskenmerken. Bij gelijkvormige figuren valt op, dat slechts 'de grootte' van de figuur gewijzigd is. Onderzoek naar de wiskundige betekenis hiervan leidt tot het besluit dat de grootte van de hoeken behouden blijft, maar dat alle afmetingen vergroten of verkleinen met dezelfde factor. M.a.w. een figuur is gelijkvormig met een gegeven figuur, als ze er een schaalmodel van is of als ze een schaalmodel heeft dat congruent is met de gegeven figuur. Gevolg is dat congruente figuren ook gelijkvormig zijn.

9 *Uitbreiding*
Als de relatie bekend is tussen de coördinaten van punten en hun beeld door een transformatie, dan kan het tekenen van de beeldpunten snel verlopen. Dit lukt natuurlijk minder gemakkelijk, als bijv. de spiegelas niet samenvalt met een as of een bissectrice van het assenstelsel. Het is evenwel niet de bedoeling alle mogelijke liggingen van de spiegelas te onderzoeken, maar wel om een handig hulpmiddel te hebben bij het tekenen van de beeldfiguren.

5 Pedagogisch-didactische wenken

Dit deel kan aan bod komen als een vorm van *synthese* van de verschillende elementen waarmee meetkundige eigenschappen onderbouwd werden. Zowel transformaties, coördinaten, congruentie als gelijkvormigheid van driehoeken kunnen met elkaar verbonden worden. Daarbij gaat men uit van het gekend zijn van de verschillende onderdelen. Nu worden een aantal wederzijdse verbanden gelegd (bijv. homothetische figuren zijn bijzondere gevallen van gelijkvormige figuren, gelijkvormigheid kan bepaald worden door middel van homothetische figuren en congruentie, …).

Het verdient sterke aanbeveling ingewikkelde en tijdrovende constructies te vermijden. Meetkundige tekenprogramma's op computer of grafische rekenmachine bieden een goed alternatief. De leerlingen kunnen op die wijze snel met een aantal visuele voorstellingen van analoge situaties geconfronteerd worden, waardoor meer tijd vrij komt voor de besluitvorming.

8 De leerlingen kennen de begrippen schaal, congruentie en gelijkvormigheid van figuren. Tussen die begrippen wordt het wiskundig verband geëxpliciteerd. Bij gelijkvormige figuren valt op, dat slechts 'de grootte' van de figuur gewijzigd is (cf. schaal). Onderzoek naar de wiskundige betekenis hiervan leidt tot het besluit dat de grootte van de hoeken behouden blijft, maar dat alle afmetingen vergroten of verkleinen met dezelfde factor. M.a.w. een figuur is gelijkvormig met een gegeven figuur als ze er een schaalmodel van is, of als ze een schaalmodel heeft dat congruent is met de gegeven figuur. Gevolg is dat congruente figuren ook gelijkvormig zijn.
Deze doelstelling kan aan bod komen vanuit de herhaling van gelijkvormigheid met het oog op een betere wiskundige vertolking van het intuïtieve begrip uit de eerste graad. Ze kan ook de aanleiding zijn om het verband meer diepgaand te analyseren en een synthese op te bouwen tussen gelijkvormigheid, congruentie en transformaties (zie M13).

9 Als de relatie tussen de coördinaten van punten en hun beeld door een transformatie bekend is, dan kan het tekenen van de beeldpunten snel verlopen. Dit lukt minder gemakkelijk als bijv. de spiegelas niet samenvalt met een as of een bissectrice van het assenstelsel. Het is evenwel niet de bedoeling alle mogelijke liggingen van de spiegelas te onderzoeken, maar wel om een handig hulpmiddel te hebben bij het tekenen van de beeldfiguren.
Samenhang onderzoeken in een assenstelsel kan leiden tot oefeningen zoals: het verband zoeken tussen de coördinaat van een punt en die van zijn beeldpunt als een transformatie gegeven is (waarbij als *uitbreiding* andere transformaties dan spiegeling, … aan bod kunnen komen); de relatie onderzoeken tussen een figuur en de figuur die men bekomt door de coördinaatgetallen (een van beide of beide) van de hoekpunten met eenzelfde getal te vermenigvuldigen; de transformatie bepalen die een gegeven rechthoek afbeeldt op een vierkant (met als zijde de lengte of de breedte).

10 *Uitbreiding*
Het is niet de bedoeling alle mogelijke samenstellingen van isometrieën te behandelen. Via enkele eenvoudige constructieopgaven moeten de leerlingen de aard van de samengestelde transformatie van spiegelingen, verschuivingen en draaiingen kunnen vaststellen. Ingewikkeld tekenwerk wordt best vermeden. *Tekenprogramma's* kunnen voor visuele ondersteuning zorgen. Na een aantal voorbeeldsituaties kan ingegaan worden op de mogelijke besluiten, bijv. in verband met de verschillende onderlinge liggingen van spiegelassen.

11 De leerlingen kennen gelijkvormigheid van figuren. Hier wordt aandacht besteed aan het bijzonder geval van *homothetische figuren* en de relaties tussen de overeenkomstige hoeken en zijden.
Hierbij kunnen problemen aan bod komen die opgelost worden met behulp van homothetische figuren, bijvoorbeeld een vierkant tekenen in een gegeven driehoek waarbij een zijde van het vierkant ligt op een zijde van de driehoek en de andere hoekpunten op de twee andere zijden van de driehoek.
Het verband met vergroten en verkleinen van figuren en met het begrip schaal wordt onderzocht.

12 *Uitbreiding*
Congruente figuren werden door de leerlingen in het basisonderwijs al bestudeerd als 'figuren gelijk van maat en vorm'. Dergelijke figuren kunnen door een intuïtieve verplaatsing (soms effectief uitgevoerd door middel van knippen en plakken) elkaar volledig bedekken. In de eerste graad kreeg het begrip al een eerste verfijning van de omschrijving. Verwiskundiging van dat intuïtieve begrip verplaatsen leidt tot het verband met isometrieën.

13 *Uitbreiding*
Gelijkvormigheid werd in M8 verbonden met schaal en congruentie. Hier gaat het om een verder verwiskundigen van het begrip vergroten of verkleinen (dat kan verbonden worden met homothetische figuren) en het na elkaar uitvoeren van twee wiskundige 'operaties'.

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
M14	B	B	De stelling van Pythagoras formuleren.	36
M15	B	B	De stelling van Pythagoras bewijzen.	
M16	B	B	De stelling van Pythagoras gebruiken in – berekeningen, o.m. de afstand berekenen tussen twee punten in het vlak gegeven met hun coördinaten; – constructies; – bewijzen.	36 39 40 41

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

14 De stelling van Pythagoras kan *onderzocht* worden *op verschillende situaties*. Daarbij is het zinvol gebruik te maken van de interpretatie met oppervlakten van vierkanten (bijv. construeer een vierkant waarvan de oppervlakte de som is van twee gegeven vierkanten). Het gebruik van een simulatieprogramma voor meetkunde is hier aangewezen. Dit kan overtuigend werken. Een voorbeeld van dezelfde regel toegepast op niet-rechthoekige driehoeken levert een tegenvoorbeeld en verantwoordt in de formulering de wending 'in een rechthoekige driehoek'. Ook de omgekeerde eigenschap kan onderzocht worden: als de lengten van de zijden van een driehoek aan een bepaalde voorwaarde voldoen, is dan een van de hoeken een rechte hoek?
De stelling biedt een uitstekende gelegenheid om de leerlingen te wijzen op het bestaan van irrationale getallen. Dit kan een aanwijzing zijn om de exploraties rond de stelling van Pythagoras te koppelen aan de behandeling van irrationale getallen in de getallenleer.

15 Er zijn vele mogelijkheden om de stelling van Pythagoras te bewijzen. Naast de werkwijze met behulp van gelijkvormige driehoeken zijn er die gebruik maken van de oppervlakten van figuren (bijv. de vele puzzels over het herschikken van de oppervlakten). Leerlingen kunnen hier ervaren dat er meerdere mogelijkheden zijn om eenzelfde besluit te verklaren. Zo worden ze geconfronteerd met de veelzijdigheid van wiskunde.
Meetkundige software biedt hier de mogelijkheid zowel de verklaring met gelijkvormigheid (o.m. de metrische betrekkingen), als de oppervlakteberekening aanschouwelijk te expliciteren.

16 De stelling van Pythagoras kan *toegepast* worden in allerlei meetkundesituaties, zo bijvoorbeeld de diagonaal van een vierkant berekenen, de hoogte van een gelijkzijdige driehoek berekenen, ….
De te berekenen zijde hoeft niet enkel de schuine zijde te zijn, bijvoorbeeld:
– bereken de zijde van een vierkant als de lengte van een diagonaal gegeven is;
– bereken de lengte van een rechthoek als de lengte van een diagonaal en de breedte gegeven zijn;
– bereken in een concrete figuur waarvan een aantal afmetingen gegeven zijn, enkele andere afmetingen;
– controleer of een figuur met bepaalde afmetingen concreet gegeven wel de vereiste kenmerken heeft;
– onderzoek of een driehoek waarvan een aantal afmetingen gegeven zijn gelijkbenig is.

De stelling kan gebruikt worden om de formule voor de *afstand tussen twee punten* in een cartesiaans assenstelsel af te leiden en ze toe te passen om dergelijke afstanden te berekenen.
Met behulp van passer en liniaal kunnen een aantal lijnstukken geconstrueerd worden waarvan de lengte een irrationale vierkantswortel is. En zo kan verklaard worden dat deze irrationale getallen effectief kunnen voorgesteld worden.
De formule voor afstand in een vlak kan toegepast worden om afstanden tussen de hoekpunten van een balk te berekenen. Het is niet de bedoeling de formule voor de afstand tussen twee punten in de ruimte te gebruiken. Het gebruik van deze algemene formule kan vermeden worden door in verschillende stappen te werken. Daarbij wordt telkens gebruik gemaakt van de stelling van Pythagoras en de afstandsformule in een *vlakke* situatie. Het is daarbij nodig aandacht te besteden aan het zichtbaar, transparant maken van de 'vlakke situatie'. Het inzicht in de probleemstelling zal versterkt worden als de leerlingen zich een adequate voorstelling kunnen maken van de ruimtelijke situatie en het gebruikte 'vlak'. Op zich versterkt dit het ruimtelijk inzicht en het ruimtelijk voorstellingsvermogen.
Voorbeelden van andere ruimtelijke problemen zijn:
– bereken de hoogte van een piramide;
– bereken de lengte van een ribbe van een vierzijdige rechte piramide als de zijde van het grondvlak en

de hoogte gegeven zijn;

- bereken de omtrek van de gelijkzijdige driehoek gevormd door drie diagonalen in verschillende zijvlakken van een kubus;
- bereken de lengte van lijnstukken op gegeven ruimtefiguren als bepaalde afmetingen gegeven zijn, bijv. een lijnstuk begrensd door de middens van twee ribben van een kubus.

4	Pedagogisch-didactische wenken

16 *Meetkundige vraagstukken* zijn voor de leerlingen niet eenvoudig. Vaak hebben ze hiertegen een niet te veronachtzamen tegenstand opgebouwd. Daarom zal ervoor gezorgd worden dat de besproken problemen gesteld worden in voor leerlingen *haalbare* situaties en in een taal die hen aanspreekt. Dat betekent onder meer dat de leraar oog heeft voor een gradatie in moeilijkheidsgraad, bijvoorbeeld van kale, in het oog springende toepassingen, over ingeklede oefeningen, naar wat meer verholen toepassingen. En dat telkens aandacht besteed wordt aan het ‘stellen’ van het probleem, vanuit de situatie, de opgave, …. En dat in een eerste fase een tekening beschikbaar is, dat men een dergelijke tekening leert analyseren en uiteindelijk ook opstellen. En dat betekent dat de leraar de leerlingen wijst op heuristische methoden als die gebruikt worden of als die aangewezen zijn.

5	Pedagogisch-didactische wenken

14 Bij de interpretatie van de stelling met oppervlakten kan de leraar de leerlingen laten vaststellen, dat het verband tussen de oppervlakten van de figuren behouden blijft, als op de zijden van de rechthoekige driehoek, in de plaats van vierkanten, andere gelijkvormige figuren geconstrueerd worden.
De stelling van Pythagoras, het verband met irrationale getallen en de aanverwante problematiek kan een aanleiding zijn om even uit te weiden over een stukje geschiedenis van de wiskunde. Naar aanleiding van constructies van configuraties van Pythagoras kan een fractaal, m.n. de boom van Pythagoras, ter sprake gebracht worden.

15 Het is zinvol dat de leerlingen met meer dan één bewijs van de stelling van Pythagoras geconfronteerd worden.

16 Er zal niet louter tijd besteed worden aan technische berekeningen van lengten. Er moet voldoende tijd besteed worden aan *constructies en bewijzen*.
In de getallenleer is het construeren van irrationale vierkantswortels als toepassing voorzien. Dergelijk probleem kan als ‘kale’ opdracht aangeboden worden, maar krijgt een duidelijke meerwaarde in een probleem als ‘een driehoek verdelen in twee (respectievelijk drie) gebieden met gelijke oppervlakte door een (respectievelijk twee) evenwijdigen te construeren aan een van de zijden’.

4 Driehoeksmeting in een rechthoekige driehoek

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
M17	B	B	De sinus, cosinus en tangens van een scherpe hoek in een rechthoekige driehoek definiëren.	38
M18	B	B	De goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens gebruiken voor het oplossen van vraagstukken in rechthoekige driehoeken.	39 41

4 & 5	Pedagogisch-didactische wenken

17 De begrippen *sinus, cosinus* en *tangens* van een scherpe hoek volgen uit de vaststelling dat alle rechthoekige driehoeken met eenzelfde scherpe hoek α gelijkvormig zijn. Dit zijn de goniometrische getallen ‘van de hoek α’ omdat de kennis van één van deze getallen toelaat de *scherpe* hoek ondubbelzinnig te bepalen. Als symbool voor de tangens van een hoek wordt gekozen voor *tan*, dat internationaal wordt aanbevolen en dat op de meeste rekenmachines gebruikt wordt.

Voor de praktische toepassingen wordt het gebruik van de *rekenmachine* aangeleerd, voor het opzoeken van enerzijds de sinus, de cosinus en de tangens van een scherpe hoek en anderzijds van het maatgetal van een scherpe hoek als de sinus, de cosinus of de tangens van die hoek gegeven is.

De fundamentele formules $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ en $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ kunnen afgeleid worden met behulp van de stelling van Pythagoras en de gelijkvormigheid van driehoeken.

18 De goniometrische verhoudingen worden gebruikt bij het oplossen van praktische, concrete problemen. De moeilijkheid voor de leerlingen is vaak het herkennen van de situatie op een figuur. Daarom wordt in een eerste benadering best gewerkt met gegeven, heldere figuren. Toch blijft het zelf maken van een dergelijke figuur behoren tot de analysevaardigheden die doorheen het oplossingsproces van deze vraagstukken moeten verworven worden.

5	Pedagogisch-didactische wenken

18 *Uitbreiding*
Met behulp van het begrip middelpuntshoek en de goniometrische verhoudingen kan hier enige aandacht besteed worden aan problemen in verband met *regelmatige ingeschreven veelhoeken* (bijv. onder de vorm van oefeningen). Zo kan de zijde uitgedrukt worden in functie van de straal en kan de omtrek en de oppervlakte van een regelmatige ingeschreven veelhoek berekend worden. Omdat ingeschreven veelhoeken de cirkel steeds beter benaderen als het aantal zijden toeneemt (en dus de bijbehorende middelpuntshoek kleiner wordt) kan de omtrek of de oppervlakte van de cirkel hiermee benaderend berekend worden. Deze berekening leidt tot een benadering voor het reëel getal π.
Een uitgebreidere studie van regelmatige ingeschreven veelhoeken wordt evenwel voorzien in het tweede leerjaar van de tweede graad bij het onderdeel cirkel, als de relaties tussen apothema en zijde, … voorhanden zijn. Men kan er dus voor kiezen het geheel daar te bestuderen.

6 Toepassingen in de ruimte

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
M19	B	B	Eenvoudige problemen oplossen in verband met ruimtelijke situaties met behulp van eigenschappen van vlakke figuren.	41
M20	B	B	De inhoud van sommige ruimtefiguren benaderend berekenen, door ze op te splitsen in of aan te vullen tot gekende ruimtefiguren.	43
M21	B	B	Het effect op de oppervlakte en de inhoud van een ruimtefiguur berekenen bij een schaalverandering.	44

4 & 5	Pedagogisch-didactische wenken

19 De begrippen en eigenschappen die in de vlakke meetkunde geformuleerd worden, moeten waar mogelijk, in *ruimtelijke situaties* toegepast worden. Zo krijgt de vlakke meetkunde een meer realistisch karakter en wordt het ruimtelijk inzicht verder ontwikkeld. Bij deze doelstelling gaat het hoofdzakelijk om berekeningen in praktische en concrete situaties en minder om het opstellen van nieuwe eigenschappen. Let wel, de goniometrische formules voor hoeken en zijden in willekeurige driehoeken komen pas aan bod in het tweede leerjaar van de tweede graad.
Er kan voor geopteerd worden een afzonderlijk hoofdstuk ruimtemeetkunde in te lassen om deze ruimtelijke interpretaties te realiseren. Daardoor krijgen ze misschien een meer nadrukkelijke vorm. Anderzijds kan er voor geopteerd worden de verschillende eigenschappen meteen ruimtelijk te interpreteren, waardoor dit misschien een meer natuurlijke werkwijze wordt.
Bij het oplossingsproces maken de leerlingen gebruik van tekeningen om de problemen te analyseren en gekende eigenschappen om de oplossing te argumenteren. Het lezen van en het zichtbaar maken van informatie op een tekening is voor de leerlingen een belangrijke stap in de probleemanalyse. Het is een cruci-

ale stap naar het zelf maken van tekeningen bij een gesteld probleem. Zo zal bijv. aandacht besteed worden aan het bepalen van het vlak waarin het probleem of een deelprobleem gesteld en opgelost kan worden. Met het argumenteren van hun oplossing hebben de leerlingen vaak moeilijkheden. Het leren argumenteren van een oplossing moet daarom volgens een weg van geleidelijkheid opgebouwd worden.
Bij het oplossen van problemen worden de leerlingen op een natuurlijke wijze geconfronteerd met de voorstelling van ruimtelijke situaties en met de ervaring dat hierbij informatie van een tekening (bijv. over lengte van lijnstukken, grootte van hoeken, grootte en vorm figuren) niet 'betrouwbaar' is. Al in de eerste graad werd dit inzicht nagestreefd. Het kan nu onderhouden worden. Wel kan nu gestreefd worden naar een meer mentale observatie.

20 De leerlingen kennen uit de eerste graad de formules voor oppervlakte en inhoud van de voornaamste standaard ruimtefiguren, zoals kubus, balk, prisma, piramide, cilinder, bol.
Een aantal ruimtefiguren zijn opgebouwd uit deze standaardfiguren (bijv. toren, puntdak, gebouw). Door opsplitsing van de gegeven ruimtefiguren in gekende ruimtefiguren kunnen nu als toepassing een aantal oppervlakten en inhouden berekend worden.
Anderzijds kunnen bepaalde, meer willekeurige ruimtefiguren ingekapseld worden in gekende ruimtefiguren (bijv. een verpakkingsdoos). Alleszins voor de inhoud van die ruimtefiguur kan dan een 'benadering' gegeven worden. Deze werkwijze geeft een middel om de inhouden van 'willekeurige' ruimtefiguren te schatten.

21 Het begrip schaal behoort tot de leerinhouden van de eerste graad. Daar werden meestal al een aantal situaties, in hoofdzaak vlakke situaties tussen vlakke figuren, onderzocht op het effect van schaalverandering. Dit wordt nu vanuit concreet onderzoek op voorwerpen zoals kubus, balk, … uitgebreid tot ruimtefiguren. Belangrijk is dat leerlingen inzien dat bij een schaalverandering in de drie dimensies vergroting of verkleining optreedt, en dat de schaalfactor telkens dezelfde is. Het verband met het begrip gelijkvormigheidsfactor zal gelegd worden.
Uitbreiding
Men kan een aantal oefeningen aanbieden waarin slechts in een beperkt aantal dimensies vergroting of verkleining optreedt (bijv. bij uitrekking). Belangrijk is hiermee het begrip schaalverandering niet te verbinden.

7 Gereedschapskist meetkunde

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen moeten vanuit het eerste leerjaar van de tweede graad beschikken over een verzameling meetkundige eigenschappen, die vlot kunnen toegepast worden bij het onderzoeken van meetkundige situaties, het verklaren van eigenschappen, het oplossen van meetkundige problemen. Een vlotte en soepele verwoording ervan en een duidelijke visuele ondersteuning kunnen de toepasbaarheid vergroten. Ze moeten een duidelijk en hanteerbaar kader vormen, waarop de leerling kan terugvallen. Dit betekent *niet* dat de leerlingen dergelijke overzichten moeten *memoriseren!* Het overzicht moet wel *beschikbaar* zijn. Dat kan bijvoorbeeld in de vorm van een *'vademecum'*. Zo'n lijst kan geleidelijk (gespreid over de verschillende leerjaren) en samen met de leerlingen worden opgebouwd (bijv. nadat een eigenschap ontdekt en onderzocht is, kan ze al of niet toegevoegd worden aan de lijst; of de leerlingen kunnen het aanvullen van zo'n lijst als een synthesetaak krijgen na een hoofdstuk). Als voorbeeld worden in het volgend overzicht een aantal eigenschappen opgesomd die kunnen worden opgenomen in zo'n vademecum. (Een aantal van deze eigenschappen zijn overigens al verworven in de eerste graad en moeten hier niet noodzakelijk opnieuw als eigenschap 'bestudeerd' worden.)

Eigenschappen over de lengten van de zijden en de grootte van de hoeken van driehoeken en vierhoeken.
Eigenschappen over de diagonalen van vierhoeken.

Eigenschappen over de hoeken bij een snijlijn van evenwijdige rechten.
De eigenschappen van de middelloodlijn van een lijnstuk en van de bissectrice van een hoek en hun omgekeerde.
In een driehoek gaan de zwaartelijnen, de middelloodlijnen, de hoogtelijnen, de bissectrices telkens door één punt.
Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijn in twee stukken die zich verhouden als twee tot één.
De driehoeksongelijkheid tussen de zijden van een driehoek.

In elke driehoek is elke zijde langer dan het verschil van de twee andere, maar korter dan hun som.

Eigenschappen van de merkwaardige lijnen in een driehoek, in een gelijkbenige driehoek en in een gelijkzijdige driehoek.
Eigenschappen van (invariantie bij) een verschuiving, een puntspiegeling, een spiegeling , een draaiing.

De congruentiekenmerken van driehoeken.
De gelijkvormigheidskenmerken voor driehoeken.
De stelling van Thales en haar omgekeerde.
De stelling van Pythagoras en haar omgekeerde.
De eigenschap van de middenparallel van een driehoek.
De metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek.

In een rechthoekige driehoek is de hoogtelijn middelevenredig tussen de stukken waarin ze de schuine zijde verdeelt.

In een rechthoekige driehoek is elke rechthoekszijde middelevenredig tussen de schuine zijde en haar loodrechte projectie op de schuine zijde.

Belangrijk is dat deze lijst van eigenschappen geen steriel overzicht is van een aantal geziene en/of bewezen eigenschappen. De lijst moet vooral gemakkelijk hanteerbaar zijn in nieuwe situaties. Daarom is een ordening op basis van *bruikbaarheid* een zinvolle ordening.

Voorbeelden

Met welke hulpmiddelen kan verklaard, bewezen worden dat

- twee rechten evenwijdig zijn,
- twee hoeken even groot zijn,
- de lengten van twee lijnstukken gelijk zijn,
- een punt het midden is van een lijnstuk,
- een vierhoek een parallellogram is,
- drie punten collineair zijn,

Een dergelijke opvatting en ordening van de gekende eigenschappen zal de leerlingen meer hulp bieden bij het zelfstandig exploreren van meetkunde.

5 Pedagogisch-didactische wenken

Van leerlingen, die wiskunde volgen op basis van vijf wekelijkse lestijden, kan verwacht worden dat ze een aantal van deze eigenschappen hebben uitgediept. Dat betekent bijvoorbeeld dat ze elementen uit het onderzoeksproces kunnen bespreken (al of niet geleid, al of niet met behulp van ICT-hulpmiddelen), dat ze beseffen dat een bepaalde eigenschap als basiseigenschap werd aanvaard of dat ze werd verklaard door het verband te leggen met andere eigenschappen.

5.2.2 GETALLENLEER

4	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **getallenleer** worden ca. 26 lestijden besteed

uitbreiding van het getalbegrip	ca. 6 lestijden
toepassingen op bewerkingen met reële getallen	ca. 20 lestijden

5	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **getallenleer** worden ca. 23 lestijden besteed

uitbreiding van het getalbegrip	ca. 5 lestijden
toepassingen op bewerkingen met reële getallen	ca. 18 lestijden

4 & 5	Pedagogisch-didactische wenken

In de getallenleer wordt het getalbegrip verder uitgebreid tot de verzameling van de reële getallen. Daarvoor moeten leerlingen het begrip irrationaal getal verwerven. Zowel de wortelvormen met inbegrip van een meetkundige voorstelling als de decimale vorm komen aan bod. De aanbreng van de irrationale getallen kan een aanleiding zijn om elementen uit de geschiedenis van de wiskunde in te brengen, bijv. de problemen met de irrationaliteit voor de Pythagoreïsche school. Wat betreft de ordening en de rekenregels, blijven de gekende eigenschappen geldig. Ook het oplossen van vergelijkingen verandert in wezen niet. De uitbreiding van $\mathbb{Q}$ naar $\mathbb{R}$ betreft dus vooral de kennismaking met de irrationale getallen.
Het is evenwel niet realistisch te verwachten dat de leerlingen van het eerste jaar van de tweede graad de begrippen reëel getal en irrationaal getal al kunnen doorgronden in al hun subtiliteit.

Het verwerken van de getallenleer, in het bijzonder de toepassingen op de bewerkingen, vergelijkingen, … worden best gespreid over het ganse schooljaar. Dit moet borg staan voor het onderhouden van de aangeleerde vaardigheden. Geregelde herhalingsoefeningen onder de vorm van (deel)taken kunnen hierbij een aangewezen hulpmiddel zijn.

1 Uitbreiding getalbegrip

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
G22	B	B	Een reëel getal zien als een eindig of een oneindig doorlopend decimaal getal.	15
G23	U	B	Bewijzen dat 2 geen kwadraat is van een rationaal getal.	
G24	B	B	Reële getallen ordenen en voorstellen op een getallenas.	15
G25	–	U	Verklaren dat met elk punt op een getallenas juist één reëel getal overeenkomt en omgekeerd met elk reëel getal juist één punt.	
G26	B	B	De vierkantswortel van een positief reëel getal en de derdemachtswortel van een reëel getal definiëren en benaderen met behulp van een rekenmachine.	16

4 & 5	Pedagogisch-didactische wenken

22 Het bestaan van irrationale getallen is niet vanzelfsprekend. Zoals de andere getallen zouden de reële getallen een brede betekenis moeten krijgen. Voor reële getallen is dit niet eenvoudig.
Eerst kan de *periodiciteit* in de decimale vorm van rationale getallen geconstateerd worden. Daarna kan in enkele concrete en eenvoudige gevallen van rationale getallen met repeterende decimale vorm de breukvorm berekend worden. De bedoeling is inzicht te verwerven in de samenhang tussen de decimale ontwik-

keling (eindig of repeterend) en het rationaal zijn van getallen. (Het is zeker niet de bedoeling een algoritme voor de omzetting van de decimale vorm naar de breukvorm manueel te kunnen uitvoeren!) Het bestaan van irrationale getallen kan dan geïllustreerd worden met enkele getallen met een niet-repeterende decimale voorstelling. Ook het getal π is een voorbeeld.
Een andere problematiek is deze van *irrationale lengten*. Getallen die als vierkantswortel geschreven kunnen worden, krijgen een meetkundige voorstelling met behulp van de stelling van Pythagoras. Dit is een aanwijzing om deze meetkundige elementen en irrationale getallen geïntegreerd te behandelen.
Binnen leerweg 4 zal van niet-rationale vierkantswortels (van positieve getallen) aangenomen worden dat ze irrationaal zijn. Zo kan intuïtief aanvaard worden dat er geen rationaal getal bestaat met kwadraat 2. De verzameling van de rationale getallen volstaat dus niet om een dergelijk elementair probleem te beschrijven. Dit is een van de weinige mogelijkheden om leerlingen een haalbare motivatie te bieden voor het bestaan en de noodzaak van irrationale getallen.
Het inzicht in irrationale getallen, enerzijds de decimale ontwikkeling en anderzijds het begrip vierkantswortel en de meetkundige voorstelling, volstaan als inzicht in ‘reële’ getallen.
Op een rekenmachine worden reële getallen zowel wat de interpretatie betreft (bijv. bij plaatsbepaling) als bij bewerkingen (in realistische problemen) benaderd door een eindig decimaal getal.

24 De *ordening* van de reële getallen volgt op natuurlijke wijze uit hun decimale schrijfwijze en komt uiteraard overeen met de ordening van punten op de getallenas.
Door intuïtief de plaats van enkele concrete irrationale getallen op de *getallenas* te bepalen en door omgekeerd van een aantal concrete punten de abscis benaderend te bepalen, groeit het besef dat met elk punt van de getallenas juist één reëel getal overeenstemt en omgekeerd dat met elk reëel getal juist één punt van de getallenas overeenstemt. De irrationaliteit van $\sqrt{2}$ gekoppeld aan de stelling van Pythagoras illustreert dat er wel degelijk irrationale ‘lengten’ of abscissen op de getallenas voorkomen. Het punt met abscis $\sqrt{2}$ kan men precies construeren.

26 Voor de invoering van het begrip *vierkantswortel* kan uitgegaan worden van het omkeren van de machtsverheffing.
Bij vierkantswortel moet aandacht besteed worden aan de vaststelling dat er voor elk strikt positief getal a twee getallen (b en -b) bestaan waarvan het kwadraat a is. Ofwel b ofwel -b is positief. Er wordt afgesproken de positieve vierkantswortel uit a te noteren met $\sqrt{a}$. Verder kan opgemerkt worden dat $\sqrt{a^2} = |a|$. De leerlingen moeten inzien waarom binnen de verzameling van de reële getallen de vierkantswortel uit een negatief reëel getal niet wordt gedefinieerd. Ze moeten hierbij een correct taalgebruik hanteren, niettegenstaande ze de volle draagwijdte ervan (m.n. er is een verzameling waarin voor negatieve getallen toch vierkantswortels kunnen gedefinieerd worden) niet vatten.
Voor enkele omrekeningen van formules (bijv. volume) is het zinvol de derdemachtswortel in te voeren. Het gebruik ervan wordt wel beperkt tot functionele toepassingen.
Bij het benaderen van een vierkantswortel of een derdemachtswortel met een *rekenmachine* moeten de leerlingen leren hun resultaat te controleren bijv. met een schatting van de grootte-orde. Het getal op het scherm is meestal een rationale benadering. Dit is een gelegenheid om het gebruik van het aantal decimalen te bespreken. In het algemeen moeten leerlingen resultaten leren aflezen (afronden) in functie van de betekenis of het gebruik ervan (bijv. ‘precies’ resultaat of grootte-orde gewenst). Voor sommige doeleinden volstaat een benadering tot op bijv. 0,1, voor andere zal een nauwkeurigheid tot op bijv. 0,0001 gevraagd worden. Dat is afhankelijk van de gebruikte nauwkeurigheid bij het invoeren van getallen, met het verder gebruik van het getal in berekeningen, enz..

4 Pedagogisch-didactische wenken

23 *Uitbreiding*
Als exemplarisch voorbeeld van de irrationaliteit van getallen wordt het bewijs gegeven dat er geen rationaal getal bestaat met kwadraat 2. De verzameling van de rationale getallen volstaat niet om een dergelijk elementair probleem te beschrijven. Dit is een van de weinige mogelijkheden om de leerlingen een haalbare motivatie te bieden voor het bestaan en de noodzaak van irrationale getallen.

5 Pedagogisch-didactische wenken

22 Hier kan een dieper inzicht nagestreefd worden in begrippen zoals periodiciteit en in het verband tussen

rationale getallen en het repeteren van de decimale voorstelling ervan (m.n. waarom vertoont die decimale vorm periodiciteit). Van de omzetting van een repeterende decimale vorm naar de breukvorm kunnen enkele niet-eenvoudige voorbeelden (bijv. een periode met meer dan twee cijfers, een gemengd repeterend decimaal gedeelte) aangeboden worden.

23 Als exemplarisch voorbeeld van de irrationaliteit van getallen wordt het bewijs gegeven dat er geen rationaal getal bestaat met kwadraat 2. De verzameling van de rationale getallen volstaat niet om een dergelijk elementair probleem te beschrijven. Dit is een van de weinige mogelijkheden om de leerlingen een haalbare motivatie te bieden voor het bestaan en de noodzaak van irrationale getallen.

24 Hier kan aandacht besteed worden aan een nauwkeuriger constructieproces voor lijnstukken waarvan de lengte gelijk is aan een niet-rationale vierkantswortel. (zie M16)

25 *Uitbreiding*
Het proces van de benadering met geneste intervallen kan hier nauwkeuriger beschreven worden. Dit is weer een mogelijkheid om de subtiliteit van de constructie van □ te illustreren.

2 Toepassingen op bewerkingen met reële getallen

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
G27	B	B	De rekenregels voor het rekenen met machten met gehele exponenten en met vierkantswortels uitdrukken in woorden en symbolen.	16
G28	B	B	De rekenregels voor het rekenen met machten met gehele exponenten en met vierkantswortels toepassen bij het uitvoeren van bewerkingen.	16
G29	–	U	De rekenregels voor het rekenen met vierkantswortels bewijzen.	
G30	B	B	Vraagstukken die leiden tot een vergelijking van de eerste graad met één onbekende oplossen.	19 21
G31	B	B	Ongelijkheden van de eerste graad in één onbekende oplossen.	20
G32	B	B	Vraagstukken oplossen die leiden tot een ongelijkheid van de eerste graad met één onbekende en de oplossing grafisch voorstellen en/of symbolisch noteren.	21
G33	B	B	Bij betekenisvolle formules een veranderlijke schrijven in functie van de andere.	17
G34	–	B	Vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste graad met één onbekende bespreken.	
G35	B	B	Een veelterm ontbinden in factoren door gebruik te maken van – de distributieve eigenschap; – merkwaardige producten; – groepering van termen.	

4 & 5	Pedagogisch-didactische wenken

27 De bewerkingen met rationale getallen worden uitgebreid tot bewerkingen met reële getallen. Daartoe zijn onder meer rekenregels voor het rekenen met machten en met wortelvormen noodzakelijk. De aandacht moet hier wel vooral gaan naar het toepassen van deze regels.
De rekenregels voor machten met gehele exponenten werden door de meeste leerlingen al verworven in de eerste graad. Een diagnostische toets zal informatie geven over de herhaling die eventueel nog noodzakelijk is. Daarbij is het zinvol de oefeningen te spreiden over een langere tijd (bijv. door middel van taken).
Voor het rekenen met vierkantswortels worden algebraïsche rekenregels geformuleerd door te redeneren op *voorbeelden* (voorbeeld: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ is een getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 6, dus is $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ gelijk aan $\sqrt{6}$). Regels die aan bod kunnen komen zijn het vereenvoudigen van vierkantswortels, som en verschil van gelijksoortige vierkantswortels, product, quotiënt en machten van vierkantswortels. Er dient gewezen te worden op de uitdrukkingen die niet leiden tot eigenschappen (voorbeeld: $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ is niet

gelijk aan $\sqrt{7}$, want het kwadraat van $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ is niet gelijk aan 7).

28 Meetkundige situaties zoals bij de stelling van Pythagoras kunnen hier een mogelijke realistische inkleding bieden voor het rekenen met wortelvormen.
De beschikbare tijd voor de inoefening van dit onderwerp is beperkt. Een beperking tot *eenvoudige* situaties is dus aangewezen. De rekenregels voor het rekenen met vierkantswortels maken het mogelijk een 'exact' resultaat te bekomen. In de praktijk zal dit vaak omgezet worden naar een decimale benadering (bijv. om de grootte-orde te kennen). In de praktijk zal men bij het rekenen met wortelvormen vaak zonder meer de rekenmachine gebruiken. Dit maakt uitgebreide inoefening van de rekenregels met veel en ingewikkeld cijferwerk overbodig.
Vooraleer over te stappen op het rekenen met wortelvormen waarin *letters* optreden zal best gerekend worden met wortelvormen van getallen waarop de rekenregels kunnen toegepast worden. Bij de lettervormen zal de moeilijkheidsgraad beperkt gehouden worden. Het gaat er veeleer om het principe van de rekenregels beter te begrijpen. Zo is het in een eerste inoefening zeker zinvol de vormen te beperken tot deze waarbij het lettergedeelte evident positief is.
Om een vorm met wortelvormen in de noemer te vereenvoudigen kan de mogelijkheid aangebracht worden die noemer rationaal te maken. Het is niet de bedoeling uitgebreid in te gaan op deze techniek, maar wel hem functioneel aan te wenden! Een uitgebreide inoefening van de regel op zich is hier niet aan de orde. Het is zinvol zich te beperken tot die vormen waarin de noemer een eenterm is bestaande uit een wortelvorm van de tweede graad.
Enige aandacht moet besteed worden aan het rekenen met lettervormen waarbij irrationale coëfficiënten optreden.
In het kader van het rekenen met wortelvormen worden enige oefeningen voorzien waarbij de *rekenmachine* wordt gebruikt. Reële getallen worden dan *benaderd* door rationale getallen met een eindige decimale vorm. De nauwkeurigheid van het resultaat is te bepalen, onder meer in functie van de gebruikte nauwkeurigheid van de ingevoerde getallen of van het gebruik van het afgelezen getal in verdere berekeningen. Werken met decimale getallen die nauwkeurig zijn tot op een verschillend aantal decimalen kan tot onoverzichtelijke onnauwkeurigheden leiden. Dergelijke uitgebreide foutenbespreking moet niet aan bod komen. Wel is het zinvol leerlingen aan te bevelen het *afronden* uit te stellen tot het eindresultaat. Leerlingen moeten inzien dat een rekenmachine intern met meerdere decimalen werkt en hiermee maximaal voordeel halen.

30 De oplossingstechniek van *vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende* in □ is dezelfde als die in □ . Deze werd verworven in de eerste graad. Hierdoor is het oplossen van deze vergelijkingen in □ geen doel op zich meer en dient dit geïntegreerd te worden inhet aanbieden van realiteitsbetrokken vraagstukken. Let wel, dat hier vraagstukken aan bod kunnen komen waarin zowel de coëfficiënten als de oplossingen van de vergelijkingen reële getallen zijn.
Hier moet een verband gelegd worden met het opzoeken van nulpunten van eerstegraadsfuncties. Het oplossen van vergelijkingen en het onderdeel eerstegraadsfuncties kunnen daartoe geïntegreerd aangepakt worden.
Is voor het oplossen van vergelijkingen van de eerste graad van een eenvoudige vorm en met eenvoudige getallen de manuele techniek een basisvaardigheid die moet verworven blijven, voor het oplossen van meer complexere vormen kunnen ICT-hulpmiddelen ingeschakeld worden. Zo kan men in deze gevallen gebruik maken van de ingebouwde oplosser. Of als het verband gelegd wordt met eerstegraadsfunctie(s), kan de oplossing van de vergelijking grafisch afgelezen worden of als het snijpunt van twee functies (bijv. rechter- en linkerlid) bepaald worden.

31 De eigenschappen van *ongelijkheden* zijn geen doel op zich, maar dienen toegepast te worden bij het oplossen van ongelijkheden en om de gelijkwaardigheid van twee ongelijkheden aan te geven.
In verband met het gebruik van ICT-hulpmiddelen geldt voor ongelijkheden een analoge opmerking als voor vergelijkingen. Bij meer ingewikkelde vormen kan een rekenmachine of software ingeschakeld worden. Als het verband gelegd wordt met eerstegraadsfunctie(s), kan de oplossing van de ongelijkheid grafisch afgelezen worden of bepaald worden door het vergelijken van de onderlinge ligging van twee functies (bijv. welk is het gebied waarin de functie bepaald door het rechterlid groter is dan deze bepaald door het linkerlid).

32 Zoals voor vergelijkingen wordt het oplossen van ongelijkheden met één onbekende in □ geïntegreerd in het oplossen van realiteitsbetrokken *vraagstukken*.
Hier moet een verband gelegd worden met de tekenbespreking van eerstegraadsfuncties. Het verband met het voorstellen van de oplossingen op een geijkte rechte ligt voor de hand (cf. eerste coördinaatas). De behandeling van ongelijkheden en eerstegraadsfuncties kan geïntegreerd worden.

33 Voor het praktisch gebruik in de wiskunde en in andere vakken (wetenschappen, economie) moeten leerlingen beschikken over de techniek om *formules* om te vormen. Daarbij wordt een van de veranderlijken

uitgedrukt in de andere. De techniek is deze van het oplossen van vergelijkingen, in het bijzonder deze van eerstegraadsvergelijkingen (overbrengen van een term, overbrengen van een factor). Met de andere veranderlijken wordt dan gerekend zoals met letters of met getallen.
Toch is deze vorm van letterrekenen voor vele leerlingen moeilijk. Vandaar dat dit best wordt ingeschakeld in betekenisvolle situaties, o.m. bij het oplossen van problemen. Het omwerken van zomaar een uitdrukking met letters wordt hierbij vermeden. De context kan hier een signaalfunctie hebben voor flagrante fouten. In de wetenschappelijke vakken zullen leerlingen ook nog moeten leren met de juiste eenheden te rekenen. Hierover kunnen tussen de verschillende vakgroepen afspraken gemaakt worden.

35 Een aantal *merkwaardige producten* en het *ontbinden in factoren* zijn behandeld in het tweede leerjaar van de eerste graad. Er komen geen nieuwe vormen bij. De beperkingen uit de eerste graad (ten hoogste twee veranderlijken, eenvoudige vormen) blijven van kracht. In de praktijk zullen de leerlingen dit maar gebruiken bij het zoeken naar nulpunten van veeltermfuncties in één veranderlijke. Te ingewikkelde vormen zullen het inzicht en de vaardigheid eerder bemoeilijken. Met de mogelijkheden die rekenmachines en computer zullen hebben in verband met het algebraïsch rekenen zal de impact hiervan kleiner worden. Er dient dus voorrang gegeven te worden aan het vlot beheersen van de basisvormen. Die kunnen na een diagnostische toets zo nodig zeer kort herhaald worden (bijv. gespreide, korte herhalingstaken gericht op vaardigheidstraining). De beschikbare tijd voor dit onderwerp is immers zeer beperkt!
Het algebraïsch rekenen op zich wordt hier niet uitgebreid. Vormen zoals $(a + b)^3$ en aanverwante vormen worden uitgesteld. Wel worden de gekende regels gebruikt binnen de 'nieuwe' getallenverzameling $\mathbb{R}$.
Zo kunnen merkwaardige producten gebruikt worden bij het rekenen met wortelvormen, bijv. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$.
En nu de wortelvormen gekend zijn, kan aandacht besteed worden aan vormen zoals $x^2 - 3$ die in $\mathbb{R}$ wel ontbindbaar zijn maar in $\mathbb{Q}$ niet en die vorig jaar niet behandeld werden.

4 Pedagogisch-didactische wenken

30 Bij het oplossen van vraagstukken kan heel wat aandacht besteed worden aan de ontwikkeling van *probleemoplossende vaardigheden*. (Voor een algemene situering zie 5.1). Dat kan bij wiskundig-zwakkere leerlingen niet aan het toeval overgelaten worden.
Belangrijk daarbij is dat leerlingen een probleem leren stellen in een gegeven situatie. Ze moeten in functie van het gevraagde de gegevens en de uit te voeren bewerkingen kunnen selecteren. Dat betekent dat ze leren een situatie of een opgave wiskundig weer te geven. Het 'model' is hier de eerstegraadsvergelijking.
De leerlingen kennen voorstellingstechnieken van gegevens, zoals *diagrammen, grafieken en tabellen*. Hiervan kan gebruik gemaakt worden om de presentatievorm van de problemen te variëren.
Nadat de leerlingen een accurate wiskundige representatie gekozen hebben, moeten ze een aangepaste rekenwijze kiezen. Bij het afronden van berekende getallen, in het bijzonder van het resultaat, moet rekening gehouden worden met de getallen zelf, hun rol eventueel verder in de berekening, de grootte-orde van de gegevens en het realiteitsaspect van de situatie. (Over de interpretatie van het resultaat in de context van de situatie, zie het onderdeel probleemoplossende vaardigheden bij 5.1.)

33 Een belangrijk alternatief voor het omvormen van *formules* bij het oplossen van problemen is alle gekende veranderlijken hun waarden toekennen en daarna de overblijvende veranderlijke berekenen met technieken van het oplossen van vergelijkingen in één veranderlijke.

5 Pedagogisch-didactische wenken

27 Bij de overgang van rationale naar reële getallen worden de bewerkingen 'uitgebreid'. Hierbij wordt algemeen aangenomen dat de eigenschappen die gelden voor rationale getallen geldig blijven voor reële getallen. Een korte herhaling van de eigenschappen en het illustreren van enkele ervan met concrete voorbeelden met reële getallen kan het inzicht in de uitbreiding versterken (bijv. tegengestelde en omgekeerde van een wortelvorm, tegengestelde en omgekeerde van een getal met een oneindige decimale vorm). Dat moet evenwel niet leiden tot een algehele herhaling van de opbouw van de algebraïsche structuur van $\mathbb{R}$ en het bewijzen van evidente afgeleide eigenschappen.

28 Het rekenen met wortelvormen met lettervormen wordt in een eerste stadium beperkt tot vormen met een positief grondtal. In een verder stadium kan dan de bespreking van de letters (dus de mogelijkheid met een negatief grondgetal) aan bod komen.

29 *Uitbreiding*
De verklaring van de eigenschappen kan gebeuren aan de hand van een aantal ‘algemene’ voorbeelden. Toch bestaat hier een van de weinige gelegenheden om de leerlingen te confronteren met *bewijzen* binnen de getallenleer. Zoals bij de meetkunde kan dit bijvoorbeeld leiden tot een verfijnen van formuleringen van definities en eigenschappen zodat ze praktisch hanteerbaar zijn of tot een beter inzicht in de samenhang tussen begrippen en bewerkingen (bijv. machtsverheffing en vierkantsworteltrekking).

30 Vraagstukken die leiden tot een vergelijking van de eerste graad in één onbekende zijn al aan bod gekomen in de eerste graad. De moeilijkheidsgraad van de vraagstukken die hier nog aangeboden worden, moet hoger liggen dan deze van de eerste graad.

31 Het hoofddoel is zeker het oplossen van problemen die aanleiding geven tot een ongelijkheid. Daarbij kunnen in een eerste fase de regels voor het oplossen van vergelijkingen ‘stilzwijgend’ overgenomen of aangepast worden (cf. negatieve factor). Het is evenwel zinvol binnen de beschikbare tijd aandacht te besteden aan *eigens*chappen van ongelijkheden in verband met bewerkingen, meer bepaald de regels die de verenigbaarheid van bewerkingen en een ongelijkheid bespreken (i.h.b. het vermenigvuldigen van beide leden met een negatief getal). Dit is overigens niet alleen een oefening in wiskundig inzicht maar ook in wiskundige taalvaardigheid.

32 De leerlingen moeten de oplossing van een ongelijkheid symbolisch kunnen noteren. Dit betekent de oplossing schrijven met behulp van een interval of een unie van intervallen. Dit kan ondersteund worden vanuit het grafisch aanduiden van de oplossingsverzameling. Het biedt ook een gelegenheid waarbij leerlingen het voordeel kunnen waarderen van een beknopte wiskundige schrijfwijze.

34 Hier wordt de kans geboden kennis te maken met het begrip *parameter* en zijn invloed op de oplossing van vergelijkingen en ongelijkheden. Deze werkwijze confronteert de leerling onder meer met de mogelijkheid van gevalsonderscheiding en met het structureren van de opgezette redenering.

5.2.3 REËLE FUNCTIES

4	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **reële functies** worden ca. 23 lestijden besteed

inleiding op reële functies	ca. 6 lestijden
functies van de eerste graad in één veranderlijke	ca. 17 lestijden

5	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **reële functies** worden ca. 21 lestijden besteed

inleiding op reële functies	ca. 5 lestijden
functies van de eerste graad in één veranderlijke	ca. 16 lestijden

4 & 5	Pedagogisch-didactische wenken

Het onderdeel *Reële functies* zal de volgende jaren studieonderwerp zijn voor de leerlingen. Het verder afliggend doel is het verloop van dergelijke functies te begrijpen, te beschrijven, te beheren, te gebruiken en toe te passen in praktische situaties. Bij de opbouw van dit onderdeel is het zinvol voorbeelden te onderzoeken van relaties tussen grootheden. Daarbij wordt uitgegaan van situaties die betekenisvol zijn voor de leerlingen en waarin de elementen in een wiskundig verband staan. Dat kunnen situaties uit hun leefwereld zijn (bijv. uit kranten of tijdschriften), maatschappelijk relevante situaties (bijv. uit de economie) of elementen uit hun basiskennis wiskunde (bijv. uit de meetkunde) of wetenschappen.

Bij de eerste kennismaking wordt *het aantal functiecategorieën beperkt gehouden* en de realistische situatie relatief eenvoudig. Het doel is *inzicht verwerven in het proces van wiskundige vertolking met functies*. Meer ingewikkelde functies (bijv. van een hogere graad) zullen later aan bod komen als dat inzicht verworven is. De leerlingen zijn uit de eerste graad vertrouwd met enkele belangrijke elementaire verbanden, zoals die tussen recht evenredige grootheden of omgekeerd evenredige grootheden. Die kunnen in de aanloop hernomen worden. Andere mogelijkheden zijn verbanden van de eerste graad (die verderop expliciet aan bod komen) en kwadratische verbanden (bijv. het verband tussen de oppervlakte van een cirkel en de straal). Ook kunnen verbanden aan bod komen met een meervoudige voorschrift of met meer dan twee variabelen. De leerlingen beschikken evenwel nog niet over een uitgebreid algebra- of analysearsenaal om deze verbanden te bestuderen. De tweedegraadsfuncties komen expliciet aan bod in het tweede leerjaar van de tweede graad! In de aanloopfase is het zeker niet de bedoeling onderhands ingewikkelde algebraïsche uitdrukkingen ter sprake te brengen. De bestudeerde verbanden zullen dus relatief eenvoudig blijven. Het inzicht in het begrip functie kan versterkt worden door kort in te gaan op het verschil tussen een willekeurige relatie en een functioneel verband.

Na de algemene inleiding komen in dit leerjaar als reële functies in hoofdzaak de *eerstegraadsfuncties* en functies met een meervoudig voorschrift die combinatie zijn van constante en eerstegraadsfuncties aan bod.
Bij de exploratie van grafieken van functies, het bekijken van een bijbehorende tabel functiewaarden is de *grafische rekenmachine* of de *computer* een handig hulpmiddel. Dat is dan een gelegenheid om de doelstellingen in verband met het gebruik van I.C.T.-hulpmiddelen na te streven.

In de wiskunde is het gebruikelijk in de meer geabstraheerde formules de letters x en y te gebruiken. Om de transfer naar het gebruik van functies in andere vakken te ondersteunen is het zinvol bij de ontwikkeling van het functiebegrip en bij de inoefening letters te gebruiken die aangepast zijn aan de situatie.

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
F36	B	B	In betekenisvolle situaties die kunnen beschreven worden met een functie de samenhang aangeven tussen de verwoording, een tabel, een grafiek en het voorschrift.	22

4 & 5	Pedagogisch-didactische wenken

36 Bij een situatie die met een functie beschreven kan worden tellen vier elementen: de *situatie* zelf waaraan de functie haar betekenis ontleent, het *functievoorschrift*, een *tabel* van functiewaarden en de *grafiek*. De leerlingen moeten in een aantal situaties de vier voorstellingswijzen kunnen weergeven, bijvoorbeeld: een tabel van overeenkomstige waarden maken; een grafiek tekenen en daarbij het gekozen assenstelsel accuraat kiezen; een functievoorschrift opstellen. Ze moeten vlot van de ene vorm naar de andere overstappen als dat mogelijk en wenselijk is.

Zo kan het verband tussen twee of meer grootheden wiskundig geëxpliciteerd worden in woorden (bijv. de afgelegde weg bij eenzelfde snelheid is recht evenredig met de tijd; de rente is het product van kapitaal, rentevoet en tijd). Het verband kan met een formule of een voorschrift omschreven worden (bijv. $I = K \cdot i \cdot t$; $S = \pi r^2$). Of aangebracht worden aan de hand van een tabel van overeenkomstige waarden (bijv. de rente van eenzelfde kapitaal bij verschillende rentevoeten; de resultaten van een meting of experiment). Of door een grafische voorstelling ervan (zo valt bij een artikel in de krant vaak eerst de grafiek op en de legende, dan eventueel een tabel met ‘precieze’ waarden en daarna volgt het lezen van het verhaal).

Een eerste stap in het begrijpen van de informatie in een *tabel* is het aflezen van de grootheden, het aflezen van waarden en het opzoeken van bijzondere waarden zoals extreme waarden. Ook over het globale ‘verloop’ van de waarden uit een tabel moeten leerlingen een indruk kunnen geven. Gaat het bijvoorbeeld om een stijgende, een dalende, een constante trend. Is er informatie af te lezen in verband met gelijkmatige toename of is er een maat te bepalen voor de snelheid van toe- of afname. Belangrijk is dat leerlingen de afgelezen getallen terug in de juiste context kunnen plaatsen, bijv. wat is de betekenis van een extreme waarde of van een stijgende trend in deze situatie.

Leerlingen moeten kritisch leren omgaan met informatie en de veralgemening ervan. Een tabel biedt maar beperkte informatie aan over bepaalde waarden. Hieruit een vast verband afleiden is moeilijk. De kennis van een aantal bijkomende waarden zou het vermoeden over het beschreven verband kunnen wijzigen.

Een *grafiek* biedt heel wat zintuiglijke en overzichtelijke informatie. Ook hier gaat het erom die informatie af te lezen en te interpreteren, o.m. een bepaalde waarde aflezen, een extreme waarde aflezen, het globale verloop (constant, stijgen, dalen) bespreken. Meestal valt een belangrijke waarde zoals een nulwaarde of een extreme waarde onmiddellijk op. De toename of afname van beeldwaarden is verbonden met het stijgen of dalen van de grafiek. Bij het aflezen wordt soms informatie over het hoofd gezien, bijv. welke zijn de effectieve grootheden die uitgezet werden en met welke eenheden op de assen. Zo kan de keuze van het assenstelsel en de eenheid (schaal) een andere indruk geven over dezelfde informatie (bijv. met betrekking tot het stijgen of dalen, de schijnbare helling van de grafiek). Het vergelijken van grafieken van eenzelfde fenomeen uit verschillende kranten is een voor de hand liggende instap, die inzicht kan bijbrengen.

Leerlingen moeten leren om kritisch om te gaan met de informatie in een grafiek. Een grafiek kan maar gegeven zijn voor een bepaald deel. Het verloop kan buiten het beschikbare deel anders zijn. Extrapolatie is mogelijk, maar hoeft niet te beantwoorden aan de rest van het verloop of aan het reële verloop.

Het omzetten van een situatie (verhaal, tekst) naar een meer formeel wiskundig voorschrift sluit nauw aan bij het doel van mathematiseren en/of modelleren van de leefwereld. Uiteindelijk zullen de leerlingen aan de vergelijking (of het voorschrift) de grafiek van een functie herkennen. Het uitdrukken van een beschreven verband met een formule of een functievoorschrift is dan weer een gelegenheid om hen te laten inzien dat de ene veranderlijke in functie van de andere verandert. Dit leidt tot begrippen zoals onafhankelijke en afhankelijke veranderlijke. Zo moeten leerlingen in een gegeven formule de waarde van één veranderlijke kunnen berekenen bij vervanging van de andere veranderlijke(n) door een getal; en het effect aangeven van de verandering van één veranderlijke op de andere, uiteraard in functie van het beschouwde probleem.

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
F37	B	B	De definitie van een eerstegraadsfunctie geven.	
F38	B	B	De grafiek van een eerstegraadsfunctie tekenen.	23 24
F39	B	B	De grafische betekenis van de coëfficiënten m en q in het voorschrift $f(x)=mx+q$ van de functie uitleggen.	23 24 25 33
F40	B	B	Het nulpunt van een eerstegraadsfunctie bepalen en grafisch interpreteren.	25
F41	B	B	Het voorschrift bepalen van een eerstegraadsfunctie als die gegeven is door een tabel van functiewaarden.	26
F42	B	B	Het voorschrift bepalen van een eerstegraadsfunctie als die gegeven is door haar grafiek.	26
F43	B	B	De tekenverandering van een eerstegraadsfunctie onderzoeken.	25
F44	B	B	Een ongelijkheid van de eerste graad met één onbekende oplossen en het verband leggen tussen die oplossing en een passende grafische voorstelling.	25 27
F45	B	B	Vraagstukken oplossen waarbij het verband beschreven wordt door een eerstegraadsfunctie.	31

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

37 Bij de voorbeelden in de inleiding op reële functies worden de leerlingen geconfronteerd met de vier mogelijkheden waarmee een functie kan bepaald worden. Daaruit blijkt dat het voorschrift het middel is om een functie te bepalen. De grafiek, voor zover er vanuit gegaan wordt dat ze volledig gekend is op grond van het getekende deel, vervult die rol ook. Een tabel van functiewaarden kan daartoe gebruikt worden, alhoewel die vaak relatief beperkte informatie geeft over het geheel van de functie.
Leerlingen moeten inzien dat een verband wordt beschreven met een functievoorschrift van de eerste graad, als de grafiek ervan een rechte is. Omgekeerd is de grafiek van een functie met een voorschrift van de eerste graad een rechte. Dit proces moet leiden tot een hanteerbare definitie van eerstegraadsfunctie met behulp van het functievoorschrift.
Aan de grafiek van een eerstegraadsfunctie kan meteen de algemene vergelijking van die rechte gekoppeld worden (zie A43). Bij de ontwikkeling van de eerstegraadsfuncties kan een deel van de analytische meetkunde gelijktijdig opgebouwd worden. Let wel dat dan aandacht moet besteed worden aan de bijzondere gevallen van de rechten evenwijdig met de coördinaatassen. Uiteraard blijft de aanpak waarbij eerst in de analytische meetkunde de vergelijking van rechten bepaald wordt mogelijk.
Er moet gelet worden op een *correct taalgebruik*: een punt ligt op een rechte, terwijl een coördinaat een oplossing is van een vergelijking van de rechte; een functie f met voorschrift $f(x)=mx+q$ heeft een grafiek, die grafiek heeft in een coördinatenstelsel een vergelijking $y=mx+q$.

38 De leerlingen hebben in de eerste graad al kennis gemaakt met een grafische voorstelling van het verband tussen recht evenredige grootheden. De gevonden coördinatenkoppels liggen op een ‘rechte’. Nu de reële getallen gekend zijn, kan dit een zinvol uitgangspunt zijn om de grafiek van een eerstegraadsfunctie op te bouwen.
Deze doelstelling moet ruim geïnterpreteerd worden. Leerlingen moeten een idee hebben van de *punt voor punt constructie* van een grafiek. Zo kunnen ze bijv. een tabel van functiewaarden opstellen, de bijbehorende punten tekenen, nog tussenliggende koppels berekenen, om uiteindelijk vast te stellen dat de grafiek een rechte is. De grafische mogelijkheden van rekenmachine en computer kunnen hier het beeld van een effectieve punt voor punt constructie versterken.
Vanuit de meetkunde weten leerlingen dat een rechte kan bepaald worden met een *minimum* aan gegevens, bijv. twee punten of een punt en een rechte waaraan ze evenwijdig is. Analytisch vertaald zich dat in een

meer praktische werkwijze om het functievoorschrift op te stellen, met name op grond van de coördinaten van twee punten of van de coördinaat van een punt en de richtingscoëfficiënt van de rechte. Weliswaar kan dit maar omdat men 'weet' dat de grafiek van een eerstegraadsfunctie een rechte is. En alleen dan volstaan twee punten. De verantwoording daarvan komt aan bod in de volgende doelstellingen. Uiteindelijk zullen de leerlingen aan de vergelijking (of het voorschrift) herkennen of de grafiek van een functie al dan niet een rechte is. Verwijzend naar enkele meer algemene voorbeelden uit de inleiding op functies moeten ze kunnen inzien dat slechts eerstegraadsfuncties een rechte als grafiek hebben.

39 Op basis van voorbeelden over recht evenredige grootheden kan het verband geëxpliciteerd worden tussen voorschrift, grafiek en de functie met voorschrift $f(x) = mx$. Dat de grafiek een rechte is kan o.m. afgeleid worden met behulp van gelijkvormigheid van driehoeken (cf. de hoek met de eerste coördinaatas).
Snel blijkt dat m een idee geeft over de *helling* van de rechte en bijgevolg over de richting van de rechte. De betekenis van de term richtingscoëfficiënt wordt hierdoor duidelijk. Hier kan al een verband gelegd worden met het begrip richtingscoëfficiënt (quotiënt van de toename van de afhankelijk veranderlijke en de toename van de onafhankelijk veranderlijke). De richtingscoëfficiënt kan in verband gebracht worden met het stijgen of dalen van de grafiek.
Bij de functie met voorschrift $f(x)=mx+q$ gaat de evenredigheid tussen x-waarden en de bijbehorende functiewaarden verloren. Evenredigheid is er wel tussen de toenamen van x en de bijbehorende toenamen van de functiewaarden (cf. differentiequotiënt). De grafiek van de functie met voorschrift $f(x)=mx+q$ is de grafiek van $f(x) = mx$, die onderworpen werd aan een *verschuiving* volgens de tweede coördinaatas waarvan de grootte en de zin bepaald worden door q. Hieruit kan meteen volgen dat evenwijdige rechten eenzelfde richtingscoëfficiënt hebben.
Het gebruik van een grafische rekenmachine of een computer is hier sterk aanbevolen. Ze kunnen handig illustreren wat het effect is van de wijziging aan een van de coëfficiënten m of q.

40 De gekende techniek van het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen kan hier gekoppeld worden aan het bepalen van het nulpunt van de overeenkomstige functie of aan het bepalen van het snijpunt van de rechte met de eerste coördinaatas (of de grafische interpretatie).

41 Als een tabel van functiewaarden gegeven is, kan de vergelijking worden opgesteld door daaruit twee stel coördinaatgetallen af te leiden en de redenering te maken voor een rechte door twee punten (zie A46). Uiteraard is een controle voor de andere gegeven waarden noodzakelijk.
Een andere mogelijkheid is in de tabel zelf op te zoeken of met een bepaalde vaste toename van de onafhankelijk veranderlijke telkens een gelijke toename van de afhankelijk veranderlijke overeenkomt. Daaruit kan dan de richtingscoëfficiënt afgeleid worden. (Bijv. als bij een vaste toename van de x-waarden met 5, een vaste toename van f(x) met 15 overeenkomt is de richtingscoëfficiënt 3.)

42 Een eenvoudige instap zou kunnen zijn het associëren van gegeven grafieken aan een reeks gegeven voorschriften. Daarbij komt het eerder aan op het verifiëren, dan op het zelf opzoeken van de elementen.
Als de grafiek van een eerstegraadsfunctie gegeven is, kan men meestal de waarden van m en q van het functievoorschrift grafisch aflezen (de toename van f(x) voor een toename van x met 1 of de verhouding van de toename van f(x) tot de toename van x voor de richtingscoëfficiënt m, de grootte van de afsnijding op de y-as voor q).
Een andere mogelijkheid is het aflezen van twee stel coördinaatgetallen zodat de vergelijking van de rechte door die twee punten kan opgesteld worden. Explicitering van de afhankelijk veranderlijke geeft het functievoorschrift. Voor het opstellen van de vergelijking kan gekozen worden voor een werkwijze met behulp van onbepaalde coëfficiënten.
Leerlingen moeten in beide gevallen bij het aflezen van coördinaatgetallen oog leren hebben voor 'nauwkeurigheid'. Zo zullen ze uitkijken naar punten met een stel gehele coördinaten of met eenvoudige coördinaten zoals die van het nulpunt. Dit is niet altijd mogelijk, wat de beperktheid van de procedure aangeeft.
Het bepalen van het voorschrift kan gebeuren door het oplossen van een 2x2-stelsel of door gebruik te maken van de formules uit de analytische meetkunde (zie A46). Een geïntegreerde aanpak is daarom wel aan te bevelen. Let wel, de situatie in de analytische meetkunde is ruimer dan die van de eerstegraadsfuncties.
Als toepassing kunnen hier oefeningen aangeboden worden op het opzoeken van het voorschrift van constante functies en van functies met een meervoudig voorschrift.

44 Het oplossen van *ongelijkheden van de eerste graad met één onbekende* kan hier verbonden worden met de tekenverandering van de bijbehorende eerstegraadsfunctie (zie G32).
Het verdient aanbeveling dat de ongelijkheden betrekking hebben op vraagstukken over meer realistische situaties. Interpretatie van de oplossing is dan wel noodzakelijk.

45 Als toepassing worden enkele vraagstukken behandeld die aanleiding geven tot een beschrijving met een functie van de eerste graad. Hierbij komt het omzetten in wiskundige vorm (het mathematiseren) door een

geschikte keuze van de onbekenden expliciet aan bod.
In deze toepassingssituaties kunnen voor de berekeningen van de karakteristieken van de eerstegraadsfuncties ICT-hulpmiddelen gebruikt worden, bijv. de ingebouwde oplosser voor nulpunten, het grafisch aflezen van nulpunten (cf. vergelijkingen), teken (cf. ongelijkheden), snijpunten of onderlinge ligging van twee functies (cf. rechter- en linkerlid van gelijkheid of ongelijkheid). Het is evident dat in eenvoudige situaties het manueel rekenen zinvol blijft.

5 Pedagogisch-didactische wenken

39 Sommige eigenschappen van evenredigheden kunnen hier geïllustreerd worden (bijv. vermenigvuldigen van teller en noemer van een verhouding met eenzelfde getal geeft een gelijke verhouding - merk het verband met de stelling van Thales).

40 Bij een gegeven grafiek kan het nulpunt grafisch afgelezen worden. Dat is mogelijk voor gehele en afhankelijk van de eenheden voor een aantal rationale waarden. Aflezing in het algemeen kan maar benaderend zijn. Leerlingen worden op deze wijze geconfronteerd met een eerste vorm van benadering van een nulpunt. Ze kunnen hier een voordeel ervaren van het werken met functievoorschriften en een algebraïsche algoritme voor het ‘exact’ oplossen van vergelijkingen. Maar verder in hun studieloopbaan zullen ze allicht geconfronteerd worden met situaties waarin een dergelijke werkwijze niet beschikbaar is en zullen ze hiervoor andere benaderingsmethoden gebruiken. Het grafisch benaderen van een oplossing is een eerste stap.

44 Een verdere toepassing is het oplossen van stelsels ongelijkheden van de eerste graad, dat resulteert in de doorsnede van de twee oplossingenverzamelingen van de ongelijkheden.
Zoals het oplossen van ongelijkheden wordt dit best omkaderd door realistische situaties.

5.2.4 ANALYTISCHE MEETKUNDE

4	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **analytische meetkunde** worden ca. 15 lestijden besteed

algemene vergelijking en stelsels	ca. 11 lestijden
problemen analytisch oplossen	ca. 4 lestijden

5	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **analytische meetkunde** worden ca. 23 lestijden besteed

algemene vergelijking en stelsels	ca. 10 lestijden
problemen analytisch oplossen	ca. 7 lestijden
vectoren	ca. 6 lestijden

4 & 5	Pedagogisch-didactische wenken

Een basisidee van de wiskunde is de algebraïsering van een meetkundige situatie. Coördinaten zijn al eerder ingevoerd. De eerste kennismaking met deze analytische beschrijving wordt beperkt tot het opstellen van vergelijkingen van rechten.
De rechte komt aan bod als grafiek van een eerstegraadsfunctie. De vergelijking van die grafiek kan daar afgeleid worden of hier in de analytische meetkunde opgesteld worden. De volgorde is vrij. Een mogelijkheid is de leerinhouden van de onderdelen eerstegraadsfuncties en analytische meetkunde geïntegreerd aan te bieden.
Er moet zeker voldoende aandacht besteed worden aan de betekenis van de coëfficiënten en in het bijzonder van de richtingscoëfficiënt en de meetkundige betekenis ervan. Alleszins moet hier bijzondere aandacht besteed worden aan de vergelijkingen van de evenwijdigen aan de coördinaatassen omdat ze bij eerstegraadsfuncties niet aan bod komen.

5	Pedagogisch-didactische wenken

Het opstellen van een vergelijking van een rechte kan aangebracht worden vanuit de kennis van de eerstegraadsfuncties. Een andere zinvolle wiskundige aanbreng is die met behulp van vectoren. Hierdoor krijgen bepaalde problemen een mooie wiskundige vertolking (bijv. richtingscoëfficiënt van een rechte bepaald door twee punten). Het is mogelijk de onderdelen ‘vergelijking van een rechte’ en ‘vectoren’ als afzonderlijke gehelen te zien en pas achteraf de verbinding tussen beide te leggen. De keuze van de werkwijze is vrij. Ze zal allicht ook afhangen van de betekenis die men aan vectoren wil geven. Alleszins is er weinig ruimte beschikbaar om hier nog uitgebreid in te gaan op vectoren.

1 Algemene vergelijking van een rechte

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
A46	B	B	Een vergelijking opstellen van een rechte als ze gegeven wordt door – een punt en de richtingscoëfficiënt; – twee punten.	26 33
A47	B	B	De rechte met vergelijking $ax+by+c=0$ waarbij $a\neq 0$ of $b\neq 0$ tekenen en bespreken.	
A48	B	B	Het verband leggen tussen de algemene vergelijking van een rechte $ax+by+c=0$ $(b\neq 0)$ en de verwante eerstegraadsfunctie.	

4 & 5	**Pedagogisch-didactische wenken**

46 Als een coördinatenstelsel is vastgelegd kan een rechte beschreven worden door middel van een vergelijking. Die drukt het verband uit tussen de coördinaatgetallen (x, y) van de punten van de rechte. De leerlingen hebben dit verband al onderzocht bij de grafiek van een eerstegraadsfunctie. Hier worden basisformules opgesteld voor rechten die aan bepaalde voorwaarden voldoen, enerzijds door een gegeven punt en met gegeven richtingscoëfficiënt en anderzijds door twee gegeven punten. Formules die aan bod kunnen komen zijn: $y - y_0 = m(x - x_0)$ en $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Voor de tweede vorm bestaat het alternatief van het berekenen van de richtingscoëfficiënt van de rechte met behulp van de coördinaten van de twee gegeven punten met gebruik van de formule $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, waarna de eerste formule wordt toegepast.

Het opstellen van vergelijkingen van rechten door twee punten of een punt en een richtingscoëfficiënt moet ingeoefend worden met vele concrete voorbeelden en toepassingen. Zo kan bij het opstellen van een vergelijking van een rechte die aan bepaalde voorwaarden voldoet, al gewerkt worden met de methode van onbepaalde coëfficiënten. Ook het probleem van evenwijdige rechten kan aan bod komen. En als de twee gegeven punten op een rechte liggen evenwijdig aan de coördinaatassen komen leerlingen spontaan in aanraking met het probleem van hun richtingscoëfficiënt.

47 De vergelijking van een rechte kan van de expliciete vorm omgewerkt worden tot de meer algemene vergelijking $ax + by + c = 0$. Dit wil zeggen de verschillende vergelijkingen van rechten, m.n. de vormen $y = mx$ en $y = mx + q$, maar ook $y = q$ en $x = k$ moeten omgevormd worden tot de algemene vorm. De relatie tussen de coëfficiënten van de verschillende vormen van de vergelijking wordt gelegd.

Anderzijds kan de algemene vergelijking $ax + by + c = 0$ omgevormd worden tot de expliciete vorm mits $b \neq 0$. Dit leidt op natuurlijke wijze tot de richtingscoëfficiënt van de rechte uitgedrukt met de coëfficiënten van x en y. Dit leidt tot de bespreking van de vergelijking als een of meer coëfficiënten nul zijn. Als in de algemene vergelijking a nul is en b niet nul, dan is de rechte evenwijdig aan de eerste coördinaat-as. Hier kan het verband gelegd worden met de grafiek van een constante functie. Als in de algemene vergelijking b wel nul is (en $a \neq 0$), dan stelt ze een rechte voor evenwijdig aan de y-as. Deze vorm is niet herleidbaar tot een functievoorschrift (zie A48).

2 Stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden

	4	5	**Leerplandoelstellingen - Leerinhouden**	Et
A49	B	B	Bij een gegeven verbale situatie een stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden opstellen.	29
A50	B	B	Een stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden grafisch oplossen en interpreteren.	28
A51	B	B	Een stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden algebraïsch oplossen.	28
A52	B	B	Het snijpunt van twee rechten algebraïsch berekenen en grafisch interpreteren.	30

4 & 5	**Pedagogisch-didactische wenken**

49 De leerlingen beschikken al over de modellen functie en vergelijking (bijv. nulpunt bepalen van de functie, origineel bepalen als de beeldwaarde gegeven is, snijpunt met niveaulijn) om bepaalde situaties tussen twee veranderlijke grootheden te mathematiseren. Een aantal probleemsituaties leidt tot een systeem van twee (of meer) vergelijkingen. Het aanpakken van stelsels vanuit voldoende vraagstukken ligt dus voor de hand. Dit moet waarborgen dat de leerlingen vertrouwd geraken met deze nieuwe vorm van modellering.

Een *stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden* wordt in de analytische meetkunde geassocieerd met het bepalen van het snijpunt van twee rechten. Dit leidt tot het grafisch aflezen van de coördinaat van het snijpunt en tot algebraïsche methoden om die te bepalen.
In de praktijk komen stelsels voor in allerlei situaties waar het verband met de meetkundige situatie minder duidelijk is. De moeilijkheden voor leerlingen zijn daarbij het kiezen van de onbekenden en het opstellen van de vergelijkingen aan de hand van de beschreven situatie. Daarom is het zinvol hierop enkele afzonderlijke oefeningen te voorzien, zonder dat het stelsel al noodzakelijk effectief opgelost wordt.

50 De vergelijkingen van een stelsel kunnen in een assenstelsel voorgesteld worden als rechten (bijv. met behulp van ICT-hulpmiddelen). De oplossing van het stelsel kan dan grafisch afgelezen worden. Zo nodig kan hierbij een nauwkeurige oplossing berekend worden door gebruik van de daartoe geëigende middelen van de grafische rekenmachine of de computer (bijv. met ‘intersect’).

51 Soms is het zinvol de oplossing van een stelsel zo exact mogelijk te bepalen. Daartoe kunnen als *algebraïsche oplossingsmethoden* de methode van gelijkstelling, de combinatie- en de substitutiemethode aangeleerd worden.
Als de leerlingen klassikaal beschikken over een rekenmachine met voorgeprogrammeerde oplossingstechnieken voor stelsels, zal dit aangeleerd worden. Zeker in praktische situaties kan hiervan gebruik gemaakt worden. De aanbreng en de inoefening van de oplossingstechnieken kan dan meer gericht worden op het inzicht in de methoden.

52 Het verband tussen het algebraïsch bepalen van het snijpunt van de grafiek van twee eerstegraadsfuncties en het oplossen van stelsels ligt voor de hand. Met ICT-hulpmiddelen kan de grafische oplossingswijze gemakkelijk als controlemiddel gehanteerd worden.

4 Pedagogisch-didactische wenken

51 Om het algebraïsch rekenwerk voor de leerlingen te beperken kan er voor geopteerd worden slechts een methode aan te leren. In verband met het bepalen van een snijpunt van de grafieken van twee eerstegraadsfuncties zou dit de gelijkstellingsmethode kunnen zijn. De vergelijkingen van de rechten worden dan eerst omgezet naar de expliciete vorm.

3 Problemen analytisch oplossen

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
A53	B	B	Vraagstukken oplossen waarbij – de coördinaat van een punt of de afstand tussen twee punten moet berekend worden; – een vergelijking van een rechte moet opgesteld worden; – een stelsel van vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden moet opgesteld worden.	21 29 30 40
A54	–	B	Eigenschappen analytisch bewijzen.	

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

53 Bij het oplossen van vraagstukken kunnen de leerlingen leren een beschreven situatie te mathematiseren. Bij het analytisch oplossen van een probleem ondervinden de leerlingen daarbij ‘nieuwe’ moeilijkheden. Ze moeten het verband tussen gegevens en tussen gegevens en gevraagde leren analytisch te omschrijven, bijv. het kiezen van de onbekenden en het opstellen van de verschillende vergelijkingen. De leerlingen hebben hiermee vaak meer problemen dan met het uitvoeren van rekentechnieken.
Voorbeelden van meetkundige problemen die aanleiding geven tot het bepalen van een coördinaat of het berekenen van een afstand zijn: coördinaat van het midden van een lijnstuk, onderzoeken of drie punten collineair zijn, een driehoek bepalen die gelijkbenig is of die rechthoekig is.
Sommige problemen leiden tot het opstellen van een vergelijking, bijv. de vergelijking van een zwaartelijn

in een driehoek opstellen, de omtrek van een driehoek bepalen als de vergelijkingen van de dragers van de zijden gegeven zijn.
Er zal aandacht besteed worden aan het grafisch oplossen van problemen, bijv. bij het vergelijken van twee functies (bijv. welk systeem van betalen kost het meest?). Zo kan de vraag naar de gelijkheid van twee functiewaarden voor een bepaalde x-waarde leiden tot het berekenen van de coördinaat van het snijpunt van de twee bijbehorende grafieken, tot het grafisch interpreteren ervan en tot het oplossen van een stelsel.

5	Pedagogisch-didactische wenken

53 Sommige verbanden verlopen niet helemaal volgens een eerstegraadsfunctie, maar kunnen erdoor benaderd worden. De oplossing van een vergelijking of van een stelsel moet achteraf dan wel ‘geëvalueerd’ worden in de gegeven situatie.

54 Bijkomende toepassingen op het berekenen van afstanden zijn o.a.:
- de coördinaat van het zwaartepunt van een driehoek bepalen,
- de afstand van een hoekpunt van een driehoek tot het zwaartepunt berekenen.

De leerlingen beschikken nu over een aantal middelen om bepaalde eigenschappen analytisch te verklaren (te bewijzen). Dit betekent concreet dat bepaalde relaties of situaties algemeen aangetoond worden door het gebruik van algemene coördinaten in een goed gekozen (orthonormaal) assenstelsel.
Voorbeelden:
- de eigenschap van een middenparallel in een driehoek of een gelijkbenig trapezium,
- de lengte van de zwaartelijn naar de schuine zijde in een rechthoekige driehoek,
- de concurrentie van zwaartelijnen in een driehoek,
- de eigenschap dat in een parallellogram de som van de kwadraten van de lengten van de diagonalen gelijk is aan de som van de kwadraten van de lengten van de zijden.

De leerlingen zijn evenwel nog niet geconfronteerd geweest met deze vorm van mathematiseren. Er zal dus veel zorg besteed worden aan de geleidelijkheid van de werkwijze, bijv. de keuze van het assenstelsel om het rekenwerk te vereenvoudigen. De leerkracht zal er zich van bewust zijn dat het verwerven van dergelijke ervaring een meer dan occasionele behandeling van dit onderdeel vergt. Zo zal van leerlingen in dit stadium nog niet verwacht kunnen worden, dat ze al zelf in alle gevallen een geschikte keuze voor het assenstelsel kunnen maken. Deze werkwijze biedt tevens een zinvol alternatief voor het louter technisch uitvoeren van oefeningen op algebraïsch rekenen en het rekenen met veranderlijken.
Bepaalde software laat toe problemen analytisch aan te pakken zonder de meer voordelige keuze voor assenstelsel, coördinaten,… te maken. Ze beschikken immers over de mogelijkheid rechten door punten te tekenen, de vergelijking op te vragen, en coördinaten van snijpunten te berekenen. Toch is het zinvol voldoende aandacht te besteden aan de manuele weg, omdat die het inzicht in de problematiek en de aanpak ervan kan versterken. Software kan dan nog gebruikt worden voor de berekeningen (bijv. oplossing stelsel).

4 Vectoren

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
A55	–	B	Het begrip vector definiëren.	
A56	–	B	Een vector ontbinden volgens de assen van een assenstelsel en associëren met een koppel coördinaatgetallen.	
A57	–	B	De som van twee vectoren definiëren en construeren met behulp van de parallellogramregel.	
A58	–	B	Eigenschappen van de optelling van vectoren onderzoeken.	
A59	–	B	Het product van een vector met een getal definiëren en construeren.	
A60	–	B	Het vectorbegrip gebruiken om een vergelijking van een rechte op te stellen.	
A61	–	U	Het vectorbegrip gebruiken om meetkundige eigenschappen te formuleren en te verklaren.	

5 Pedagogisch-didactische wenken

Dit onderdeel kan afzonderlijk behandeld worden waarna het verband met het opstellen van een vergelijking van een rechte wordt gelegd (A61). Het kan ook geïntegreerd worden bij het opstellen van de algemene vergelijking van een rechte (rechte door twee punten, rechte door een punt met een gegeven richting).

55 Voortbouwend op het begrip verschuiving dat in de eerste graad werd ingevoerd kan het begrip vector relatief eenvoudig worden aangebracht. Ook een meer realistische benadering vanuit de fysische of technische toepassingen (grootheid met grootte, richting, zin) kan relatief eenvoudig gekoppeld worden aan het begrip verschuiving. (Zie leerplan eerste graad p.61: "verschuiven gebeurt intuïtief over een bepaalde afstand volgens een bepaalde richting en zin".)

56 Het is zinvol het begrip vector vrij snel te verbinden aan een stel coördinaatgetallen. Dit verband kan gebruikt worden bij het analytisch beschrijven van rechten.

61 *Uitbreiding*

Het heeft weinig zin het vectorbegrip in de wiskunde te ontwikkelen zonder er ook effectief gebruik van te maken. Precies in toepassingen kunnen leerlingen ervaren welke voor- en/of nadelen het gebruik van vectoren eventueel heeft (bijv. elegantie van een modellering, van een verklaring, …). De vectoriële oplossingsweg kan geplaatst worden naast deze met synthetische en/of analytische hulpmiddelen. Let wel, dit zal beperkt moeten blijven tot een eerste aanzet, want de inleiding in vectoren is relatief beperkt. Het is dus te verwachten dat leerlingen nog niet zelf een adequate keuze kunnen maken tussen de verschillende methodes.

Als toepassingen kunnen aan bod komen:

- de voorwaarde voor collineariteit,
- de voorwaarde voor midden van een lijnstuk
- eigenschappen in een driehoek (bijv. zwaartepunt)
- eigenschappen in een parallellogram (diagonalen) .

5.2.5 BESCHRIJVENDE STATISTIEK

5 Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **beschrijvende statistiek** worden ca. 15 lestijden besteed

5 Pedagogisch-didactische wenken

Vanuit de maatschappij worden we geregeld geconfronteerd met allerlei gegevens over allerlei omstandigheden en vanuit een ruime waaier van disciplines en onderzoeksgebieden. De media, zoals kranten, tijdschriften, televisiebeelden of het Internet, bieden een veelheid aan informatie aan, vaak voorzien van een visuele ondersteuning. De leerlingen moeten leren omgaan met deze gegevensstromen. De wiskundevorming kan hieraan niet voorbij gaan.

De hoofdbedoeling van beschrijvende statistiek is *het ordenen, het samenvatten, het overzichtelijk voorstellen en het interpreteren van gegevens* afkomstig van allerlei situaties uit diverse disciplines.
Leerlingen moeten in de eerste plaats leren aangeboden informatie kritisch te analyseren en te beoordelen. Het hoofdaccent van de verwerking van dit onderdeel 'beschrijvende statistiek' zal dan ook liggen op het *interpreteren van gegeven voorstellingen en informatie*. Daarbij kan wel vermeld worden dat het verwerken van een reeks gegevens, het berekenen van een aantal parameters en het grafisch voorstellen van de informatie tot inzicht kan leiden in de betekenis ervan (bijv. de indeling van gegevens in klassen bij een voorstelling op een rekenmachine of een computer kan beter begrepen worden als men zelf geconfronteerd wordt met het indelen van een reeks gegevens in zinvolle klassen). Toch zal men zich hierbij dan beperken tot relatief eenvoudig te verwerken reeksen, zodat het omslachtige rekenwerk het inzicht niet in de weg staat.

Naast het interpreteren van gegeven voorstellingen en informatie komt het *zelf verwerken van informatie* met behulp van statistische voorstellingsmiddelen aan bod. Belangrijk is dat het turven van gegevens hier niet het leeuwendeel van de tijd in beslag neemt (en daarom komt dit eigenhandig verwerken van informatie pas op de tweede plaats). Het opzetten van een beperkte bevraging in de klas of in de school en de statistische verwerking van de verzamelde gegevens als synthese kan een aantal belangrijke vaardigheden en attitudes ontwikkelen zoals samenwerken in groep, communicatie, planning, organisatie, hanteren van de wiskundetaal in alledaagse situaties, kritische analyse van de resultaten en de besluitvorming.

Voor het verwerken en voorstellen van statistische gegevens is heel wat software beschikbaar op de rekenmachine en de computer. Een *radicale keuze voor het gebruik* ervan, die het handmatig rekenwerk tot een strikt minimum beperkt, is aangewezen. Zo komt meer tijd vrij voor interpretatieactiviteiten.

In dit onderdeel komen een hele reeks nieuwe begrippen voor. Uiteraard moeten de leerlingen die kennen en kunnen verwoorden wat ze betekenen. Dit mag echter niet leiden tot een zinloos memoriseren van een lijst definities. Het hoofddoel is een functioneel gebruik van deze begrippen bij het interpreteren en verwerken van informatie.

		5	**Leerplandoelstellingen - Leerinhouden**	**Et**
S62		B	Verschillende soorten gegevens herkennen.	
S63		B	Aan de hand van voorbeelden het belang uitleggen van de representativiteit van een steekproef voor het formuleren van statistische besluiten over een populatie.	46
S64		B	In betekenisvolle situaties de begrippen absolute en de relatieve frequentie verwoorden en ze in concrete situaties bij een gegeven reeks individuele of gegroepeerde gegevens berekenen en interpreteren.	48
S65		B	Verschillende grafische voorstellingen gebruiken en interpreteren bij concrete statistische gegevens, als ze gegeven zijn door individuele of gegroepeerde gegevens.	50
S66		B	De betekenis van de begrippen gemiddelde en mediaan verwoorden.	49
S67		B	Centrummaten, m.n. gemiddelde en mediaan, bij een reeks gegroepeerde gegevens berekenen en interpreteren.	49

S68		B	De betekenis van de begrippen variantie, standaardafwijking en interkwartielafstand verwoorden.	49
S69		B	Spreidingsmaten, m.n. variantie, standaardafwijking en kwartielen, bij een reeks individuele of gegroepeerde gegevens berekenen en interpreteren.	49

5 Pedagogisch-didactische wenken

62 De leerlingen moeten geconfronteerd worden met allerlei materiaal dat statistisch verwerkt werd, bijv. uit kranten of tijdschriften, gegevens beschikbaar op informatiedragers zoals Internet, …. Aan de hand van goed gekozen voorbeelden moet, uiteraard op een elementair niveau, het onderscheid duidelijk worden tussen verschillende soorten van data (o.m. kwalitatieve of kwantitatieve gegevenstypes, meetbare of niet-meetbare gegevens). Zo moeten leerlingen bijvoorbeeld aanvoelen dat het niet bij elke reeks gegevens zinvol is een gemiddelde te berekenen (bijv bij een indeling in categorieën).

63 Bij het onderzoeken van concrete voorbeelden van statistische verwerking (bijv. in kranten- of tijdschriftenartikels) wordt aandacht besteed aan de omschrijving van de populatie, van de steekproef en de samenstelling van de steekproef en van de onderzoeksvraag.
Voorbeelden:

- Zal men de gemiddelde lengte van de Vlaamse bevolking onderzoeken als men zich beperkt tot een kleuterschool of tot het lokaal van de plaatselijke basketploeg?
- Als men wil nagaan wat de partijvoorkeur is van de inwoners van een bepaalde gemeente, doet men dan de waarnemingen in één willekeurige straat, aan een partijlokaal, op de marktdag, …?
- Bij een telefonische enquête sluit men personen zonder telefoon uit. Bij een schriftelijke enquête kan men geen rekening houden met enquêteformulieren die niet werden teruggestuurd.
- Het werken met een kleine steekproef heeft een invloed op de betrouwbaarheid van de conclusies.

Het heeft geen zin hier enkele voorbeelden te laten memoriseren. Het volstaat dat leerlingen aanvoelen dat ze met statistische gegevens voorzichtig moeten omgaan, en dat representativiteit belangrijk is. Leerlingen zouden zelf creatief naar eigen voorbeelden moeten zoeken om de problematiek van de representativiteit te illustreren.

64 Het ordenen van de gegevens gebeurt aan de hand van een frequentietabel. Hiervoor worden de begrippen *absolute frequentie, relatieve frequentie, cumulatieve frequentie* en *cumulatieve relatieve frequentie* ingevoerd.
Als het aantal gegevens te groot is, worden ze gegroepeerd in klassen. Het zijn niet de frequenties van de individuele gegevens die nu gebruikt worden, maar die van de klassen. Hierbij moeten termen aangebracht worden zoals klassenbreedte, klassenmidden. Om de betekenis van klassenbreedte mee te geven kan men bijv. bij eenzelfde reeks gegevens de klassenbreedte veranderen en de invloed op de voorstelling illustreren. Alleszins moeten de leerlingen ermee geconfronteerd worden dat samenvatten van informatie (bijv. bij het groeperen) verlies aan informatie betekent.
Eens de begrippen gevormd zal men niet te veel tijd besteden aan het manueel bepalen van frequenties. De beschikbare software laat toe deze geautomatiseerd te laten berekenen.

65 In de media worden gegevens vaak grafisch voorgesteld. Het is aangewezen dat de leerlingen een aantal frequent voorkomende grafische voorstellingen leren lezen en interpreteren.
Het interpreteren houdt ondermeer in dat men oog heeft voor de aard van de voorstelling, voor de schaalverdeling, de keuze van de oorsprong en eenheden, de keuze van de klassenbreedte, …, om daaruit de informatie die achter de gegevens ligt te ontdekken. Staafdiagram, strookdiagram en schijfdiagram zijn al aan bod gekomen in de eerste graad. Nieuwe mogelijke voorstellingen zijn stengel- en bladdiagram; histogram, frequentieveelhoek en ogief. (Noot: de laatste drie termen worden bij voorkeur gebruikt voor situaties waarin de gegevens als 'continu' verlopend kunnen worden aangezien bijv. bij gegroepeerde gegevens.) Bij het histogram en de frequentieveelhoek kan gewezen worden op de eigenschap dat de oppervlakte ervan gelijk wordt aan de steekproefgrootte.
Aan de hand van voorbeelden kunnen leerlingen ervaren dat misbruik kan gemaakt worden van voorstellingen met als gevolg verkeerde besluitvorming. Hier kunnen leerlingen leren valse van correcte informatie te onderscheiden. Dit is een van de mogelijkheden waarmee leerlingen moeten leren kritisch om te gaan met de aangeboden informatie.
De leerlingen kunnen aan de hand van een enquête of bevraging in de klas of de school zelf een aantal gegevens verzamelen, die zelf verwerken en zelf een aangepaste voorstelling ervan maken, bijv. met behulp van een rekenblad op een computer. Er zal evenwel over gewaakt worden dat, een dergelijk leerproces meer te maken heeft met het inzicht in de verwerking van statistische gegevens, dan met het uitturven van

een veelheid van gegevens. In die zin is het gebruik van de statistische functies, met inbegrip van de grafische mogelijkheden, van een rekenmachine of een computer hierbij ten zeerste aangewezen

66 Een verdere stap in het beschrijven van gegevens is het opzoeken van *parameters* die ze samenvatten. Op die manier kunnen onder meer reeksen gegevens met elkaar vergeleken worden. Een eerste reeks parameters zijn de *centrummaten*: gemiddelde en mediaan. Ze geven een waarde die ongeveer het midden van de gegevens aanduidt. Zonder een maat voor de spreiding betekenen ze niet veel. Daarom is het zinvol beide maten samen aan te brengen aan de hand van een aantal concrete voorbeelden. Daarna kunnen samenvattend de verschillende begrippen vastgelegd worden. Gemiddelde en mediaan zijn voor niet-gegroepeerde gegevens al aan bod gekomen in de eerste graad.
Aan de hand van concrete voorbeelden wordt hun betekenis en het praktische gebruik ervan verklaard.
Bij de formules in dit onderdeel kan het $\sum$-teken ingevoerd worden als handige en korte manier om een sommatie voor te stellen. Omdat leerlingen hiermee nog ruimer zullen geconfronteerd worden kunnen enkele verkennende oefeningen aangeboden worden om het gebruik ervan te versoepelen.

67 Omwille van het inzicht in de betekenis en de procedures is het zinvol het principe van de berekening aan te brengen en even in te oefenen. Voor de praktische berekeningen in opgaven en praktische problemen wordt de rekenmachine of de computer gebruikt.
Leerlingen moeten de beperktheid van de door centrummaten verkregen informatie leren inzien.
Voor gegroepeerde gegevens wordt voor mediaan een eenvoudige oplossing gekozen, bijv. het midden van de mediale klasse. De meer complexe oplossingen kunnen eventueel in de latere vorming van de leerlingen snel geassimileerd worden.

68 Statistische gegevens met dezelfde centrummaten kunnen grondig van elkaar verschillen door hun spreiding rond deze centrumgetallen. Daarover kunnen een tweede reeks parameters, de *spreidingsmaten*, informatie geven: m.n. variatiebreedte, variantie, standaardafwijking, interkwartielafstand en eventueel percentielen.
Aan de hand van concrete voorbeelden wordt hun betekenis en het praktische gebruik ervan verklaard.
Een voorstelling van gegevens die eerder nog niet ter sprake kon komen is de *boxplot*. Ze geeft een interessante indruk van de spreiding van de gegevens, omdat ze opgesteld wordt met gebruik van enkele van de hoger genoemde parameters, m.n. de mediaan, de variatiebreedte en de kwartielen.

69 Hier geldt een analoge opmerking aan deze van de centrummaten.

5.3 Tweede leerjaar

5.3.1 MEETKUNDE

4	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **meetkunde** worden ca. 38 lestijden besteed

de cirkel	ca. 12 lestijden
driehoeksmeting	ca. 12 lestijden
ruimtemeetkunde	ca. 14 lestijden

5	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **meetkunde** worden ca. 43 lestijden besteed

de cirkel	ca. 15 lestijden
driehoeksmeting	ca. 12 lestijden
ruimtemeetkunde	ca. 16 lestijden

4 & 5	Pedagogisch-didactische wenken

In dit deel meetkunde blijft de essentie het *onderzoeken* van meetkundige figuren en hun eigenschappen. Toch kan verwacht worden dat het zoeken van leerlingen hier ondersteund moet worden door een leergesprek. Dat mag evenwel niet leiden tot het uitschakelen van het eigen zoeken van de leerlingen. Want dat is een belangrijke troef in hun verdere studie- en beroepsloopbaan die nu moet ontwikkeld worden, al verloopt dat misschien moeizaam.

Het verdient aanbeveling gebruik te maken van een grafische rekenmachine of software die de analyse van meetkundige figuren toelaat. De vraag daarbij is vaak: waarom gebeurt wat we zien op het scherm op deze wijze. De leerlingen moeten begrijpen wat er gebeurt en dat argumenteren met eigenschappen.

Voor het toepassen van de eigenschappen moet zowel gezocht worden in het vlak als in de ruimte.

De basisdoelstellingen (A24, A25) over de cirkel uit het onderdeel Analytische meetkunde worden hier geïntegreerd aangebracht.

5	Pedagogisch-didactische wenken

De meetkunde dient zo opgebouwd te worden dat de leerlingen *zelf* een grote inbreng hebben in het *onderzoeken* van meetkundige figuren en hun eigenschappen, het formuleren van vermoedens en verklaringen.

De leerinhouden van meetkunde bieden de leerlingen de kans om vertrouwd te worden met een belangrijke methode uit de meetkunde (en de analytische meetkunde), m.n. het bepalen van een *meetkundige plaats* van punten. Dat wil zeggen, een verzameling van punten bepalen die aan een bepaalde voorwaarde voldoen. De leerlingen kennen al een aantal dergelijke situaties, zoals de bissectrice van een hoek of de middelloodlijn van een lijnstuk. Ook de cirkel biedt deze mogelijkheid (bijv. als de verzameling van de punten waaronder een lijnstuk onder een rechte hoek wordt gezien). In de oefeningen zullen enkele eenvoudige voorbeelden aan bod kunnen komen, bijvoorbeeld de meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels met gegeven straal en rakend aan een gegeven rechte, of aan een gegeven cirkel, van de middelpunten van de cirkels met gegeven straal die door een gegeven punt gaan, van de middens van de lijnstukken als de uiteinden glijden over twee loodrechte rechten. Deze oefeningen bieden meteen een gelegenheid om de leerlingen te wijzen op een inzicht als ‘nodige en voldoende voorwaarden’.

Het verdient aanbeveling gebruik te maken van een grafische rekenmachine of software die de analyse van meetkundige figuren toelaat. De vraag daarbij is vaak: waarom gebeurt wat we zien op het scherm op deze wijze. De leerlingen moeten begrijpen wat er gebeurt en er een verklaring of een bewijs voor geven. Zoals voordien, zal er aandacht besteed worden aan de vorm waarin deze ‘bewijzen’ gegeven worden.

De nieuwe meetkundekennis zal ontwikkeld worden in samenhang met het kennisbestand dat in de voorgaande jaren is opgebouwd. De mate waarin leerlingen deze redeneer- en ordeningsvaardigheden beheersen zijn aanwijzingen in het keuzeproces van de leerlingen naar de derde graad toe.

Met het onderdeel cirkel wordt voor de meeste leerlingen het onderdeel (vlakke) meetkunde afgerond. Uiteraard wordt de meetkundekennis uit vorige leerjaren (bijv. congruentie, gelijkvormigheid, Pythagoras) geïntegreerd bij de verwerking van dit onderdeel. Voor het toepassen van de eigenschappen moet zowel gezocht worden in het vlak als in de ruimte.

In dit leerjaar bevat het leerplan een onderdeel Analytische meetkunde. Er kan voor gekozen worden de synthetische en de analytische behandeling te integreren (bijv. de vergelijking van de cirkel). In het bijzonder zal aandacht besteed worden aan oefeningen waarin leerlingen voor de keuze gesteld worden het probleem analytisch of synthetisch op te lossen. Een kritische bespreking van de oplossingsmethoden kan leerlingen gevoelig maken voor de voor- en nadelen van beide methoden.

1 De cirkel

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
M1	B	B	Bewijzen dat door drie niet-collineaire punten juist één cirkel gaat.	37
M2	B	B	Eigenschappen in verband met apothema, straal en koorde onderzoeken, bewijzen en gebruiken.	37
M3	B	B	De onderlinge ligging van een cirkel en een rechte onderzoeken en de definitie van raaklijn formuleren.	37
M4	–	B	De onderlinge ligging van twee cirkels onderzoeken.	
M5	B	B	Eigenschappen in verband met middelpuntshoeken en omtrekshoeken onderzoeken, bewijzen en gebruiken.	37
M6	B	B	Meetkundige constructies verklaren en uitvoeren, zoals - de raaklijn in een punt van een cirkel; - de raaklijnen uit een punt aan een cirkel; - de ingeschreven cirkel van een driehoek; - de omgeschreven cirkel van een driehoek.	37
M7	–	B	Eigenschappen van regelmatige veelhoeken onderzoeken.	

4 & 5	Pedagogisch-didactische wenken
1	De cirkel als vlakke figuur is al langer door de leerlingen gekend. Toch bleef die kennis eerder passief, d.w.z. als 'een gebruik maken van'. Nu kan de cirkel als figuur met de rijkste symmetrie grondiger behandeld worden.
2	De leerlingen zijn vanuit hun vooropleiding vertrouwd met het zelf onderzoeken van eigenschappen. De eigenschappen die hier bedoeld worden zijn relatief eenvoudig en kunnen door middel van een goede didactische aanpak hoofdzakelijk via zelf onderzoeken gevonden en verklaard worden. Die verklaring kan eventueel in een leergesprek ontwikkeld worden. Eigenschappen die in aanmerking komen zijn onder meer: middelloodlijn van een koorde en omgekeerd, verband lengte apothema's en koorden, middellijn en symmetrie.
3	Het vergelijken van de afstand van het middelpunt van een cirkel tot een rechte en de straal van die cirkel leidt tot informatie over de onderlinge ligging van een rechte en een cirkel. Dat onderzoek leidt tot het begrip raaklijn aan de cirkel. Het begrip 'raken' komt hier voor het eerst specifiek aan bod. Omdat dit een belangrijk wiskundig begrip is, waarmee leerlingen nog meermaals geconfronteerd zullen worden, moeten de 'kenmerkende eigenschappen' onderzocht en geformuleerd worden.
5	De relatie tussen een middelpuntshoek en een omtrekshoek op eenzelfde koorde (of boog) kan onderzocht

	en verklaard worden. De toepassingen zullen in de eerste plaats gericht zijn op een praktisch gebruik van de eigenschappen in constructies (de middelevenredige) en berekeningen van hoeken (bijv. een omtrekshoek op een middellijn).
6	De constructies van cirkels die aan gegeven voorwaarden voldoen en van raaklijnen aan cirkels moeten tegelijk teken- en denkproblemen zijn. De leerlingen moeten daarbij een verklaring geven over de gebruikte technieken en procedures en waarom die een antwoord bieden op de gestelde problematiek. De constructie van de ingeschreven cirkel en de omgeschreven cirkel van een driehoek is een aanleiding om de eigenschappen van het snijden in één punt van respectievelijk de bissectrices en de middelloodlijnen van een driehoek aan te tonen.

5	Pedagogisch-didactische wenken
3	Aan het begrip raaklijn in een punt van een cirkel kan het begrip normaal gekoppeld worden.
5	*Uitbreiding* Als toepassing kunnen omtrekshoeken bepaald worden waarbij een been raaklijn is aan de cirkel. Andere toepassingen zijn de bespreking van de begrippen binnen- en buitenomtrekshoek, de berekening van hun grootte in functie van middelpuntshoeken en de verklarende eigenschap van het begrip ‘macht van een punt t.o.v. een cirkel’.
6	*Uitbreiding* Bijkomende constructies als redeneerproblemen zijn bijvoorbeeld de gemeenschappelijke raaklijnen aan twee cirkels, een rechthoekige driehoek waarvan een scherpe hoek en de straal van de ingeschreven cirkel gegeven zijn en de cirkel door twee gegeven punten en rakend aan een gegeven rechte. Een aantal constructies die aansluiten bij het gebruik van begrippen en eigenschappen in verband met cirkels zijn bijvoorbeeld de cirkel met gegeven straal en middelpunt die van een rechte een koorde afsnijdt met een gegeven lengte, een rechthoekige driehoek waarvan een rechthoekszijde en de hoogte op de schuine zijde gegeven zijn.
7	Met behulp van eigenschappen in een cirkel, het verband tussen middelpuntshoeken en koorden, de stelling van Pythagoras, vierkantswortels en de driehoeksmeting worden enkele voorbeelden behandeld van regelmatige veelhoeken, met o.m. de berekening van de zijde in functie van de straal van de omgeschreven cirkel. Als toepassing kan de omtrek en de oppervlakte van een regelmatige veelhoek berekend worden. Uit de vergelijking met de omtrek of de oppervlakte van de cirkel kan een benadering afgeleid worden voor het reëel getal π. Het gebruik van een rekenmachine (eventueel met de mogelijkheid om tabellen op te stellen) ligt hierbij voor de hand.

2 Driehoeksmeting

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
M8	B	B	De goniometrische getallen van een hoek definiëren in een goniometrische cirkel.	
M9	B	B	De verbanden tussen de goniometrische getallen van complementaire en supplementaire hoeken formuleren en verklaren.	
M10	B	B	De sinusregel en de cosinusregel opstellen voor willekeurige driehoeken.	
M11	B	B	De sinusregel en cosinusregel toepassen bij het oplossen van vraagstukken.	39

4 & 5	Pedagogisch-didactische wenken
8	De sinus en cosinus zijn in het eerste jaar van de tweede graad beperkt gedefinieerd, m.n. voor scherpe hoeken. Die definities moeten uitgebreid worden. De sinus en de cosinus van een stompe hoek worden vastgelegd met behulp van de coördinaatgetallen van zijn beeldpunt op de goniometrische cirkel.

Het aflezen en het interpreteren van de uitlezing bij het gebruik van een rekenmachine moet voldoende aandacht krijgen. Het een-eenduidig verband tussen goniometrisch getal en hoek gaat hier immers verloren (zie M9).
Op basis van de definities en meetkundige eigenschappen (bijv. Pythagoras, gelijkvormige driehoeken) kunnen de betrekkingen tussen de goniometrische getallen van eenzelfde hoek, die in het eerste leerjaar van de tweede graad werden afgeleid, veralgemeend worden en/of uitgebreid.

9 Uitgaande van de betekenis van de sinus en de cosinus op de goniometrische cirkel en op basis van meetkundige eigenschappen (bijv. van spiegelingen t.o.v. de coördinaatassen en hun invloed op de coördinaten) kunnen de relaties tussen de goniometrische getallen van complementaire hoeken en supplementaire hoeken afgeleid worden. Belangrijk hierbij is dat de goniometrische cirkel functioneert als hulpmiddel voor het terugvinden van de betrekkingen, al zal die zijn volledige betekenis en zin maar krijgen in de derde graad (vandaar dat een beperkte aanpak hier mogelijk is). Deze formules kunnen ondersteunend werken bij het terugzoeken met behulp van een rekenmachine van een hoek uitgaande van gegeven goniometrische getallen.
Het is daarentegen niet de bedoeling het herleiden tot een hoek van het eerste kwadrant als afzonderlijke standaardprocedure en los van enige realiteitszin in te oefenen.

10 De leerlingen moeten beide formules kunnen opstellen en bewijzen aan de hand van eigenschappen.
Uitbreiding
De verhouding uit de sinusregel kan berekend worden in functie van de straal van de omgeschreven cirkel.

11 Bij het oplossen van vraagstukken in een driehoek zal aandacht besteed worden aan ruimtelijk gesitueerde problemen (zie M15).

5 Pedagogisch-didactische wenken

11 De wijze van aanbreng en verwerving van de driehoeksmeting in een willekeurige driehoek kan volledig gelijk lopen tussen de verschillende leerwegen. Toch worden bij het toepassen kansen geboden om wat moeilijkere, maar toch haalbare problemen aan te reiken. Ze moeten de vorming van probleemoplossende vaardigheden extra stimuleren. Mogelijkheden worden bijvoorbeeld geboden bij het berekenen van de oppervlakte van een veelhoek, de formule van Heron voor een driehoek, de afstand tussen twee punten in een niet-rechthoekig assenstelsel (met gelijke eenheden op de assen).

3 Ruimtemeetkunde

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
M12	B	B	In concrete ruimtelijke situaties de onderlinge ligging – van twee rechten (i.h.b. het evenwijdig, loodrecht, snijdend of kruisend zijn), – van een rechte en een vlak – en van twee vlakken onderzoeken en ruimtelijk voorstellen.	39 45
M13	B	B	Eigenschappen over de ligging van rechten en vlakken in de ruimte onderzoeken en formuleren.	39 45
M14	B	B	Met voorbeelden illustreren dat informatie verloren gaat bij het voorstellen in twee dimensies van een driedimensionale situatie.	42
M15	U	B	In concrete situaties op een gegeven ruimtelijke voorstelling de doorsnede bepalen van een veelvlak met een vlak.	
M16	B	B	Eenvoudige problemen oplossen in verband met ruimtelijke situaties door gebruik te maken van eigenschappen van vlakke figuren.	41

4 & 5	**Pedagogisch-didactische wenken**

Het hoofddoel van het onderdeel ruimtemeetkunde blijft het ontwikkelen van ruimtelijk inzicht. Dit wordt niet bereikt door een aantal theoretische beschouwingen, maar vooral door actief ruimtelijke (probleem)-situaties te onderzoeken, vermoedens te formuleren en ze te toetsen en te verklaren. De klemtoon op het actief onderzoeken door de leerlingen houdt in dat er nog altijd vrij intuïtief kan gewerkt worden.

12 In de eerste graad werden allerlei ruimtefiguren onderzocht en voorgesteld in twee dimensies. Daarbij werden de begrippen omtrent de onderlinge ligging van rechten en vlakken vrij intuïtief gehanteerd zonder ze te expliciteren. Nu wordt dit wat systematischer aangepakt. Begrippen zoals evenwijdigheid, snijden, kruisen en loodrechte stand worden hanteerbaar omschreven voor rechten en vlakken onderling en voor een rechte en een vlak. Daarbij wordt best uitgegaan van onderzoeksactiviteiten op concrete ruimtefiguren, zoals balk, kubus en de voorstelling ervan. Zo kunnen bijvoorbeeld aan bod komen: de onderlinge ligging van grond- en bovenvlak, van zijvlakken van kubus en balk, van snijlijnen van grond- en bovenvlak met een zijvlak, van rechten in twee vlakken waarvan de onderlinge ligging gekend is, van rechten en/of vlakken die bepaald worden door ribben en/of punten op ribben, ….

Een aantal problemen wordt bij het tekenen opgelost door bijvoorbeeld lijnconventies in te voeren (cf. zichtbare en onzichtbare delen). Hier kan geïllustreerd worden dat afhankelijk van de perspectivische voorstelling andere conventies gelden en andere voorstellingsproblemen voorkomen.

Het verwerven van deze doelstelling en van M14 kan geïntegreerd worden.

13 De bedoeling is een aantal elementaire eigenschappen te verwerven die inzicht moeten geven in de ligging van rechten en vlakken ten opzichte van elkaar. Deze eigenschappen kunnen gebruikt worden bij het onderzoeken van ruimtefiguren (bijv. welke consequenties heeft het evenwijdig zijn van grondvlak en bovenvlak van een ruimtefiguur op de snijlijnen met de zijvlakken). Vandaar dat het zinvol is deze eigenschappen zelf in concrete ruimtelijke situaties te ontwikkelen. Zo kunnen een aantal eigenschappen ontdekt worden door de doorsnede van een kubus of een balk met een vlak te onderzoeken.

Bij het aanbrengen van eigenschappen zal aandacht besteed worden aan een duidelijke verwoording, aan een adequate voorstelling ervan zowel in een ruimtelijke situatie als op een tekening en aan het gebruik ervan in toepassingen.

Zoals voor de vlakke meetkunde kunnen een aantal van de onderzochte eigenschappen opgenomen worden in een gereedschapskist voor de ruimtemeetkunde. Die kan bijvoorbeeld gebruikt worden bij het oplossen van nieuwe problemen of om constructies en redeneringen te verklaren. Zij vormt ook de onderbouw voor het werkkader dat in de derde graad aan bod zal komen. (Voor een overzicht van eigenschappen die mogelijk aan bod kunnen komen, zie deel 4 Gereedschapskist.)

Voor de *loodrechte stand* van rechten, van een rechte en een vlak en van vlakken, die hier voor het eerst aan bod komen, kan het intuïtieve inzicht geëxpliciteerd worden in een aantal elementaire eigenschappen. Hier zal aandacht besteed worden aan een duidelijke verwoording, aan een adequate voorstelling ervan zowel in een ruimtelijke situatie als op een tekening en aan het gebruik van de eigenschappen in toepassingen.

14 Al in de eerste graad werd deze doelstelling nagestreefd door observatie van een aantal ruimtelijke situaties. Het bleef beperkt tot vaststellen en interpreteren van wat concreet werd vastgesteld bij het manipuleren van of het voorstellen van ruimtefiguren of bij het interpreteren van tekeningen. Veelal werden de leeractiviteiten gekoppeld aan concrete observatieoefeningen van concrete voorwerpen en situaties.

Ook nu is het niet de bedoeling een systematische theoretische studie van dergelijke situaties te maken. Wel zal op dezelfde wijze als in de eerste graad bij het concreet voorstellen en/of lezen van voorstellingen aandacht besteed worden aan wat gezien wordt en aan het eventueel onderscheid tussen de voorstelling en de werkelijkheid, of het onderscheid tussen verschillende voorstellingen van eenzelfde situatie. Wel zal nu gestreefd worden naar een meer mentale observatie.

Karakteristieken die aan bod kunnen komen zijn: evenwijdigheid, snijden en kruisen van rechten (bijv. ribben van een ruimtefiguur), lengte van lijnstukken en grootte van hoeken (bijv. ribben van een ruimtefiguur), met o.a. de loodrechte stand, gelijkheid van lengten en hoeken, grootte en vorm van figuren (bijv. zijvlakken van een ruimtefiguur).

15 *Uitbreiding*

Het maken van een doorsnede van een vlak met een kubus of een balk laat toe een aantal redeneeroefeningen te maken en de hoger genoemde eigenschappen te gebruiken.

In de aanvangsfase kan best uitgegaan worden van een reële waarneming op concrete ruimtefiguren en van relatief eenvoudige snijvlakken. Het doel is immers niet ingewikkelde doorsneden te maken, maar de zinvolheid van eigenschappen te laten ervaren in redeneringen op ruimtelijke situaties. Het vlak bepaald door een (gekleurde) vloeistof in een doorschijnend model van een kubus of een balk kan het inzicht in de lig-

ging en de vorm van een doorsnede ondersteunen.
Een ander didactisch hulpmiddel wordt geboden door software om ruimtefiguren te tekenen en doorsneden te bepalen. De leerlingen krijgen snel respons op hun werkwijze, eventuele fouten en kunnen ze zo snel bijsturen.

16 De leerlingen beschikken nu over een ruime kennis van eigenschappen uit de vlakke meetkunde en de driehoeksmeting. Ze kunnen hier toegepast worden op problemen in ruimtelijke situaties. Het is daarbij zinvol telkens voldoende aandacht te besteden aan het zichtbaar maken van de vlakke situatie waarin de eigenschappen worden toegepast (bijv. op een ruimtefiguur, op een tekening; zo bijvoorbeeld hoeft een gelijkzijdige driehoek helemaal niet als gelijkzijdig voorgesteld te worden in een tekening). Op zich versterkt dit al het ruimtelijk inzicht en het ruimtelijk voorstellingsvermogen.
Problemen die aan bod kunnen komen zijn: toepassingen van eigenschappen van evenwijdige rechten, van gelijkvormige driehoeken (evenwijdige snijvlakken in een driezijdige piramide), de stelling van Pythagoras, vorm en oppervlakte van een doorsnede van een kubus of balk met een vlak, de hoek gevormd door snijdende rechten die de hoekpunten van een balk verbinden, de lengte van een bepaalde route afgelegd op een ruimtefiguur.

4 Pedagogisch-didactische wenken

Ruimtelijk inzicht is voor een aantal leerlingen een probleem. Het heeft weinig zin moeilijke problemen aan te pakken als niet een elementair voorstellingsvermogen voorhanden is. En dat wordt niet verworven door abstracte redeneringen over ruimtelijke situaties. Daarom zal het leerproces voldoende moeten ondersteund worden door het gebruik van concreet materiaal, door concrete observatie van situaties en veel tekenwerk.

5 Pedagogisch-didactische wenken

13 In het kader van het ontwikkelen van redeneervaardigheden kunnen een aantal eigenschappen ook bewezen worden. Hierbij wordt lokaal deductief gewerkt, d.w.z. dat men werkt tegen de achtergrond van een aantal aanvaarde grondeigenschappen, die uit het intuïtieve leerproces van de voorbije jaren kunnen gesynthetiseerd worden, bijv. bij de aanvang van dit onderdeel ruimtemeetkunde. Voor de leerlingen moet het onderscheid duidelijk worden tussen een bewijs en een veralgemening door een onderzoeksopdracht, gevolgd van het aanvaarden van de eigenschap. Beide werkwijzen kunnen naast elkaar blijven functioneren. Zo kan men de (nieuwere) eigenschappen over loodrechte stand van rechten en vlakken vooral ‘onderzoekend veralgemenen’, waar men de eigenschappen over evenwijdigheid van rechten en vlakken voor bewijzen kan gebruiken.

15 Het maken van een doorsnede van een vlak met een ruimtelijke figuur laat toe een aantal redeneeroefeningen te maken en de hoger genoemde eigenschappen te gebruiken.
In de aanvangsfase kan best uitgegaan worden van een reële waarneming op en kubus en een balk en van relatief eenvoudige snijvlakken. Het vlak bepaald door een (gekleurde) vloeistof in een doorschijnend model van een kubus of een balk kan het inzicht in de ligging en de vorm van een doorsnede ondersteunen.
Daarna kan de methodiek uitgebreid worden tot andere ruimtefiguren zoals prisma en piramide.
Het doel is niet ingewikkelde doorsneden maken, maar de zinvolheid van eigenschappen laten ervaren in redeneringen op ruimtelijke situaties. Een deelprobleem dat aan bod moet komen is het bepalen van het snijpunt van een rechte met een vlak.
Een ander didactisch hulpmiddel wordt geboden door software om ruimtefiguren te tekenen en doorsneden te bepalen. De leerlingen krijgen snel respons op hun werkwijze, eventuele fouten en kunnen ze zo snel bijsturen.

16 Meer concrete problemen zijn de verhouding van beeld en origineel bij een fototoestel in functie van de afstand tot de camera, de verhouding van de oppervlakte van een schijfje en zijn schaduw in functie van de afstand tot de lichtbron (weliswaar bij een bijzondere keuze van het projectiecentrum en het projectievlak), de omtrek van een breedtecirkel als de aardstraal gegeven is, de snelheid van een geostationaire satelliet, de bereikbaarheid van een antenne voor signalen van een satelliet, …

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen moeten vanuit de tweede graad beschikken over een verzameling meetkundige eigenschappen, die vlot kunnen toegepast worden bij het onderzoeken van meetkundige situaties, het verklaren van eigenschappen, het oplossen van meetkundige problemen. Een vlotte en soepele verwoording ervan en een duidelijke visuele ondersteuning kunnen de toepasbaarheid vergroten. Ze moeten een duidelijk en hanteerbaar kader vormen, waarop de leerling kan terugvallen. Dit betekent *niet* dat de leerlingen dergelijke overzichten moeten *memoriseren!* Het overzicht moet wel *beschikbaar* zijn. Dat kan bijvoorbeeld in de vorm van een *'vademecum'*. Zo'n lijst kan geleidelijk (gespreid over de verschillende leerjaren) en samen met de leerlingen worden opgebouwd (bijv. nadat een eigenschap ontdekt en onderzocht is, kan ze al of niet toegevoegd worden aan de lijst; de leerlingen kunnen het aanvullen van zo'n lijst als een synthesetaak krijgen na een hoofdstuk). Als voorbeeld worden in het volgend overzicht een aantal eigenschappen opgesomd die kunnen worden opgenomen in zo'n vademecum. (Een aantal van deze eigenschappen zijn overigens al verworven in de vorige leerjaren en moeten hier niet noodzakelijk opnieuw als eigenschap 'bestudeerd' worden.)

Vlakke meetkunde

Eigenschappen over de lengten van de zijden en de grootte van de hoeken van driehoeken en vierhoeken.
Eigenschappen over de diagonalen van vierhoeken.
Eigenschappen over de hoeken bij een snijlijn van evenwijdige rechten.

De eigenschappen van de middelloodlijn van een lijnstuk en van de bissectrice van een hoek en hun omgekeerde.
In een driehoek gaan de zwaartelijnen, de middelloodlijnen, de hoogtelijnen, de deellijnen door één punt.
Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijn in twee stukken die zich verhouden als twee tot één.
De driehoeksongelijkheid tussen de zijden van een driehoek.
    In elke driehoek is elke zijde langer dan het verschil van de twee andere, maar korter dan hun som.
Eigenschappen van de merkwaardige lijnen in een driehoek, in een gelijkbenige driehoek en in een gelijkzijdige driehoek.
Eigenschappen van (invariantie bij) een verschuiving, een puntspiegeling, een spiegeling , een draaiing.

De congruentiekenmerken van driehoeken.
De gelijkvormigheidskenmerken voor driehoeken.
De stelling van Thales en haar omgekeerde.
De stelling van Pythagoras en haar omgekeerde.
De eigenschap van de middenparallel van een driehoek.
De metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek.
    In een rechthoekige driehoek is de hoogtelijn middelevenredig tussen de stukken waarin ze de schuine zijde verdeelt.
    In een rechthoekige driehoek is elke rechthoekzijde middelevenredig tussen de schuine zijde en haar loodrechte projectie op de schuine zijde.

Eigenschappen over de relaties in een cirkel tussen koorden, hun middelloodlijn, apothema's en straal.
Eigenschappen over de raaklijnen (aan een cirkel) uit een punt buiten de cirkel.
Eigenschappen van middelpunts- en omtrekshoeken, en hun onderlinge relaties.

Ruimtemeetkunde

Een vlak wordt bepaald door drie niet-collineaire punten; twee snijdende rechten; twee niet-samenvallende evenwijdige rechten en een rechte en een punt buiten die rechte.
Als een rechte twee punten gemeen heeft met een vlak, dan ligt die rechte in dat vlak.
Verschillende rechten zijn of snijdend, of evenwijdig, of kruisend.

Als twee rechten evenwijdig zijn met eenzelfde derde, dan zijn ze ook onderling evenwijdig.
Als een rechte evenwijdig is met een vlak, dan ligt de rechte die door een punt van dat vlak gaat en evenwijdig is met de gegevens rechte volledig in dat vlak.
Als een rechte evenwijdig is met twee snijdende vlakken dan is ze evenwijdig met hun snijlijn.

Als twee snijdende rechten van een vlak evenwijdig zijn met een ander vlak, dan zijn beide vlakken evenwijdig.
Als twee vlakken evenwijdig zijn met eenzelfde derde vlak dan zijn ze ook onderling evenwijdig.
Als een vlak twee evenwijdige vlakken snijdt, dan zijn de snijlijnen evenwijdig.
Als een vlak één van twee evenwijdige rechten snijdt, dan snijdt dit vlak ook de andere rechte.
Als een vlak één van twee evenwijdige vlakken snijdt, dan snijdt het ook het andere vlak en de snijlijnen zijn evenwijdig.

Een rechte staat loodrecht op een vlak als ze loodrecht staat op twee snijdende rechten van dat vlak.

Belangrijk is dat deze lijst van eigenschappen geen steriel overzicht is van een aantal geziene en/of bewezen eigenschappen. De lijst moet vooral gemakkelijk hanteerbaar zijn in nieuwe situaties. Daarom is een ordening op basis van *bruikbaarheid* een zinvolle ordening. Een dergelijke opvatting en ordening van de gekende eigenschappen zal de leerlingen meer hulp bieden bij het zelfstandig exploreren van meetkunde.

5 Pedagogisch-didactische wenken

Van leerlingen, die wiskunde volgen op basis van vijf wekelijkse lestijden, kan verwacht worden dat ze een aantal van deze eigenschappen hebben uitgediept. Dat betekent bijvoorbeeld dat ze elementen uit het onderzoeksproces kunnen bespreken (al of niet geleid, al of niet met behulp van ICT-hulpmiddelen), dat ze beseffen dat een bepaalde eigenschap als basiseigenschap werd aanvaard of dat ze werd verklaard door het verband te leggen met andere eigenschappen.

5.3.2 ANALYTISCHE MEEKUNDE

4	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **analytische meetkunde** worden ca. 3 lestijden besteed

de cirkel	ca. 3 lestijden

5	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **analytische meetkunde** worden ca. 20 lestijden besteed

loodrechte stand	ca. 10 lestijden
de cirkel	ca. 6 lestijden
problemen analytisch oplossen	ca 4 lestijden

4	Pedagogisch-didactische wenken

De analytische meetkunde wordt hier beperkt tot de vergelijking van de cirkel. Daarom kan dit onderdeel best geïntegreerd worden in de studie van de cirkel in de synthetische meetkunde.

5	Pedagogisch-didactische wenken

Een aantal meetkundige problemen kan opgelost worden met behulp van analytische middelen. Bepaalde problemen en eigenschappen uit de vorige jaren komen hier terug aan bod, maar in een gewijzigde optiek: bijv. het opstellen van een vergelijking van de loodlijn op een gegeven rechte vanuit een gegeven punt, de onderlinge afstand van rechten en cirkels met behulp van hun vergelijkingen, het opstellen van een vergelijking van merkwaardige lijnen in een driehoek (en het bepalen van hun snijpunt). Belangrijk is dat de analytische methode een volwaardig alternatief wordt naast andere (bewijs)methodes uit de meetkunde. Dit is een argument om beide methoden te integreren, bijv. bij de behandeling van de cirkel.

In dit stadium moet heel wat tijd besteed worden aan het verwerven van het inzicht in een analytische werkwijze en een zekere vaardigheid in het manueel toepassen ervan. Er zal voldoende aandacht besteed worden aan het analyseren van probleemstellingen en aan het afwegen of het probleem synthetisch of analytisch opgelost zal worden. Als men beschikt over een grafische rekenmachine of software met meetkundige toepassingen kan die ingeschakeld worden om de probleemstelling te onderzoeken of te illustreren en om de resultaten te controleren.

De analytische studie van de cirkel biedt de mogelijkheid om enkele eigenschappen te hernemen, om zo de voor- en de nadelen van de analytische methode te illustreren. In de toepassingen kunnen enkele andere onderdelen ingebracht worden, bijv. vierkantswortels, kwadratische vergelijkingen, oppervlakte en omtrek van de cirkel, het bepalen van een meetkundige plaats van punten, ….

1 Loodrechte stand

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
A17	–	U	Het scalair product van twee vectoren analytisch vertolken.	
A18	–	U	De orthogonaliteit van twee vectoren uitdrukken door middel van het scalair product.	
A19	–	B	De voorwaarde voor de loodrechte stand van twee rechten opstellen en gebruiken in toepassingen.	
A20	–	B	Een vergelijking van de loodlijn uit een punt op een rechte opstellen en gebruiken in toepassingen.	

A21	–	B	De afstand berekenen van een punt tot een rechte.	
A22	–	B	Vergelijkingen opstellen van de bissectrices van een rechtenpaar.	

5	**Pedagogisch-didactische wenken**

17 *Uitbreiding*
Het vectorbegrip werd ingeleid in het eerste leerjaar van de tweede graad. Hier kan daaraan een vervolg gegeven worden met de bespreking van het begrip *scalair product*. Het kan gebruikt worden bij de beschrijving van het begrip *orthogonaliteit*.
Een meetkundige definitie van het scalair product van twee vectoren maakt gebruik van afstanden en hoeken. Een uitgangspunt kan hier de correctieterm zijn in de cosinusregel, als men die vergelijkt met de stelling van Pythagoras. De tegenvoorbeelden die bij de stelling van Pythagoras zijn besproken, kunnen nu opnieuw ter sprake komen en geïnterpreteerd.

19 De voorwaarde voor de loodrechte stand van twee rechten kan op verschillende wijzen opgesteld worden, bijvoorbeeld door gebruik te maken van de driehoeksmeting, van gelijkvormige driehoeken (middelevenredige), van de stelling van Pythagoras of van het scalair product.

20 Een aantal problemen uit de meetkunde kan analytisch aangepakt worden, bijv. de concurrentie van de hoogtelijnen en de middelloodlijnen van een driehoek.

21 De afstand van een punt tot een rechte werd in de eerste graad al ingevoerd. Met de vergelijking van de loodlijn op een rechte door een punt beschikken de leerlingen over het ontbrekend middel om die afstand analytisch te berekenen. De leerlingen kunnen deze formule dus zelf opstellen, al valt te verwachten dat de rekenprocedure wat moeizaam zal verlopen.
Mogelijke toepassingen zijn: de normaalvergelijking van een rechte opstellen, een vergelijking opstellen van de bissectrices van een rechtenpaar (A23) of een parabool interpreteren als meetkundige plaats van punten.

2 De cirkel

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
A23	B	B	Een vergelijking opstellen van een cirkel met gegeven middelpunt en straal.	
A24	B	B	Het middelpunt en de straal bepalen van een cirkel waarvan een vergelijking gegeven is.	
A25	–	B	Een vergelijking opstellen van de raaklijn in een punt van een cirkel.	
A26	–	U	Een vergelijking opstellen van de raaklijn(en) uit een punt aan een cirkel.	
A27	–	U	De snijpunten bepalen – van een cirkel en een rechte; – van twee cirkels.	

4	**Pedagogisch-didactische wenken**

23 De analytische behandeling van de cirkel wordt best gekoppeld aan de synthetische.
De leerlingen kennen de definitie van de cirkel en beschikken met de formule voor de afstand tussen twee punten over voldoende kennis om de vergelijking zelf in het algemeen te kunnen afleiden.
Een andere mogelijkheid is zich in een eerste stap te beperken tot cirkels met de oorsprong als middelpunt. Daarna kan de verschuiving volgens de richting van de coördinaatassen ingebracht worden. Dit biedt de mogelijkheid de relatie tussen verschuiving en coördinaten te gebruiken, die in de eerste graad als toepassing aan bod gekomen is.

5	Pedagogisch-didactische wenken

23 De leerlingen kennen de definitie van de cirkel en beschikken met de formule voor de afstand tussen twee punten over voldoende kennis om de vergelijking in zijn algemene vorm te kunnen afleiden.
Een andere mogelijkheid is eerst de vergelijking op te stellen van cirkels met de oorsprong als middelpunt. Daarna kan de verschuiving volgens de richting van de coördinaatassen ingebracht worden. Dit biedt de mogelijkheid de relatie tussen verschuiving en coördinaten te gebruiken, die in de eerste graad als toepassing aan bod gekomen is.

25 Een vergelijking opstellen van de raaklijn in een punt van een cirkel kan op verschillende wijzen (loodlijn op de middellijn door het punt, rechte door dat punt met juist een snijpunt met de cirkel). De leerlingen kunnen hier het plezier ervaren van het spelen met wiskundige mogelijkheden.

26 *Uitbreiding*
Hier bestaat de mogelijkheid om leerlingen vertrouwd te maken met de methode van onbepaalde coëfficiënten. Ze moeten gebruik maken van heel wat van hun algebraïsche kennis: stelsels, substitutie, vierkantsvergelijking, bespreking van parameters. Meteen wordt stelsels oplossen nog sterker verbonden met het grafisch inzicht van het bepalen van snijpunten. Er komen ingewikkelder stelsels aan bod dan deze met twee eerstegraadsvergelijkingen.

3 Problemen analytisch oplossen

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
A28	–	B	Meetkundige problemen in verband met afstand, loodrechte stand en cirkels analytisch oplossen.	

5	Pedagogisch-didactische wenken

28 Zoals in het derde jaar zullen als toepassing een aantal problemen analytisch aangepakt worden met gebruik van de vergelijkingen van loodlijn en van cirkel. De aandacht voor een goede keuze van het assenstelsel blijft ook nu belangrijk. Ook nu is de voorzichtige weg van geleidelijkheid aangewezen.
Zoals eerder kan ook exemplarisch getoond worden dat de analytische aanpak in bepaalde situaties voordelen biedt, maar dat soms ook precies het tegenovergestelde geldt. Vandaar dat de leerlingen moeten leren hun methodiek te kiezen in functie van een probleem. Dit is echter een ervaring die maar zeer langzaam groeit vanuit vele oefeningen. Zo kan van leerlingen niet verwacht worden dat ze al in alle gevallen zelf de meest efficiënte werkwijze kunnen kiezen. De beheersing van deze methodiek kan een aanwijzing zijn voor een oriëntering naar een sterk wiskundepakket.
Zoals al eerder aangegeven kan, nadat de wiskundige vertaling is gemaakt, bij het oplossen van de concrete vergelijkingen, stelsels, … gebruik gemaakt worden van software of een grafische rekenmachine.

5.3.3 REËLE FUNCTIES

4	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **reële functies** worden ca. 33 lestijden besteed

functies van de tweede graad in één veranderlijke	ca. 25 lestijden
elementaire begrippen in verband met functies	ca. 8 lestijden

5	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **reële functies** worden ca. 34 lestijden besteed

functies van de tweede graad in één veranderlijke	ca. 22 lestijden
elementaire begrippen in verband met functies	ca. 12 lestijden

4 & 5	Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen werden in het eerste jaar van de tweede graad al geconfronteerd met het onderdeel *Reële functies*, onder meer bij de studie van de eerstegraadsfuncties. Ook in de eerste graad en in het basisonderwijs zijn al allerlei relaties tussen grootheden aan bod gekomen, in het bijzonder die tussen recht evenredige grootheden en tussen omgekeerd evenredige grootheden. Ze hebben geleerd relatief eenvoudige functionele verbanden te herkennen en te interpreteren, als die gegeven worden door een tabel, een grafiek of het voorschrift. Ze werden geconfronteerd met het herkennen van dergelijke verbanden in concrete situaties. Ze hebben geleerd ze te expliciteren in een formule of een functievoorschrift, ze weer te geven in een grafiek of er een tabel van overeenkomstige waarden bij op te stellen. Deze basisinzichten en -vaardigheden worden nu verder gebruikt bij het uitbreiden van dit onderdeel met de *tweedegraadsfuncties* en met enkele andere *elementaire functies*.
Het bestuderen van een reële functie leidt tot het beschrijven ervan met behulp van een tabel, een grafiek, een voorschrift. Op zich hebben deze vaardigheden niet veel zin. Ze krijgen die zin maar als zo'n tabel, grafiek of voorschrift kan gebruikt worden om er *problemen mee op te lossen*. Ze zijn dus meer middel dan doel op zich. Ze zijn dus middel om bijvoorbeeld een nulpunt, een extreme waarde, … te bepalen, die op zich een betekenis krijgen in de situatie waarin het probleem, het vraagstuk werd gesteld.

1 Functies van de tweede graad in één veranderlijke

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
F29	B	B	De definitie geven van een functie van de tweede graad in één veranderlijke.	
F30	B	B	De grafiek van $f(x) = a(x - \acute{a})^2 + \hat{a}$ (grafisch) opbouwen vanuit de parabool met vergelijking $y = x^2$ en daarbij - de top en de as van de grafiek bepalen, - de coördinaat van de snijpunten met de x-as bepalen.	23 24 25
F31	B	B	Aantonen dat de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ kan worden omgevormd tot de vorm $y = a(x - \acute{a})^2 + \hat{a}$.	
F32	B	B	De formule voor het algebraïsch oplossen van een tweedegraadsvergelijking bewijzen en toepassen.	19
F33	B	B	De nulpunten van een tweedegraadsfunctie bepalen en grafisch interpreteren.	25
F34	B	B	Onderzoeken of een tweedegraadsveelterm te ontbinden is in factoren van de eerste graad.	18
F35	B	B	De grafiek van een tweedegraadsfunctie tekenen gebruik makend van top, as, enz..	23 24

F36	B	B	Het verloop onderzoeken van een tweedegraadsfunctie, o.m. het domein, het bereik, de tekenverandering, het stijgen en dalen en het zich voordoen van een extreme waarde onderzoeken en grafisch interpreteren.	25 32
F37	B	B	Een ongelijkheid van de tweede graad in één onbekende oplossen.	20
F38	B	B	Het verband leggen tussen de oplossing van een vergelijking en een ongelijkheid van de tweede graad in één onbekende en de grafiek van een verwante tweedegraadsfunctie.	27
F39	B	B	Het voorschrift van een tweedegraadsfunctie opstellen als deze aan bepaalde voorwaarden voldoet.	22
F40	B	B	Gemeenschappelijke snijpunten van twee grafieken algebraïsch interpreteren, i.h.b van een rechte en een parabool.	30
F41	B	B	Vraagstukken oplossen die aanleiding geven tot een vergelijking van de tweede graad in één onbekende of waarbij het verband beschreven wordt door een tweedegraadsfunctie, i.h.b. extremumvraagstukken oplossen.	21 31
F42	B	B	Vraagstukken oplossen die aanleiding geven tot een ongelijkheid van de tweede graad in één onbekende.	21 31

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

29 Het nut van tweedegraadsfuncties kan verklaard worden vanuit een aantal betekenisvolle voorbeelden, waarvoor de tweedegraadsfunctie het accurate beschrijvingsmodel is. De relaties tussen de vier elementen die een functie kunnen bepalen (situatie, tabel, grafiek en voorschrift) worden besproken.
De grafiek van de functie kan in deze fase al met een punt voor punt constructie getekend worden. Het gebruik van de grafische mogelijkheden van een rekenmachine of de computer kan de beeldvorming ondersteunen. Bij de punt voor punt constructie moeten leerlingen wel inzien dat tussenliggende punten niet met lineaire interpolatie kunnen bepaald worden.

30 Kan men met de moderne technologie vrij snel de grafiek bekomen van een ‘willekeurige’ tweedegraadsfunctie, het proces waarin de grafiek in een aantal stappen ontwikkeld wordt vanaf de parabool met vergelijking $y = x^2$ met behulp van *transformaties* (zoals horizontale en verticale verschuiving, uitrekking, inkrimping) geeft een rijk inzicht in de samenhang tussen de grafieken onderling en tussen grafieken en hun voorschrift. Uiteraard kan de grafische rekenmachine of de computer ingeschakeld worden om snel en handig voorbeelden voort te brengen die het leerproces kunnen ondersteunen. Zeker zal hier met concrete voorbeelden geïllustreerd worden, hoe uit de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = x^2$ de grafiek van de functies met voorschrift $f(x) + k$, $f(x + k)$ of $k \cdot f(x)$ ontstaat.
Leerlingen hebben in hun vooropleiding het verband gezien tussen de coördinaten van punten die symmetrisch liggen t.o.v. een (spiegel)as (in hoofdzaak x-as en y-as). Dit kan hier gebruikt worden om de naam ‘as’ te verantwoorden. De letters α en β krijgen hier hun betekenis in verband met as en top.
Door de verschuiving β kan de grafiek snijpunten hebben met de eerste coördinaatas. De coördinaten van de snijpunten kunnen berekend worden uit $a(x - \alpha)^2 + \beta = 0$. Meteen is de basis gelegd om de vergelijking van de tweede graad op te lossen of de nulpunten van de tweedegraadsfuncties te bepalen. Het spreekt vanzelf dat deze leerinhouden hier geïntegreerd aan bod kunnen komen.

31 Het proces waarin de grafiek van de tweedegraadsfunctie ontwikkeld wordt vanaf de parabool met vergelijking $y = x^2$ met behulp van transformaties leidt tot de voorstelling van functies met voorschrift $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. En op natuurlijke wijze tot de vraag of elke tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2 + bx + c$ tot dergelijke vorm terug te brengen is. Dit leidt tot de berekening van de relaties tussen a, b en c enerzijds en α en β anderzijds en tot het inzicht dat elke tweedegraadsfunctie met voorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ voorgesteld wordt door een parabool.

32 Het leerproces dat leidt tot de realisatie van voorgaande doelstellingen (F30 en F31) leidt meteen tot de formule voor het *oplossen van vierkantsvergelijkingen*. Naast een zekere automatisering van de werkwijze moet het oplossen van vierkantsvergelijkingen gekoppeld worden aan het oplossen van een aantal vraagstukken. (Zie F40).
Men zal de leerlingen wijzen op een niet-verantwoord gebruik van de formule bij ‘eenvoudige’ oefeningen.

bijv. onvolledige vierkantsvergelijkingen (bijv. van de vorm $2x^2 - 7x = 0$) of vormen die opvallend geen nulpunten hebben (bijv. van de vorm $4x^2 + 3 = 0$).

34 De formule voor het oplossen van een tweedegraadsvergelijking kan toegepast worden bij het ontbinden in factoren van een drieterm van de vorm $ax^2 + bx + c$. De leerlingen kennen nu de voorwaarde waaronder dit al of niet kan en kunnen de ontbinding uitvoeren voor drietermen van de tweede graad waar die niet voor de hand ligt. Het kennen van een algemene formule mag niet leiden tot het uitschakelen van de andere ontbindingsvormen, als die voordeliger (sneller) zijn. Het gebruik van de som en het product van de wortels en het inzicht in getallen leiden soms tot een snellere werkwijze.

35 Ook in deze computertijd mag aandacht besteed worden aan het behoorlijk tekenen van een grafiek.

36 Het onderzoeken van de grafiek van een tweedegraadsfunctie leidt tot de gebruikelijke inzichten in de tekenverandering, het stijgen en dalen van de grafiek en het herkennen van een extreme waarde bij de top.
Het *tekenonderzoek* van de tweedegraadsfunctie is een goede onderbouw voor het oplossen van *ongelijkheden* van de vorm $ax^2 + bx + c$ (of >) 0, of afgeleide vormen. Interpretatie op de grafiek van de functie geeft meteen een goede grafische voorstelling van de oplossing (zie F37). Het oplossen van ongelijkheden mag niet beperkt blijven tot een techniek. Daarom verdient het aanbeveling ze te bespreken in het kader van betekenisvolle situaties (zie F41).
Het stijgen en dalen kan intuïtief afgeleid worden uit de grafiek van de functie. In het eerste leerjaar van de tweede graad werd aan het begrip richtingscoëfficiënt van een rechte echter het begrip differentiequotiënt (toename van de afhankelijk veranderlijke gedeeld door de toename van de afhankelijk veranderlijke) vastgehecht. Dit begrip kan hier gebruikt worden om het stijgen en dalen te onderbouwen. Dat proces kan grafisch geïllustreerd worden.
De coördinaat van de top van de parabool kan of grafisch of algebraïsch bepaald worden. Zo kunnen hier al enkele eenvoudige oefeningen gemaakt worden op het bepalen en berekenen van een extreme waarde. Ook dit wordt ingekaderd in betekenisvolle situaties.
Voor het onderzoek van het verloop van een functie, zowel voor nulpunten, stijgen en dalen als extreme waarden, … is een grafische rekenmachine of een computer een aangewezen hulpmiddel. Leerlingen kunnen vertrouwd gemaakt worden met het benaderen van nulpunten of extreme waarden, door een steeds betere uitvergroting te nemen (zoom-functie). Ook didactisch kan een rekenmachine ingeschakeld worden om het inzicht te versterken.

37 Het oplossen van ongelijkheden van de tweede graad wordt geïntegreerd bij de tekenbespreking van de tweedegraadsfuncties en de vraagstukken als toepassing hierop.

39 Het onderzoek van een aantal situaties kan tot het inzicht leiden dat een tweedegraadsfunctie volledig vastgelegd wordt door bepaalde voorwaarden (bijv. top en een punt gegeven, drie punten gegeven) en door andere niet (bijv. twee nulpunten gegeven, as en een punt gegeven). De leerlingen kunnen al geconfronteerd worden met een werkwijze met ‘onbepaalde coëfficiënten’. Een verdere toepassing is dat leerlingen op grond van een gegeven grafiek een aantal voorwaarden bepalen waarmee ze het functievoorschrift kunnen opstellen. Hierbij kan gewezen worden op de wisselwerking tussen de vier mogelijkheden waarmee een functie kan aangeboden worden.

40 In concrete situaties wordt onderzocht waar een rechte en een parabool elkaar snijden. Daarbij wordt zowel de numerieke berekening uitgevoerd, als de grafische oplossing onderzocht. De betekenis van het snijpunt en de oplossing zal dan weer in de situatie geïnterpreteerd worden.

41 De tweedegraadsfunctie en de tweedegraadsvergelijking hebben een ruim toepassingsgebied. Een aantal concrete situaties kan hier de toepassing van wiskunde in allerlei gebieden illustreren.
Het oplossen van *vraagstukken* op tweedegraadsfuncties komt vaak neer op het oplossen van een vierkantsvergelijking. Daarnaast zouden andere vragen aan bod moeten komen, zoals de vraag naar het stijgen of dalen van de functie of het bereiken van een extremum. Ook hier is het zinvol de vraagstukken niet in enkele geïsoleerde lessen aan te bieden, maar ze te integreren als toepassingen op de leerinhouden.

5 Pedagogisch-didactische wenken

32 Het algebraïsch algoritme voor tweedegraadsvergelijkingen kan gebruikt worden voor het oplossen van sommige hogere graadsvergelijkingen en bikwadratische vergelijkingen. Het oplossen van deze eerder specifieke vergelijkingen zal later allicht met behulp van andere technieken gebeuren (bijv. numerieke technieken of gebruik van een rekenmachine). Vandaar dat hieraan maar een beperkte tijd zal besteed worden!
Een mogelijke grafische benaderingswijze die kan geïllustreerd worden, is deze middel van de zoom-functie

op een grafisch rekentoestel of een computer.
Uitbreiding
Het algoritme van de oplossing van tweedegraadsvergelijkingen biedt de mogelijkheid om inzicht te verwerven in het algoritmiseren op zich. Een van de doelstellingen van wiskunde is precies het creëren van algoritmen voor oplossingsprocessen. Dit houdt in een nauwgezette uitwerking van het proces in kleine, opeenvolgende stappen met het oog op een geautomatiseerd verloop ervan, met inbegrip van de controle van de voorwaarden waaronder het algoritme van toepassing is. Het verband met het effectief uitschrijven van een 'programma' kan hier gelegd worden.

33 Een mogelijke interpretatie van het bepalen van nulpunten kan zijn de doorsnede bepalen van de grafiek met niveaulijn nul. Dit laat een veralgemening toe naar het bepalen van de snijpunten met andere niveaulijnen (of de doorsnede van een tweedegraadsfunctie en een constante functie).

34 *Uitbreiding*
Om de leerlingen te leren omgaan met het redeneren met parameters kan aandacht besteed worden aan het bespreken van het aantal oplossingen van een tweedegraadsvergelijking in functie van de som en het product van de wortels.

36 Bij de rechte (in het eerste leerjaar van de tweede graad) vallen de begrippen *differentiequotiënt* en richtingscoëfficiënt samen. Voor verschillende situaties is het differentiequotiënt constant. Bij de tweedegraadsfunctie is dat niet meer het geval. Dat kan vragen oproepen naar wat er gebeurt als bij een veranderlijke snijlijn met de grafiek één snijpunt vast gehouden wordt. Zo kunnen leerlingen bijvoorbeeld met behulp van tabellen op hun rekenmachine een aantal waarden van het differentiequotiënt berekenen. Zonder hier al meteen het begrip limiet in te voeren kan men aan de leerlingen toch al laten aanvoelen dat deze waarde naar een 'vaste waarde' evolueert, als het vrij gelaten punt naar het vaste nadert. Dit komt overeen met de situatie die de leerlingen kennen van de raaklijn in een punt aan een cirkel, zodat men ook hier het begrip 'raaklijn' kan suggereren.

40 Het snijden van rechte en parabool kan leiden tot het onderzoeken wanneer een rechte rakend zal zijn aan een parabool (bijv. met behulp van onbepaalde coëfficiënten uitdrukken dat er precies een snijpunt is). Een associatie aan de werkwijze van de raaklijn aan een cirkel (zie analytische meetkunde) ligt voor de hand (zie F36).
In een concrete situatie kan het snijpunt van twee parabolen opgezocht worden. Een voorbeeld wordt gegeven door ontvangst- en kostenfuncties (van de tweede graad), waarbij met het snijpunt een afzet overeenkomt waarbij ontvangst en kosten gelijk zijn (break-even). In hetzelfde voorbeeld kan bijvoorbeeld ook opgezocht worden wanneer de winst 'maximaal' is (binnen bepaalde grenzen).

2 Elementaire begrippen in verband met functies

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
F43	B	B	De coördinaten berekenen van een aantal punten van de grafiek van de functies met voorschrift $f(x)=x^3, f(x)=\sqrt{x}, f(x)=\sqrt[3]{x}, f(x)=\frac{1}{x}$.	23
F44	B	B	De grafiek schetsen van de functies met voorschrift $f(x)=x^3, f(x)=\sqrt{x}, f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ uitgaande van een tabel van coördinaten van een aantal van haar punten.	23
F45	U	B	Uit de grafiek van een aantal hoger genoemde functies met voorschrift f(x) de grafiek van de functies met voorschrift f(x) + k, f(x + k), k· f(x) grafisch opbouwen.	24
F46	B	B	Uit de grafiek van een hoger genoemde functie het domein, het bereik, de nulpunten, de tekenverandering, het stijgen en dalen, het voorkomen van een extreme waarde, de symmetrie in de grafiek afleiden.	25
F47	U	B	Vraagstukken die kunnen gesteld worden met behulp van een van de hoger genoemde functies oplossen gebruik makend van haar grafiek.	

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen worden doorheen de tweede graad geconfronteerd met een aantal aspecten van de functieleer. Het is zinvol deze vast te zetten onder de vorm van een 'synthese' over de verschillende aspecten, bijv. het domein, het bereik, de invloed van coëfficiënten, de nulpunten, de tekenverandering, het stijgen en dalen, het voorkomen van extreme waarden, symmetrie in een grafiek. Dit kan door een overzicht te maken van wat al aan bod is gekomen, in het bijzonder van de eerste- en de tweedegraadsfunctie. Dit is meteen het kader waarin enkele nieuwe functies aan bod kunnen komen en bepaalde aspecten (zoals de invloed van coëfficiënten) nog eens extra benadrukt worden.
Een aantal van deze functies zal voor de leerlingen in de derde graad een meer algemene gedaante krijgen. In die zin kan dit onderdeel beschouwd worden als een overgang naar de derde graad waar functiecategorieën in hun algemeenheid aan bod kunnen komen en kan het de leerlingen ondersteunen in hun keuzeproces naar de omvang van de wiskunde in hun verdere vorming. Op dezelfde basis kan dit onderdeel relatief beperkt gehouden worden voor de leerlingen waarbij deze functiecategorieën in de normale vervolgopleiding niet meer aan bod komen.

44 De leerlingen hebben onderscheid gemaakt tussen vier mogelijkheden om een functie te bepalen (een situatie, een tabel, een grafiek en het voorschrift). Ze kunnen beeldwaarden berekenen aan de hand van het voorschrift, die in een tabel voorstellen en in een assenstelsel overeenkomstige punten van de grafiek tekenen. Zo krijgen de leerlingen een beeld van de grafiek. Aan de hand hiervan, ondersteund door de tabel van functiewaarden en eventueel het voorschrift kunnen nu allerlei vaststellingen afgeleid worden (zie F46).
De grafiek van deze functies wordt met een punt voor punt constructie getekend, omdat het onderzoeksmateriaal van de analyse (bijv. afgeleide) nog niet beschikbaar is. Het gebruik van de grafische mogelijkheden van een rekenmachine of de computer kan de beeldvorming ondersteunen.
Als het tekenen van de grafiek de doelstelling is, dan moeten leerlingen er ook zorg aan besteden. Zo zal men er in een manueel uitgewerkt voorbeeld op wijzen dat een voldoende aantal punten worden berekend en uitgezet. Leerlingen kunnen hier, door opeenvolgende verfijning van het puntenraster, al meteen geconfronteerd worden met het inzicht dat een grafiek tussen twee uitgezette punten anders kan verlopen dan ze in een oppervlakkige aanpak vermoedden. Als het tekenen van de grafiek niet de expliciete doelstelling is, dan volstaat het dat leerlingen van deze functies een vlugge schets kunnen weergeven.
De functies $f(x)=\sqrt{x}$ en $f(x) = \frac{1}{x}$ zijn niet bepaald voor elke reële waarde van x. Dit leidt tot een zinvolle invulling van het begrip domein. Dit moet hier aan bod komen als het nog niet eerder besproken werd.

46 De nulpunten van de functies (genoemd onder F42) zijn vrij eenvoudig te bepalen.
Op dezelfde wijze als voor de nulpunten kan intuïtief onderzocht worden wat het domein, het bereik, de tekenverandering, het stijgen en dalen, het bereiken van een maximum en/of minimum, het voorkomen van eventuele puntsymmetrie of het niet vertonen van symmetrie t.o.v. assen is bij de in F42 genoemde functies.
Zonder de theorie over asymptoten te behandelen kan aandacht besteed worden aan het gedrag van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ voor grote x-waarden (in absolute waarde) en voor waarden die tot nul naderen.

47 De voorgaande functies worden in een aantal vraagstukken geassocieerd aan concrete situaties, bijv. verband tussen de lengte van een ribbe en de inhoud bij een kubus, verband tussen de inhoud en de straal bij een bol.

4 Pedagogisch-didactische wenken

45 *Uitbreiding*
De bedoeling is met deze elementaire functies een verkenning te maken van wat met grafieken en functies 'mogelijk' is (cf. meetkundige transformaties op een grafiek, bijv. verschuiving). Zo hebben de leerlingen bij de eerste- en de tweedegraadsfunctie kunnen onderzoeken wat de invloed is van coëfficiënten. Deze voorbeelden worden veralgemeend worden de hoger genoemde functies.

46 *Uitbreiding*
Voor de functies genoemd onder F44 kan een redenering opgezet worden, gebruik makend van de transformatie die uitgevoerd wordt. Wat gebeurt er met het nulpunt (met een x-waarde) bij bijv. verticale verschuiving en omgekeerd welke waarde wordt daarbij op nul afgebeeld? Wat is de invloed op de tekenverandering van de functie van een horizontale of verticale verschuiving? En op het gedrag van de functie voor grote x-waarden (in absolute waarde).

5 Pedagogisch-didactische wenken

45 De bedoeling is met deze elementaire functies een verkenning te maken van wat met grafieken en functies ‘mogelijk’ is (cf. meetkundige transformaties op een grafiek, bijv. verschuiving). Zo hebben de leerlingen bij de eerste- en de tweedegraadsfunctie kunnen onderzoeken wat de invloed is van coëfficiënten. Deze voorbeelden worden veralgemeend voor de hoger genoemde functies.

46 Voor de functies genoemd onder F45 kan een redenering opgezet worden, gebruik makend van de transformatie die uitgevoerd wordt. Wat gebeurt er met het nulpunt (met een x-waarde) bij bijv. een verticale verschuiving en omgekeerd welke waarde wordt daarbij op nul afgebeeld? Wat is de invloed op de tekenverandering van de functie van een horizontale of verticale verschuiving?

Door de asymptoten, die voor de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ werden gevonden, aan dezelfde transformatie te onderwerpen als de functie, worden asymptoten bepaald voor de functies van de vorm $f(x + k)$, …

5.3.4 ALGEBRAISCH REKENEN

5	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **algebraïsch rekenen** worden ca. 8 lestijden besteed

		5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
G48		B	De Euclidische deling van veeltermen uitvoeren.	
G49		B	De reststelling bij deling door $x - a$ bewijzen.	
G50		B	De reststelling toepassen in vraagstukken.	
G51		B	De tweetermen $a^3 + b^3$ en $a^3 - b^3$ ontbinden in factoren.	

5	Pedagogisch-didactische wenken

48 Het *algebraïsch rekenen* werd al aangezet in de eerste graad. Die leerlijn begon met ‘letters die de plaats innemen van getallen’ tot ‘met die lettervormen kan gerekend worden zoals met getallen’. Als bewerkingen zijn aan bod gekomen: optelling, aftrekking, vermenigvuldiging van tweetermen en drietermen met ten hoogste twee veranderlijken. De deling werd beperkt tot delen van eentermen, vooral gericht op het ontbinden in factoren (het ‘afzonderen’ van gemeenschappelijke factoren). Wat ontbreekt, wordt nu afgewerkt: veeltermen delen door een eenterm en delen door een veelterm.
Waar nodig kan het algebraïsch rekenen gedifferentieerd herhaald worden, zonder evenwel een reeks kale rekenvaardigheidsoefeningen te maken (bijv. als proef op de deling kan quotiënt en deler vermenigvuldigd worden en met de rest vermeerderd). De tijd die hieraan kan besteed worden is beperkt!
De eigenschap van de Euclidische deling is analoog aan de hoofdeigenschap van het delen bij natuurlijke getallen, die het verband uitdrukt tussen deeltal, deler, quotiënt en rest. Dit behoort tot de leerinhouden van het eerste leerjaar van de eerste graad. De verklaring van de formule was daar wel uitbreidingsleerstof.

49 De rest van de deling van een veelterm door een tweeterm van de vorm $x - a$ is de getalwaarde van de veelterm voor $x = a$. Deze eigenschap kan geïllustreerd worden met een aantal voorbeelden en aangetoond. De regel van Horner kan hier als mogelijke verkorte vorm voor de deling door $x - a$ aangebracht worden, zonder te vervallen in overmatig rekenwerk.

50 Mogelijke toepassingen zijn oefeningen met onbepaalde coëfficiënten, bijv. de rest berekenen bij deling door $(x - a)(x - b)$ als de rest gekend is van de delingen door $x - a$ en door $x - b$, het voorschrift van een derdegraadsfunctie waarin een parameter(s) voorkom(en)t bepalen als de rest(en) van de deling door tweetermen van de vorm $x - a$ gegeven zijn.

5.3.5 BESCHRIJVENDE STATISTIEK

4	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **beschrijvende statistiek** worden ca. 15 lestijden besteed

4	Pedagogisch-didactische wenken

Vanuit de maatschappij worden we geregeld geconfronteerd met allerlei gegevens over allerlei omstandigheden en vanuit een ruime waaier van disciplines en onderzoeksgebieden. De media, zoals kranten, tijdschriften, televisiebeelden of het Internet, bieden een veelheid aan informatie aan, vaak voorzien van een visuele ondersteuning. De leerlingen moeten leren omgaan met deze gegevensstromen. De wiskundevorming kan hieraan niet voorbij gaan.

De hoofdbedoeling van beschrijvende statistiek is *het ordenen, het samenvatten, het overzichtelijk voorstellen en het interpreteren van gegevens* afkomstig van allerlei situaties uit diverse disciplines.
Leerlingen moeten in de eerste plaats leren aangeboden informatie kritisch te analyseren en te beoordelen. Het hoofdaccent van de verwerking van dit onderdeel ‘beschrijvende statistiek’ zal dan ook liggen op het *interpreteren van gegeven voorstellingen en informatie*. Daarbij kan wel vermeld worden dat het verwerken van een reeks gegevens, het berekenen van een aantal parameters en het grafisch voorstellen van de informatie tot inzicht kan leiden in de betekenis ervan (bijv. de indeling van gegevens in klassen bij een voorstelling op een rekenmachine of een computer kan beter begrepen worden als men zelf geconfronteerd wordt met het indelen van een reeks gegevens in zinvolle klassen). Toch zal men zich hierbij dan beperken tot relatief eenvoudig te verwerken reeksen, zodat het omslachtige rekenwerk het inzicht niet in de weg staat.

Naast het interpreteren van gegeven voorstellingen en informatie komt het *zelf verwerken van informatie* met behulp van statistische voorstellingsmiddelen aan bod. Belangrijk is dat het turven van gegevens hier niet het leeuwendeel van de tijd in beslag neemt (en daarom komt dit eigenhandig verwerken van informatie pas op de tweede plaats). Het opzetten van een beperkte bevraging in de klas of in de school en de statistische verwerking van de verzamelde gegevens als synthese kan een aantal belangrijke vaardigheden en attitudes ontwikkelen zoals samenwerken in groep, communicatie, planning, organisatie, hanteren van de wiskundetaal in alledaagse situaties, kritische analyse van de resultaten en de besluitvorming.

Voor het verwerken en voorstellen van statistische gegevens is heel wat software beschikbaar op de rekenmachine en de computer. Een *radicale keuze voor het gebruik* ervan, die het handmatig rekenwerk tot een strikt minimum beperkt, is aangewezen. Zo komt meer tijd vrij voor interpretatieactiviteiten.

In dit onderdeel komen een hele reeks nieuwe begrippen voor. Uiteraard moeten de leerlingen die kennen en kunnen verwoorden wat ze betekenen. Dit mag echter niet leiden tot een zinloos memoriseren van een lijst definities. Het hoofddoel is een functioneel gebruik van deze begrippen bij het interpreteren en verwerken van informatie.

	4		Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
S52	B		Verschillende soorten gegevens herkennen.	
S53	B		Aan de hand van voorbeelden het belang uitleggen van de representativiteit van een steekproef voor het formuleren van statistische besluiten over een populatie.	46
S54	B		In betekenisvolle situaties de begrippen absolute en de relatieve frequentie verwoorden en ze in concrete situaties bij een gegeven reeks individuele of gegroepeerde gegevens berekenen en interpreteren.	48
S55	B		Verschillende grafische voorstellingen gebruiken en interpreteren bij concrete statistische gegevens, als ze gegeven zijn door individuele of gegroepeerde gegevens.	50
S56	B		De betekenis van de begrippen gemiddelde en mediaan verwoorden.	49
S57	B		Centrummaten, m.n. gemiddelde en mediaan, bij een reeks gegroepeerde gegevens berekenen en interpreteren.	49

S58	B		De betekenis van de begrippen variantie, standaardafwijking en interkwartielafstand verwoorden.	49
S59	B		Spreidingsmaten, m.n. variantie, standaardafwijking en kwartielen, bij een reeks individuele of gegroepeerde gegevens berekenen en interpreteren.	49

4 Pedagogisch-didactische wenken

52 De leerlingen moeten geconfronteerd worden met allerlei materiaal dat statistisch verwerkt werd, bijv. uit kranten of tijdschriften, gegevens beschikbaar op informatiedragers zoals Internet, …. Aan de hand van goed gekozen voorbeelden moet, uiteraard op een elementair niveau, het onderscheid duidelijk worden tussen *verschillende soorten van data (*o.m. kwalitatieve of kwantitatieve gegevenstypes, meetbare of niet-meetbare gegevens). Zo moeten leerlingen bijvoorbeeld aanvoelen dat het niet bij elke reeks gegevens zinvol is een gemiddelde te berekenen (bijv bij een indeling in categorieën).

53 Bij het onderzoeken van concrete voorbeelden van statistische verwerking (bijv. in kranten- of tijdschriftenartikels) wordt aandacht besteed aan de omschrijving van de *populatie*, van de *steekproef* en de samenstelling van de steekproef en van de *onderzoeksvraag.*
Voorbeelden:

Zal men de gemiddelde lengte van de Vlaamse bevolking onderzoeken als men zich beperkt tot een kleuterschool of tot het lokaal van de plaatselijke basketploeg?
Als men wil nagaan wat de partijvoorkeur is van de inwoners van een bepaalde gemeente, doet men dan de waarnemingen in één willekeurige straat, aan een partijlokaal, op de marktdag, …?
Bij een telefonische enquête sluit men personen zonder telefoon uit. Bij een schriftelijke enquête kan men geen rekening houden met enquêteformulieren die niet werden teruggestuurd.
Het werken met een kleine steekproef heeft een invloed op de betrouwbaarheid van de conclusies.

Het heeft geen zin hier enkele voorbeelden te laten memoriseren. Het volstaat dat leerlingen aanvoelen dat ze met statistische gegevens voorzichtig moeten omgaan, en dat representativiteit belangrijk is. Leerlingen zouden zelf creatief naar *eigen* voorbeelden moeten zoeken om de problematiek van de representativiteit te illustreren.

54 Het ordenen van de gegevens gebeurt aan de hand van een frequentietabel. Hiervoor worden de begrippen *absolute frequentie, relatieve frequentie, cumulatieve frequentie* en *cumulatieve relatieve frequentie* ingevoerd.
Als het aantal gegevens te groot is, worden ze gegroepeerd in klassen. Het zijn niet de frequenties van de individuele gegevens die nu gebruikt worden, maar die van de klassen. Hierbij moeten termen aangebracht worden zoals klassenbreedte, klassenmidden. Om de betekenis van klassenbreedte mee te geven kan men bijv. bij eenzelfde reeks gegevens de klassenbreedte veranderen en de invloed op de voorstelling illustreren. Alleszins moeten de leerlingen ermee geconfronteerd worden dat samenvatten van informatie (bijv. bij het groeperen) verlies aan informatie betekent.
Eens de begrippen gevormd zal men niet te veel tijd besteden aan het manueel bepalen van frequenties. De beschikbare software laat toe deze geautomatiseerd te laten berekenen.

55 In de media worden gegevens vaak grafisch voorgesteld. Het is aangewezen dat de leerlingen een aantal frequent voorkomende grafische voorstellingen leren lezen en interpreteren.
Het interpreteren houdt ondermeer in dat men oog heeft voor de aard van de voorstelling, voor de schaalverdeling, de keuze van de oorsprong en eenheden, de keuze van de klassenbreedte, …, om daaruit de informatie die achter de gegevens ligt te ontdekken. Staafdiagram, strookdiagram en schijfdiagram zijn al aan bod gekomen in de eerste graad. Nieuwe mogelijke voorstellingen zijn stengel- en bladdiagram; histogram, frequentieveelhoek en ogief. (Noot: de laatste drie termen worden bij voorkeur gebruikt voor situaties waarin de gegevens als ‘continu’ verlopend kunnen worden aangezien bijv. bij gegroepeerde gegevens.) Bij het histogram en de frequentieveelhoek kan gewezen worden op de eigenschap dat de oppervlakte ervan gelijk wordt aan de steekproefgrootte.
Aan de hand van voorbeelden kunnen leerlingen ervaren dat misbruik kan gemaakt worden van voorstellingen met als gevolg verkeerde besluitvorming. Hier kunnen leerlingen leren valse van correcte informatie te onderscheiden. Dit is een van de mogelijkheden waarmee leerlingen moeten leren kritisch om te gaan met de aangeboden informatie.
De leerlingen kunnen aan de hand van een enquête of bevraging in de klas of de school zelf een aantal gegevens verzamelen, die zelf verwerken en zelf een aangepaste voorstelling ervan maken, bijv. met behulp van een rekenblad op een computer. Er zal evenwel over gewaakt worden dat, een dergelijk leerproces meer te maken heeft met het inzicht in de verwerking van statistische gegevens, dan met het uitturven van

een veelheid van gegevens. In die zin is het gebruik van de statistische functies, met inbegrip van de grafische mogelijkheden, van een rekenmachine of een computer hierbij ten zeerste aangewezen

56 Een verdere stap in het beschrijven van gegevens is het opzoeken van *parameters* die ze samenvatten. Op die manier kunnen onder meer reeksen gegevens met elkaar vergeleken worden. Een eerste reeks parameters zijn de *centrummaten*: gemiddelde en mediaan. Ze geven een waarde die ongeveer het midden van de gegevens aanduidt. Zonder een maat voor de spreiding betekenen ze niet veel. Daarom is het zinvol beide maten samen aan te brengen aan de hand van een aantal concrete voorbeelden. Daarna kunnen samenvattend de verschillende begrippen vastgelegd worden. Gemiddelde en mediaan zijn voor niet-gegroepeerde gegevens al aan bod gekomen in de eerste graad.
Aan de hand van concrete voorbeelden wordt hun betekenis en het praktische gebruik ervan verklaard.
Bij de formules in dit onderdeel kan het $\sum$-teken ingevoerd worden als handige en korte manier om een sommatie voor te stellen. Omdat leerlingen hiermee nog ruimer zullen geconfronteerd worden kunnen enkele verkennende oefeningen aangeboden worden om het gebruik ervan te versoepelen.

57 Omwille van het inzicht in de betekenis en de procedures is het zinvol het principe van de berekening aan te brengen en even in te oefenen. Voor de praktische berekeningen in opgaven en praktische problemen wordt de rekenmachine of de computer gebruikt.
Leerlingen moeten de beperktheid van de door centrummaten verkregen informatie leren inzien.
Voor gegroepeerde gegevens wordt voor mediaan een eenvoudige oplossing gekozen, bijv. het midden van de mediale klasse. De meer complexe oplossingen kunnen eventueel in de latere vorming van de leerlingen snel geassimileerd worden.

58 Statistische gegevens met dezelfde centrummaten kunnen grondig van elkaar verschillen door hun spreiding rond deze centrumgetallen. Daarover kunnen een tweede reeks parameters, de *spreidingsmaten*, informatie geven: m.n. variatiebreedte, variantie, standaardafwijking, interkwartielafstand en eventueel percentielen.
Aan de hand van concrete voorbeelden wordt hun betekenis en het praktische gebruik ervan verklaard.
Een voorstelling van gegevens die eerder nog niet ter sprake kon komen is de *boxplot*. Ze geeft een interessante indruk van de spreiding van de gegevens, omdat ze opgesteld wordt met gebruik van enkele van de hoger genoemde parameters, m.n. de mediaan, de variatiebreedte en de kwartielen.

59 Hier geldt een analoge opmerking aan deze van de centrummaten.

5.3.6 RIJEN, TELPROBLEMEN EN REKENEN MET KANSEN

4	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **telproblemen en rekenen met kansen** worden ca. 10 lestijden besteed

5	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **rijen, telproblemen en rekenen met kansen** worden ca. 20 lestijden besteed

rijen	ca. 10 lestijden
telproblemen en rekenen met kansen	ca. 10 lestijden

4 & 5	Pedagogisch-didactische wenken

Het begrip kans kan op verschillende mogelijke wijzen aangebracht worden. De leerlingen hebben in de eerste graad al kennis gemaakt met kans als voorbeeld bij de breukvorm van een rationaal getal. De regel van Laplace is hier al stilzwijgend aanwezig (zie G59). Een andere mogelijkheid is aansluiten bij het begrip relatieve frequentie, dat in het eerste leerjaar van de tweede graad werd gedefinieerd. Daardoor wordt kans verbonden met het bepalen en schatten van de waarschijnlijk van het optreden van een bepaalde situatie (gebeurtenis) (zie G62). Beide vormen van kansbegrip moeten voorkomen. Een exclusief begrijpen van kans op de ene of de andere wijze wordt tegengegaan door voldoende voorbeelden van beide betekenissen aan te geven.

5	Pedagogisch-didactische wenken

In de eerste graad hebben leerlingen al kennis gemaakt met het opzoeken van patronen in figuren, in rijen getallen, … Dit krijgt hier een vervolg in de begrippen rekenkundige en meetkundige rij. Die zijn op hun beurt voorbeelden van een discrete beschrijving van lineaire groei (zie de eerstegraadsfunctie in het eerste leerjaar van de tweede graad) en exponentiële groei (zie de exponentiële functie in de derde graad). De behandeling van dit onderdeel zal daarom aansluiten bij voldoende concrete voorbeelden.

1 Telproblemen en rekenen met kansen

	4	5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
G60	B	B	Een boomdiagram, een venndiagram of een schema gebruiken bij het oplossen van een telprobleem.	
G61	B	B	Het aantal elementen bepalen van de doorsnede, de vereniging of het verschil van eindige verzamelingen in functie van het oplossen van telproblemen.	
G62	B	B	Het aantal elementen bepalen van het complement van een eindige verzameling in functie van het oplossen van telproblemen.	
G63	B	B	Bij eenvoudige kansexperimenten beslissen of alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn of niet.	
G64	B	B	De kans berekenen van een uitkomst in een situatie waarin alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.	
G65	B	B	Een schema (onder meer een boomdiagram) gebruiken om kansen te bepalen.	
G66	B	B	Het begrip kans interpreteren in termen van relatieve frequenties.	51
G67	B	B	In een situatie met statistische gegevens kansen schatten met behulp van relatieve frequenties.	

4 & 5 Pedagogisch-didactische wenken

60 In allerlei situaties moeten op een verstandige of handige wijze aantallen geteld worden (bijv. hoeveel autonummerplaten kunnen in het Belgische systeem uitgereikt worden). Zonder hier de gebruikelijke formules van de combinatieleer op te stellen kunnen *eenvoudige telproblemen* toch al meer systematisch aangepakt worden, bijvoorbeeld door ze voor te stellen met een boomdiagram, een venndiagram of een ander schema. Tellen wordt dan het aantal wegen, deelverzamelingen, mogelijke gebieden zoeken. Hier komt vooral de schematische aanpak van een probleem tot uiting.
Twee belangrijke regels kunnen hier eenvoudig geïllustreerd worden, de som en de productregel. De terminologie in verband met permutatie, variatie en combinatie komt aan bod in de derde graad.

63 Het gooien van een eerlijk muntstuk of van een normale dobbelsteen zijn voorbeelden van kansexperimenten waarbij elke uitkomst even waarschijnlijk is. Door middel van gepaste voorbeelden zoals het opgooien van een punaise of van de kwaliteitscontrole van gloeilampen kan op voorbeelden gewezen worden waarbij niet steeds elke uitkomst even waarschijnlijk is.
Om zinvol op het begrip *kans* te kunnen ingaan moeten leerlingen het onderscheid leren maken tussen situaties met uitkomsten met een gelijke waarschijnlijkheid (bijv. op grond van symmetrieoverwegingen) en situaties met uitkomsten waarbij dat niet geldt. In het ene geval kan de kans ‘berekend’ worden bijv. met de formule van Laplace, in het andere geval zal men de kans experimenteel moeten schatten.

64 Het is hier zeker niet de bedoeling het begrip kans axiomatisch op te bouwen. Een minimale terminologie is echter wel vereist (bijv. gebeurtenis, uitkomst, …). Voor het bepalen van een kans wordt de *formule van Laplace* gebruikt (het aantal gunstige gevallen gedeeld door het aantal mogelijke gevallen). Er dient verder op gewezen te worden dat deze formule alleen kan gebruikt worden in een kansexperiment waarbij alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.
Bij de voorbeelden beperkt men zich niet tot het berekenen van individuele of enkelvoudige uitkomsten. Ook verzamelingen van uitkomsten kunnen berekend worden, maar vermits begrippen zoals variatie en combinatie nog niet aan bod komen kan dit beperkt blijven tot eenvoudige situaties.

65 Bij de berekening van kansen waarbij de uitkomsten niet even waarschijnlijk zijn kan het gebruik van schema’s zoals boomdiagrammen een uitweg bieden en komt de leerstof in verband met de telproblemen van pas.

66 Het begrip kans kan op natuurlijke wijze gekoppeld worden aan *relatieve frequentie*. Zeggen dat de kans op vijf ogen bij het gooien van een dobbelsteen gelijk is aan een zesde, is zo te interpreteren dat ongeveer een zesde van het aantal worpen een 5 oplevert bij een groot aantal keer opgooien. Het verband tussen kans en relatieve frequentie moet geregeld geëxpliciteerd worden, zowel bij het aanbrengen van het kansbegrip, als bij de interpretatie van resultaten.

67 In de beschrijvende statistiek hebben de leerlingen kennisgemaakt met het begrip relatieve frequentie. Vanuit een groot aantal experimenten wordt het begrip kans bepaald met behulp van relatieve frequentie. Wat is het aandeel van een uitkomst in het totale aandeel? Dit biedt de mogelijkheid om ruimere problemen te bestuderen en bijv. kansexperimenten aan te pakken waarbij niet alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn. Een interessante toepassing is het raadplegen van sterftetabellen i.v.m. overlevingskansen van bepaalde leeftijdsgroepen, zoals in gebruik in de actuariële wiskunde. Hier wordt de gelegenheid geboden kansen te berekenen vanuit tabellen opgebouwd uit statistisch onderzoek. Het is belangrijk de leerlingen zeker te laten aanvoelen dat niet alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn en dat niet steeds de formule van Laplace aangewezen is voor kansberekeningen.

		5	Leerplandoelstellingen - Leerinhouden	Et
G68		B	Van een gegeven rij vaststellen of het een rekenkundige of een meetkundige rij is.	
G69		B	Bij een rekenkundige of meetkundige rij de formule voor de algemene term afleiden.	
G70		B	Bij een rekenkundige of meetkundige rij de formule voor de som van de eerste n termen afleiden.	
G71		B	Vraagstukken oplossen in verband met rekenkundige of meetkundige rijen.	

5 Pedagogisch-didactische wenken

68 In de eerste graad werden getallenrijen onderzocht op mogelijke regelmaat in de opbouw ervan. In een aantal rijen kan een getal op een willekeurige plaats afgeleid worden uit (het) vorige(n).
Hier worden systematisch twee bijzondere soorten rijen onderzocht: de rekenkundige rij en de meetkundige rij. Ze beschrijven op discrete wijze twee belangrijke groeiprocessen: de lineaire en de exponentiële groei. Anderzijds is het zinvol de leerlingen te wijzen op de relatieve beperktheid van beide ‘systemen’ om rijen op te bouwen. De leerlingen moeten geconfronteerd worden met andere soorten rijen, zoals de rij van Fibonacci.
Als de beschikbare tijd het toelaat kunnen nog andere voorbeelden gegeven worden, bijv. een harmonische rij, een rij bepaald in functie van het rangnummer van de term, een rij met een eenvoudige recursieve formule.

69 De leerlingen kunnen onderzoeken hoe ze een andere term van de rij kunnen bepalen als een aantal termen van een rekenkundige of meetkundige rij gegeven zijn. Uitgangspunt is allicht dat de eerste termen van de rij gegeven zijn, met de vraag de rij verder te zetten. Eens hierin inzicht kan dit uitgebreid worden tot rijen gegeven met niet opeenvolgende termen. Dit proces leidt tot formules waarmee ze een willekeurige term kunnen berekenen. De formules worden bewezen.

70 Eenzelfde werkwijze wordt gevolgd voor de berekening van de som van de eerste n termen. Als toepassing kan de som van de eerste n natuurlijke getallen berekend worden. Gezien de tijd voor dit onderwerp beperkt is, is het niet de bedoeling allerlei ingewikkelde oefeningen op deze formules te maken. Wel worden de formules bewezen.

71 Rekenkundige rijen en meetkundige rijen kunnen in allerlei vraagstukken verwerkt worden. Voorbeelden: jaarlijkse groei met enkelvoudige intrest, groei van een salaris met constante jaarlijkse toename, stapelwijze van palen, jaarlijkse groei bij samengestelde intrest, aangroei bacteriepopulatie, afstand tot de grond van een botsende bal, omtrek en oppervlakte van een rij in elkaar ingebedde vierkanten (telkens vanuit de middens van de zijden), enz.

6 EVALUATIE

Het is niet moeilijk in te zien dat leerprocessen beter (vlotter) zullen verlopen als de leerling regelmatig informatie krijgt over zijn vorderingen en als de leerkracht een goed inzicht heeft in de aard van de eventueel optredende problemen. Evaluatie is daartoe een uitgelezen middel en vormt aldus een belangrijk onderdeel van het onderwijsleerproces.

Schoolcultuur

De gehanteerde terminologie in verband met evaluatie, de verschillende opvattingen over de functie, de organisatievorm, de rapportering, ... zijn echter *niet eensluidend*. Deze verscheidenheid wordt geïllustreerd door de verschillende betekenissen die bijvoorbeeld gegeven worden aan termen als toets, examen, permanente evaluatie, formatieve evaluatie, dagelijks werk, enz.. Daarom is evaluatie van leerlingen en wat ermee gebeurt vaak verbonden met *een schooleigen cultuur*. Evaluatie van wiskunde moet hierin uiteraard passen, omdat evaluatie naar de leerlingen toe over de vakken en de jaren heen wel een zekere eenvormigheid moet vertonen.

Functies van evalueren

Evalueren is het *waarderen* van iets of iemand. De term evalueren wordt in het onderwijs gebruikt voor waardering als deze niet 'uit de lucht komt vallen', maar opgenomen is in de rij meten, waarderen, beslissen. Evaluaties gebeuren dus intentioneel. Evaluaties zijn niet vrijblijvend, omdat ze leiden tot een bepaalde *beslissing*. De functies van evalueren zijn verbonden met de aard van de beslissingssituaties.

Evaluatie kan de functie hebben van *resultaatsbeoordeling*. Over een periode van langere duur wordt het rendement van het onderwijsleerproces vastgesteld. Meestal gebeurt dit aan de hand van examens of summatieve toetsen. Deze vorm is allicht het meest vertrouwd.

Evaluatie kan de functie hebben van *plaatsing, oriëntering en selectie*. Evaluatiegegevens worden bijvoorbeeld gebruikt om leerlingengroepen samen te stellen, om differentiatie mogelijk te maken, om leerlingen te oriënteren naar de meest geschikte onderwijsvorm en studierichting, of toe te laten tot een bepaalde studierichting.

Evaluatie kan de functie van *diagnose* krijgen. Diagnose kan elke activiteit van de leerkracht zijn die erop gericht is een beeld te krijgen van de vorderingen van de leerlingen. Op de vaststelling van de aard en de oorzaak van de leermoeilijkheden kan dan een plan volgen om dit tekort te remediëren of bij te sturen.
In dezelfde zin kan een diagnose opgemaakt worden van de vorderingen van de leerlingen in verband met *redeneer- en probleemoplossende vaardigheden*. Vanuit een goed inzicht in de mogelijkheden en feitelijke situatie kunnen de leerlingen beter begeleid worden in hun leerproces.

Evaluatie kan de functie krijgen van *sturing van het onderwijsleerproces*. Er wordt informatie verzameld over de vorderingen van de leerlingen om het leerproces beter te organiseren. Dit soort evaluatie gebeurt voortdurend tijdens het leerproces. De leerling krijgt voortdurend informatie over zijn vorderingen, de leerkracht krijgt voortdurend informatie over het verloop van het leerproces.
Een bijzondere plaats kan gegeven worden aan het evalueren van de *beginsituatie*, bijv. in verband met een aantal routine-vaardigheden. Dit kan leiden tot een georganiseerde herhaling in de lessen (als het een ‘klassikaal’ probleem blijkt te zijn), tot een gedifferentieerde aanpak, maar even zinvol tot gerichte herhalings- of remediëringspakketten die door de leerlingen zelfstandig (als taak) worden verwerkt.

Evaluatie is medebepalend voor de 'beslissing' op de scharniermomenten van het lesverloop. De verkregen informatie kan door de leerkracht gebruikt worden om zijn didactisch handelen te beoordelen en te sturen. Bijsturing kan betrekking hebben op een aantal uiteenlopende factoren, bijvoorbeeld de leerinhoud kan te moeilijk zijn, de doelstellingen te hoog gegrepen, het tempo te hoog (of te laag), het beginniveau kan verkeerd ingeschat zijn, er kunnen problemen zijn van motivationele aard, ... De leerkracht kan hierop inspelen door bijvoorbeeld een bijkomend voorbeeld te geven, de formulering van een definitie of een eigenschap te hernemen, de voorziene oefeningen te beperken of aan te vullen. Sturing kan ook betekenen dat de leerkracht *gedifferentieerd* ingaat op de mogelijkheden van de leerlingen met aangepast oefeningenmateriaal, met remediëring, met ondersteuning van het leerproces door het leren van wiskunde te bespreken. Dergelijke sturing kan ook positief onderscheidend werken, bijv. door aan bepaalde leerlingen optimale ontwikkelingskansen te bieden door hen te confronteren met meer open problemen, meer eigen tips over hun oplossingsproces, gerichte aanwijzingen over heuristische methoden, ….

Evaluatie in de brede betekenis heeft zowel betrekking op het beoordelen van de leerlingen en de beslissingen die hieraan verbonden worden, als op de informatie over het verloop van het onderwijsleerproces zowel voor de leerling als voor de leerkracht. Ze kan betrekking hebben op een sanctionering met ingrijpende gevolgen of op een meer vrijblijvende begeleiding.

Van evaluatie naar zelfevaluatie

In de informatieve functie maakt evaluatie integrerend deel uit van het onderwijsleerproces. Belangrijk is alleszins dat de leerling *zelf informatie krijgt over zijn leren*, zowel wat betreft het proces als het eindresultaat. Zo zal in het leerproces van probleemoplossende vaardigheden niet slechts de beoordeling van het eindresultaat belangrijk zijn. De informatie over zijn wijze van aanpakken en de vorderingen daarin geeft de leerling inzicht in de nodige bijsturing.
Procesevaluatie is een aangewezen weg om leerlingen te leren vragen stellen bij de leerinhouden. In die zin is het een goede ondersteuning bij het verwerven van leervaardigheden. Procesevaluatie is een aangewezen weg om de leerling bewust te maken van de eigen mogelijkheden. In die zin en in het kader van het levenslang leren (waarbij ook niet alle vorderingen 'getoetst' zullen worden) kan dat vertrouwd worden met procesevaluatie de groei naar een houding van zelfevaluatie bevorderen. Een mogelijke ondersteuning wordt hier geboden door opdrachten waarbij de leerlingen zelf zinvol leren gebruik maken van een correctie- of een antwoordsleutel.

Evaluatie van kennis en inzicht

De essentie van wiskundekennis is de kennis van en het *inzicht in begrippen en eigenschappen*. Dit houdt in: het kunnen geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden, het herkennen van het begrip of eigenschap in contextsituaties, het kennen van de betekenis ervan, het kennen van een formulering van een definitie of de eigenschap, het kunnen toepassen ervan in diverse contextsituaties.

Evaluatie van het inzicht in begrippen en eigenschappen zou de verschillende aspecten moeten onderzoeken. Het kennen van een eigenschap impliceert niet vanzelfsprekend dat ze kan *toegepast* worden en omgekeerd. Dit impliceert dat ook in de evaluatie *in de loop van het onderwijsleerproces* meer aandacht moet besteed worden aan deze aspecten, zoals bijvoorbeeld het begrijpen, het kunnen geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden, de formulering, het toepassen van de eigenschap.

Evaluatie zou er toe moeten leiden, dat de leerkracht nog tijdens het onderwijsleerproces informatie verwerft over de misverstanden omtrent begrippen, eigenschappen en methoden bij de leerlingen. Ze kunnen dan sneller bijgestuurd worden. Voor een leerling is het belangrijk te weten op welk niveau een begrip moet gekend zijn en waar hij zich in het leerproces bevindt. Zo kan hij de aangepaste leermethode kiezen.

Van een aantal begrippen en eigenschappen kan gesteld worden dat ze tot de *parate kennis* van de leerlingen moeten behoren. Deze parate kennis moet dan ook als paraat getoetst worden en dus geregeld in de loop van het jaar. Kennis waarvan aanvaard is dat ze niet meteen paraat moet beheerst worden, maar bijvoorbeeld wel is opgenomen in een vademecum, kan getoetst worden met gebruik van het vademecum. Voorwaarde is natuurlijk dat leerlingen er ook buiten de evaluatiemomenten functioneel mee leren werken.

Over het algemeen wordt aangenomen dat in het geheel van de toetsing een goede spreiding van de leerinhouden over de verschillende beheersingsniveaus (kennis, inzicht en toepassing) wenselijk is.

Evaluatie van vaardigheden

In het huidige leerplan wordt het verwerven van een aantal vaardigheden benadrukt. Ook op de evaluatie moet dit zijn weerslag hebben. Daarbij moet een vaardigheid als vaardigheid geëvalueerd worden.

Dit betekent uiteraard dat de leerling wiskundige procedures, methoden en technieken behoorlijk en efficiënt moet kunnen uitvoeren. Dit betekent dat ook de *procedure* (bijvoorbeeld de verschillende stappen) moet geëvalueerd worden en niet slechts het eindresultaat. Hierin moet ook ruimte zijn voor de evaluatie van de zelfcontrole van de leerling (bijv. het gebruik van controlerende technieken, zoals schatten, grootte-orde gebruiken, elementaire fouten vermijden). Ook hier geeft de terugkoppeling die leerlingen krijgen over de uitvoering tijdens het leerproces zelf, hen sneller inzicht in hun fouten.

Voor de toetsing van vaardigheden kan overwogen worden een in de tijd gespreide toetsing uit te voeren. Dit betekent dat het bezitten van een vaardigheid niet afhankelijk gemaakt wordt van het bezit ervan op dat ene examenmoment.

In de evaluatie van vaardigheden neemt die van *probleemoplossende vaardigheden* een bijzondere plaats in. Aan-

dacht voor het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden leidt tot het aanbieden van meer open gestelde problemen, meer aan (soms nieuwe) situaties gebonden vraagstukken, enz.. Het oplossen van dergelijke problemen is een complex proces. Meer nog dan elders is feedback zowel *over het proces* als over het eindproduct belangrijk. De leerling zou informatie moeten krijgen over zijn kennis, en de vaardigheid waarmee hij die kan hanteren, over de wijze van vraagstelling, het gebruik van gegeven informatie, het formuleren van vermoedens, over de vaardigheid waarmee heuristische methoden gehanteerd worden, over de sturing van zijn oplossingsproces en de wijze van interpreteren en verifiëren van resultaten. Evaluatie van probleemoplossende vaardigheden heeft maar zin als *tijdens het proces* de wijze van werken van de leerling *systematisch, weloverwogen en voortdurend wordt opgevolgd*. Evaluatie kan het vertrouwen van de leerling in zijn mogelijkheden sterk beïnvloeden.
Maar ook de leerkracht krijgt belangrijke feedback, bijvoorbeeld over welke problemen uitdagend zijn, welke instructief, welke interesse wekken, welke niet succesvol zijn.

Evaluatie van attitudes

In dit leerplan wordt gepleit voor het ontwikkelen van attitudes. Nog meer dan bij vaardigheden moet de leerkracht bij de evaluatie ervan oog hebben voor de individuele inspanning die de leerling doet om die doelen te bereiken. Enige omzichtigheid is geboden, want niet bij alle leerlingen is de spontane uitingsvorm de juiste weerspiegeling van de inzet. En sommige leerlingen hebben van nature uit meer tijd en inzet nodig om eenzelfde resultaat te bereiken.
Zeker voor attitudes geldt dat terugkoppeling tijdens het leerproces de meest effectieve weg van bijsturen is. Aanmoediging zal meer vermogen dan neerbuigend afkeuren. Een verbale waardering kan naast een 'resultaat' voor de inhoudelijke toetsing een blijk van waardering zijn voor de inzet van de leerling.

ICT-hulpmiddelen

In de doelstellingen is het gebruik van ICT-hulpmiddelen opgenomen, zowel voor illustratie en demonstratie van begrippen en eigenschappen, als het effectief gebruik ervan door de leerlingen bij het uitvoeren van berekeningen, het onderzoeken van eigenschappen en het verwerken van informatie.
De evaluatie van onderdelen waarbij in de ontwikkelingsfase en de verwerkingsfase een rekenmachine, een grafische rekenmachine of een computer gebruikt werd, zal hiermee rekening houden. Dat betekent dat bij de toetsing hetzelfde materiaal ter beschikking van de leerlingen moet staan of dat de evaluatie tijdens het leerproces zelf 'permanent' wordt uitgevoerd.
Als men het gebruik van bepaalde werkwijzen met computer of rekenmachine als specifieke doelstelling heeft nagestreefd, zal dit uiteraard deel uit maken van de evaluatie. Een onderscheid moet gemaakt worden tussen enerzijds de vaardigheid in het gebruik van het toestel (bijv. bij het intikken) en anderzijds het inzicht in het gebruik van de toestelgebonden wiskundige werkwijze. En binnen het 'vak wiskunde' mag de eerste geen hypotheek leggen op de tweede. Het opmeten van de vorderingen van de leerlingen, gespreid over het jaar, moet een beeld geven van de effectieve vooruitgang van de leerlingen. Dit impliceert evenwel ook dat de leerlingen voldoende oefenkansen krijgen. Dit vraagt allicht van de school en de leerkracht een inspanning voor de leerlingen die niet zelf over het aangewezen materiaal kunnen beschikken.
Overleg in de vakgroep is nodig om vertrouwd te worden met deze voor wiskunde 'nieuwe' evaluatiesituaties. Zo zal de invoering van ICT-hulpmiddelen in de tweede graad niet los staan van het gebruik ervan in de eerste en de derde graad. Afspraken kunnen gemaakt worden over de aangewezen evaluatievorm, de wijze van werken, de gestelde eisen, … en de afstemming tussen de leerkrachten onderling. Leerlingen moeten alleszins een duidelijk beeld krijgen van wat te verwachten is bij de evaluatie.

Organisatie van de toetsing

In de organisatie van de toetsen bestaat een ruime verscheidenheid tussen de scholen. Hoe die ook gebeurt, belangrijk is dat ze aansluit bij de onderwijspraktijk. Dit wil zeggen dat ze moet aansluiten bij de doelstellingen en de verwerkingsniveaus die tijdens het leerproces en de verwerkingsopdrachten werden nagestreefd.
Wat betreft de criteria die aan toetsen als meetinstrument moeten worden opgelegd, zoals validiteit (meet de toets wat beoogd wordt te meten?) en betrouwbaarheid (is het resultaat een zo adequaat mogelijke weerspiegeling van het bereiken van de doelstellingen door de leerling?), wordt verwezen naar de geëigende literatuur.

Verder wordt aangenomen dat de evaluatie zich niet mag beperken tot enkele momenten. Geregeld toetsen (zowel mondeling als schriftelijk) laat toe adequaat in te spelen op de problemen die zich stellen. Wel mag verwacht worden dat leerlingen ook al grotere leergehelen leren beheersen, bijv. voor een ruimere summatieve toets.

7 OVEREENKOMST EINDTERMEN EN DOELSTELLINGEN

7.1 Eindtermen Wiskunde

1 Algemeen

De leerlingen

1 begrijpen en gebruiken wiskundetaal.
2 passen probleemoplossende vaardigheden toe.
3 verantwoorden de gemaakte keuzen voor representatie- en oplossingstechnieken.
4 controleren de resultaten op hun betrouwbaarheid.
5 gebruiken informatie- en communicatietechnologie om wiskundige informatie te verwerken, berekeningen uit te voeren of wiskundige problemen te onderzoeken.
6 gebruiken kennis, inzicht en vaardigheden die ze verwerven in wiskunde bij het verkennen, vertolken en verklaren van problemen uit de realiteit.
7 kunnen voorbeelden geven van reële problemen die m.b.v. wiskunde kunnen worden opgelost.
8 kunnen voorbeelden geven van de rol van de wiskunde in de kunst.

De leerlingen

9* ervaren het belang en de noodzaak van bewijsvoering, eigen aan de wiskunde.
10* ervaren dat gegevens uit een probleemstelling toegankelijker worden door ze doelmatig weer te geven in een geschikte wiskundige representatie of model.
11* ontwikkelen zelfregulatie: het oriënteren op de probleemstelling, het plannen, het uitvoeren en het bewaken van het oplossingsproces.
12* ontwikkelen zelfvertrouwen door succeservaring bij het oplossen van wiskundige problemen.
13* ontwikkelen bij het aanpakken van problemen zelfstandigheid en doorzettingsvermogen.
14* werken samen met anderen om de eigen mogelijkheden te vergroten.

* In verband met de controle geldt de opmerking: “Attitudes zijn altijd na te streven.”
(Vlor, Advies betreffende de eindtermen … p. 22)

2 Getallenleer en algebra

De leerlingen

15 zien reële getallen als eindige of oneindig doorlopende decimale getallen en stellen reële getallen voor op een getallenas.
16 gebruiken rekenregels voor machten met gehele exponenten en voor vierkantswortels bij berekeningen.
17 schrijven bij praktische formules één variabele in functie van de andere.
18 kunnen tweedegraadsveeltermen ontbinden in factoren van de eerste graad.
19 kunnen vergelijkingen van de eerste en de tweede graad in één onbekende oplossen.
20 kunnen ongelijkheden van de eerste en de tweede graad in één onbekende oplossen.
21 lossen problemen op die kunnen vertaald worden naar:
een vergelijking van de eerste en de tweede graad in één onbekende;
een ongelijkheid van de eerste en de tweede graad in één onbekende.

3 Reële functies

De leerlingen

22 geven, in betekenisvolle situaties die kunnen beschreven worden met een functie, de samenhang aan tussen verschillende voorstellingswijzen, m.n. verwoording, tabel, grafiek en voorschrift.

23 berekenen, uitgaande van het voorschrift van de standaardfuncties $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$ de coördinaten van een aantal punten van de grafiek en schetsen vervolgens de grafiek.

24 bouwen vanuit de grafiek van de standaardfuncties $f(x) = x$ en $f(x) = x^2$ de grafiek van de functies $f(x) + k$, $f(x + k)$, $kf(x)$ op.

25 leiden domein, bereik, nulpunten, tekenverandering, stijgen en dalen, extrema, symmetrie af uit de bekomen grafieken, vermeld in eindtermen 23 en 24.

26 bepalen het voorschrift van een eerstegraadsfunctie die gegeven is door een grafiek of een tabel.

27 leggen het verband tussen de oplossing(en) van vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste en tweede graad in één onbekende en een bijpassende grafische voorstelling.

28 kunnen stelsels van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden algebraïsch oplossen en de oplossing grafisch interpreteren.

29 kunnen problemen oplossen die te vertalen zijn naar stelsels van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.

30 kunnen bij rechten en/of parabolen, gegeven door vergelijkingen, gemeenschappelijke punten bepalen hetzij algebraïsch, hetzij met behulp van ICT.

31 lossen problemen op die kunnen beschreven worden met eerste- en tweedegraadsfuncties.

32 interpreteren differentiequotiënt als richtingscoëfficiënt van een rechte en als maat voor gemiddelde verandering over een interval.

33 kunnen in toepassingen a en b interpreteren bij gebruik van de eerstegraadsfunctie $y = ax + b$.

4 Meetkunde

De leerlingen

34 verklaren gelijkvormigheid van figuren met behulp van schaal en congruentie.

35 gebruiken de gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Thales om de lengte van lijnstukken te berekenen.

36 gebruiken de stelling van Pythagoras bij berekeningen, constructies en in bewijzen.

37 gebruiken de begrippen straal, koorde, raaklijn, middelpuntshoek en omtrekshoek bij berekeningen, constructies en bewijzen.

38 definiëren de goniometrische getallen sinus, cosinus en tangens van een hoek als de verhoudingen van zijden van een rechthoekige driehoek.

39 kunnen problemen met zijden en hoeken van driehoeken uit de technische wereld oplossen door een efficiënte keuze te maken uit de stelling van Thales, de stelling van Pythagoras, goniometrische getallen.

40 berekenen in het vlak de afstand tussen twee punten gegeven door hun coördinaten in een cartesisch assenstelsel.

41 lossen eenvoudige problemen i.v.m. ruimtelijke situaties op door gebruik te maken van eigenschappen van vlakke figuren.

42 kunnen met voorbeelden illustreren dat informatie verloren kan gaan bij het tweedimensionaal afbeelden van driedimensionale situaties.

43 kunnen de inhoud van sommige ruimtelijke objecten benaderend berekenen door ze op te splitsen in of aan te vullen tot gekende lichamen.

44 kunnen effecten van schaalverandering op inhoud en oppervlakte berekenen.

45 gebruiken de begrippen evenwijdig, loodrecht, snijdend en kruisend om de onderlinge ligging aan te geven van rechten en vlakken in ruimtelijke situaties.

5 Statistiek

De leerlingen

46 leggen aan de hand van voorbeelden het belang uit van de representativiteit van een steekproef voor het formuleren van statistische besluiten over de populatie.

47* staan kritisch tegenover het gebruik van statistiek in de media.

48 verwoorden, berekenen en interpreteren frequentie en relatieve frequentie zowel bij individuele als bij gegroepeerde gegevens, in concrete situaties.

49 gebruiken de begrippen gemiddelde, modus, mediaan, standaardafwijking om statistische gegevens over een concrete situaties te interpreteren.

50 gebruiken en interpreteren diverse grafische voorstellingen van statistische gegevens, zowel bij individuele als bij gegroepeerde gegevens, telkens aan de hand van concrete situaties.

51 interpreteren relatieve frequentie in termen van kans.

7.2 Overeenkomst

Et	Leerplan	
1	V2 V3 V4	
2	V5	
3	V5	
4	V5 A7 A9	
5	V1 V2 V4 V5	
6	V5 A9 A13	
7	A9 A13	
8	A13	
9	V4 A9	
10	A8	
11	V5 A11	
12	A10	
13	A10	
14	A12	
15	1G22B 1G24B	
16	1G26B 1G27B 1G28B	
17	1G33B	
18		2F34B

Et	Leerplan	
19	1G30B	2F32B
20	1G31B	2F38B
21	1G30B 1G32B 1A53B	2F41B 2F42B
22	1F36B	2F40B
23	1F38B 1F39B	2F30B 2F35B 2F43B 2F44B
24	1F38B 1F39B	2F30B 2F35B
25	1F39B 1F40B 1F43B 1F44B	2F30B 2F33B 2F36B 2F46B
26	1F39B 1A46B	
27	1F44B	2F39B
28	1A50B 1A51B	
29	1A49B 1A53B	
30	1A52B 1A53B	2F41B
31	1F45B	2F41B 2F42B
32	1F36B	2F36B
33	1F39B 1A46B	
34	1M8B	
35	1M1B 1M4B 1M6B	

Et	Leerplan	
36	1M14B 1M16B	
37		2M1B 2M2B 2M3B 2M5B 2M6B
38	1M17B	
39	1M6B 1M16B 1M18B	2M10B 2M11B 2M12B 2M13B
40	1M16B 1A53B	
41	1M6B 1M16B 1M18B 1M19B	2M11B 2M16B
42		2M14B
43	1M20B	
44	1M21B	
45		2M12B 2M13B
46	1S63B	2S53
47	A9	
48	1S64B	2S54B
49	1S66B 1S67B 1S68B 1S69B	2S56B 2S57B 2S58B 2S59B
50	1S65B	2S55B
51		2G66B

8 BIBLIOGRAFIE

Boeken

ASPEELE, M.-J., DELAGRANGE, N., e.a., *Wiskundedidactiek, een inleiding*. Leuven, Acco, 1987.
BARNETT, R.A., ZIEGLER, M.R., *College Algebra 4th edition*. New York, McGraw-Hill, 1989.
BKOUCHE, R., CHARLOT, B., ROUCHE, N., *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*. Paris, Armand Colin, 1991.
BUIJS, A., *Statistiek om mee te werken*. Leiden, Stenfort Kroese, 1989.
BURTON, D., *The history of mathematics. An introduction*. Boston, Allyn and Bacon Inc., 1985.
CENTRE DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'a dix-huit ans*. Nivelles, CREM, 1995.
COJEREM, *Des situations pour enseigner la géométrie*. Brussel, De Boeck Wesmael, 1995.
COEXETER, H., *Introduction to geometry*. New York, Willey, 1989.
FENTEM, R., *Statistics*. London, Collins Educational, 1996.
FREUDENTHAL, H., *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Reidel Publ. Comp., 1973.
GOODMAN, A., HIRSCH, L., *Precalculus*. Englewood Cliffs - New Yersey, Prentice-Hall, 1994.
GRAVEMEIJER, K.P.E., *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, CDβ Press, 1994.
GROUPE D'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE, *L'archipel des isométries: essai de rédecouverte*. Louvain-la-Neuve, GEM, 1982.
GROUPE D'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE, *Les fonctions c'est aussi autre chose*. Louvain-la-Neuve, GEM, 1982.
HERR, T., JOHNSON, K., *Problem solving strategies*. Berkeley, Key Curriculum Press, 1994.
HIRSCH, C.R., NORTON, M.A., e.a., *Geometry*. Glanview, Scott Foresman and Company, 1984.
HUFF, D., *How to lie with statistics*. London, Norton & Company, 1954.
JACOBS, H., *Geometry*. New York, Freeman, 1987.
JACOBS, H., *Mathematics a human endeavor*. New York, Freeman, 1982.
KAISER, H., NÖBAUER, W., *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht*. München, Freytag, 1984.
KLINGEN, H., OOT, A., *Computereinsatz im Unterricht, der pädagogische Hintergrund*. Stuttgart, Metzler Verlag, 1986.
KRABBENDAM, H., *Algebra voor de lerarenopleiding*. Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 1994.
KRABBENDAM, H., *Meetkunde voor de lerarenopleiding*. Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 1994.
KRABBENDAM, H., *Rekenen voor de lerarenopleiding*. Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 1994.
KRABBENDAM, H., *Informatieverwerking en statistiek voor de lerarenopleiding*. Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 1994.
LAFARGUE-SORT, J., MARQUIS, B., *Les méthodiques pour résoudre des problèmes*. Paris, Hatier, 1992.
LAGERWERF, B., *Wiskundeonderwijs in de basisvorming*. Groningen, Wolters-Noordhoff, 1994.
LEHMANN, E., *Mathematik-Unterricht mit Computer-Einsatz*. Bonn, Dümmler, 1988.
LOWYCK, J., VERLOOP, N., e.a., *Onderwijskunde*. Leuven, Wolters, 1995.
LS MATHEMATIK, *Geometrie I & II*. Stuttgart, Ernst Klett Verlag, 1986.
MANKIEWICZ, R., *Het verhaal van de wiskunde*. Abcoude, Uitgeverij Uniepers, 2000.
NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, *Curriculum and Evaluation Standards for school mathematics* . Reston, Virginia USA, NCTM, 1989.
OLDKNOW, R., TAYLOR, A., *Teaching mathematics with ICT*. London, Continuum, 2000.
POLYA, G., *How to solve it*. Princeton, University Press, 1973.
POLYA, G., *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving*. New York, Willey, 1981.
POSAMENTIER, A.S., STEPELMAN, J., *Teaching secondary school mathematics*. New York, Merill Publishing Company, 1990.
ROELS, J., DE BOCK, D., e.a., *Wiskunde vanuit toepassingen*. Leuven, Aggregatie wiskunde - K.U.Leuven, 1990.
SCHOENFELD, A. H., *Mathematical problem solving*. London, Academic Press, 1985.
STEUR, H., *Levende wiskunde. Toepassingen geordend naar wiskundig onderwerp*. Culemborg, Educaboek, Tjeenk-Willink, 1980.
STEWART, J., REDLIN, L., e.a., *Precalculus, 3th edition*. Pacific Grove, Brooks/Cole Publishing Company, 1998.
STRUIK, D.J., *Geschiedenis van de wiskunde*. Utrecht, Het Spectrum, 1990.
THAELS, K., e.a., *Van ruimtelijk inzicht naar ruimtemeetkunde*. Deurne, Wolters Plantyn, 2001
VAN DER BLIJ, F., *Wiskunde met verve*. Groningen, Wolters-Noordhoff, 2000
VAN DORMOLEN, J., *Aandachtspunten*. Utrecht, Bohn, Scheltema en Holkema, 1982.
VAN DORMOLEN, J., *Didactiek van de wiskunde*. Utrecht, Bohn, Scheltema en Holkema, 1976.
VON HARTEN, G., STEINBRING, H., *Stochastik in der Sekundarstufe I*. Köln, Aulis Verlag, 1984.

Tijdschriften

UITWISKELING. Driemaandelijks tijdschrift, Aggregatie Wiskunde K.U.Leuven, Celestijnenlaan 200B, 3001 Leuven.
WISKUNDE EN ONDERWIJS. Driemaandelijks tijdschrift van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraren (VVWL), C. Huysmanslaan 60, bus 4, 2020 Antwerpen.

EUCLIDES. Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, De Schalm 19, 8251 LB Dronten.
NIEUWE WISKRANT. Tijdschrift voor Nederlands wiskunde onderwijs, Freudenthal Instituut, Postbus 9432, 3506 GK Utrecht.
PYTHAGORAS. Wiskundetijdschrift voor jongeren, Wiskundig Genootschap, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht.

Internet adressen

Wiskunde SMIC (Scholen Multimedia en Internet Centrum):	http://www.smic.be/edu/tips05wi.htm
Portaalsite voor wiskunde (www.wiskunde.nu):	http://users.pandora.be/wiskunde/
Het wiskundelokaal van de digitale school :	http://www.digischool.nl/wi/index.phtml
Applets:	http://ww.wisweb.nl
Algebra:	http://www.ircc.cc.fl.us/classrooms/trainrescs/masoft.html
Vlaamse wiskundeolympiade:	http://www.kulak.ac.be/vwo/nl/vwowwwnl.html
Vragenbank:	http://www.gricha.bewoner.antwerpen.be/
Uitwiskeling:	http://users.belgacom.net/uitwiskeling/
Nederlandse vereniging voor wiskundeleraren:	http://www.nvvw.nl/
Tijdschrift Pythagoras:	http://www.science.uva.nl/misc/pythagoras/
Freudenthalinstituut (ontwikkelingsonderz. wiskunde-ond.):	http://www.fi.ruu.nl/
Geschiedenis van de wiskunde:	http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history
Vlaamse statistieken:	http://fred.vlaanderen.be/statistieken/statistiek.htm
Statistische gegevens:	http://statbel.fgov.be/figures/home_nl.htm
Centraal Bureau voor Statistiek:	http://www.nrc.nl/W2/Lab/Profiel/Statistiek/