VLAAMS VERBOND VAN HET
KATHOLIEK SECUNDAIR ONDERWIJS

LEERPLAN SECUNDAIR ONDERWIJS

WISKUNDE

TWEEDE GRAAD KSO/TSO

Eerste leerjaar - tweede leerjaar

WISKUNDE

Tweede graad

1ste leerjaar: 5 lestijden per week
4 lestijden per week
3 lestijden per week

2de leerjaar: 5 lestijden per week
4 lestijden per week
3 lestijden per week

In voege vanaf 1 september 2002

D/2002/0279/048

inhoud

Situering van het leerplan

Dit leerplan werd opgemaakt op basis van de eindtermen wiskunde van de tweede graad van het secundair onderwijs. Het is bestemd voor de leerlingen van de tweede graad van het Technisch Secundair Onderwijs en het Kunst Secundair Onderwijs.

Voor het aantal lestijden wordt gerefereerd aan de Lessentabellen - Voltijds secundair onderwijs - Tweede graad van het Vlaams Verbond van het Katholiek Secundair Onderwijs.

Het ***leerplan a*** is opgemaakt voor het vak wiskunde in de studierichtingen

Beeldende en architecturale vorming	Biotechnische wetenschappen Industriële wetenschappen Techniek-wetenschappen

Het ***leerplan b*** is opgemaakt voor het vak wiskunde in de studierichtingen

	Bouw- en houtkunde Elektriciteit-elektronica Elektromechanica Grafische communicatie

Het ***leerplan c*** is opgemaakt voor het vak wiskunde in de studierichting

	Handel

Het ***leerplan d*** is opgemaakt voor het vak wiskunde in de studierichtingen

Artistieke opleiding Audiovisuele vorming Beeldende en architecturale kunsten Muziek Woordkunst-drama	Bio-esthetiek Bouwtechnieken Brood en banket Creatie en mode Elektrotechnieken Fotografie Grafische media Handel-talen Hotel Houttechnieken Lichamelijke opvoeding en sport Mechanische technieken Plant-, dier- en milieutechnieken Slagerij en vleeswaren Sociale en technische wetenschappen Textieltechnieken Toerisme Voedingstechnieken Topsport

1 BEGINSITUATIE

Voor het eerste leerjaar van de eerste graad A-stroom is er een gemeenschappelijk leerplan wiskunde. Voor het tweede leerjaar bestaan twee leerplannen afhankelijk van de gevolgde basisoptie.

Het *leerplan a* is bestemd voor de leerlingen van de basisopties: *Artistieke vorming, Grieks-Latijn, Handel, Industriele wetenschappen, Latijn, Moderne wetenschappen en Techniek-wetenschappen*.

Het *leerplan b* is bedoeld voor de leerlingen van de basisopties *Agro-biotechniek, Grafische media, Hotel-bakkerij-slagerij, Hout-bouw, Mechanica-elektriciteit, Sociale en technische wetenschappen en Textiel-kleding*. Het staat de scholen echter vrij om voor één of meer van deze basisopties de voorkeur te geven aan het leerplan a.

De basisdoelstellingen worden hier kort samengevat. Een volledige beschrijving van de leerplandoelstellingen met het nagestreefde niveau van verwerken en met de bijbehorende pedagogisch-didactische wenken is opgenomen in de leerplanbrochure van de eerste graad (Licap D/1997/0279/032).

1.1 Beginsituatie in verband met getallenleer - leerplan a

De volgende leerinhouden werden volgens het leerplan van de eerste graad behandeld.

Natuurlijke, gehele en rationale getallen: interpretatie en gebruik in situaties uit het dagelijks leven, notatie (o.m. wetenschappelijke schrijfwijze) en ordening.
Bewerkingen met natuurlijke, gehele en rationale getallen: hoofdrekenen, cijferen, gebruik van een rekenmachine.
Machten met een gehele exponent van rationale getallen.
Eigenschappen van de bewerkingen met natuurlijke, gehele en rationale getallen.
Delers en veelvouden van natuurlijke getallen, priemgetal, grootste gemeenschappelijke deler, kleinste gemeenschappelijk veelvoud.
Vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende en bijbehorende vraagstukken.

Getalwaarde van een eenterm en een veelterm.
Som en product van twee- en drietermen.
Merkwaardige producten: de formules $(a + b)^2$ en $(a - b)(a + b)$.
Ontbinden in factoren d.m.v. de distributiviteit van de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling en d.m.v. bovenstaande formules voor de merkwaardige producten.

Evenredigheden. Recht en omgekeerd evenredige grootheden, grafische voorstelling van recht evenredige grootheden, bijbehorende vraagstukken.

Coördinaat van een punt in het vlak.
Tabel, staaf-, strook- en schijfdiagram, grafiek: aflezen en interpreteren, voorstelling van gegevens.
Rekenkundig gemiddelde en mediaan.
Procentberekeningen.

1.2 Beginsituatie in verband met meetkunde - leerplan a

De volgende leerinhouden werden volgens het leerplan van de eerste graad behandeld.

Basisbegrippen van de meetkunde: punt, rechte, lengte, hoek. Meten en tekenen. Schaal.
Onderlinge ligging van rechten.
Constructie van een evenwijdige aan een gegeven rechte, een loodrechte op een gegeven rechte, de middelloodlijn van een lijnstuk en de bissectrice van een hoek. Gebruik van de geodriehoek.

Het beeld van een vlakke figuur bepalen door een verschuiving, een spiegeling en een draaiing. Eigenschappen van een verschuiving, een spiegeling en een draaiing.
Congruente en gelijkvormige figuren herkennen. Congruentiekenmerken van driehoeken.

Driehoeken en vierhoeken: soorten, hoogtelijn, zwaartelijn, eigenschappen in verband met zijden, hoeken, diagonalen, merkwaardige lijnen en symmetrie.
Cirkel: straal, middellijn, koorde, middelpuntshoek.
Vraagstukken over omtrek en oppervlakte van vlakke figuren,
Ruimtefiguren: kubus, balk, recht prisma, cilinder, kegel, piramide, bol herkennen; balk en kubus voorstellen, vanuit diverse vlakke weergaven een beeld vormen van een eenvoudige ruimtelijke figuur.
Vraagstukken over oppervlakte en volume van kubus, balk en cilinder.

1.3 Beginsituatie in verband met getallenleer - leerplan b

De volgende leerinhouden werden volgens het leerplan van de eerste graad behandeld.

Natuurlijke, gehele en rationale getallen: interpretatie en gebruik in situaties uit het dagelijks leven, notatie en ordening.
Bewerkingen met natuurlijke, gehele en rationale getallen: hoofdrekenen, cijferen, gebruik van een rekenmachine.
Machten met grondtal 10 en 2 en met een gehele exponent.
Eigenschappen van de bewerkingen met natuurlijke, gehele en rationale getallen.
Delers en veelvouden van natuurlijke getallen, priemgetal, grootste gemeenschappelijke deler, kleinste gemeenschappelijk veelvoud.
Vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende en bijbehorende vraagstukken.

Getalwaarde van een eenterm en een veelterm.
Som en product van twee- en drietermen.
Merkwaardige producten: de formules $(a + b)^2$ en $(a - b)(a + b)$.
Ontbinden in factoren d.m.v. de distributiviteit van de vermenigvuldiging t.o.v. de optelling en d.m.v. bovenstaande formules voor de merkwaardige producten.

Evenredigheden. Recht en omgekeerd evenredige grootheden, grafische voorstelling van recht evenredige grootheden, bijbehorende vraagstukken.

Coördinaat van een punt in het vlak.
Tabel, staaf- strook- en schijfdiagram, grafiek: aflezen en interpreteren, voorstelling van gegevens.
Rekenkundig gemiddelde en mediaan.
Procentberekeningen.

1.4 Beginsituatie in verband met meetkunde - leerplan b

De volgende leerinhouden werden volgens het leerplan van de eerste graad behandeld.

Basisbegrippen van de meetkunde: punt, rechte, lengte, hoek. Meten en tekenen. Schaal.
Onderlinge ligging van rechten.
Constructie van een evenwijdige aan een gegeven rechte, een loodrechte op een gegeven rechte, de middelloodlijn van een lijnstuk en de bissectrice van een hoek. Gebruik van de geodriehoek.
Het beeld van een vlakke figuur bepalen door een verschuiving, een spiegeling en een draaiing. Eigenschappen van een verschuiving, een spiegeling en een draaiing.
Congruente en gelijkvormige figuren herkennen.

Driehoeken en vierhoeken: soorten, hoogtelijn, zwaartelijn, eigenschappen in verband met zijden, hoeken, diagonalen, merkwaardige lijnen en symmetrie verwoorden.
Cirkel: straal, middellijn, koorde, middelpuntshoek.
Vraagstukken over omtrek en oppervlakte van vlakke figuren,
Ruimtefiguren: kubus, balk, recht prisma, cilinder, kegel, piramide, bol herkennen; balk en kubus voorstellen, vanuit diverse vlakke weergaven een beeld vormen van een eenvoudige ruimtelijke figuur.
Vraagstukken over oppervlakte en volume van kubus, balk en cilinder.

1.5 Beginsituatie in verband met vaardigheden en attitudes

In de eerste graad van het secundair onderwijs en in het basisonderwijs werd aandacht besteed aan de ontwikkeling van een aantal vaardigheden en attitudes. Vermits het om een aanzet gaat kunnen bij onderscheiden leerlingen zeer verschillende resultaten bereikt worden. Het is te verwachten dat bepaalde vaardigheden bij de leerlingen die leerplan b hebben gevolgd minder sterk zullen ontwikkeld zijn, dan bij leerlingen die leerplan a hebben gevolgd. Het ontwikkelen van vaardigheden en attitudes is een proces dat in de tweede en de derde graad moet opgevolgd en verder gezet worden.

Rekenvaardigheden
- het rekenen met getallen (zowel hoofdrekenen, cijferrekenen als rekenen met een rekenmachine);
- het rekenen met algebraïsche vormen.

Meet- en tekenvaardigheden

Wiskundige taalvaardigheden
- het begrijpen van wiskundige uitdrukkingen (zowel mondeling als schriftelijk);
- het lezen van figuren, tekeningen en grafieken;
- het verwoorden van gedachten en inzichten (zowel mondeling als schriftelijk).

Denk- en redeneervaardigheden
- het onderscheid maken tussen hoofd- en bijzaken, gegeven en gevraagde, gegeven en te bewijzen;
- het begrijpen van een redenering of argumentatie bij een eigenschap.

Probleemoplossende vaardigheden
- een opgave herformuleren, een goede schets of een aangepast schema maken, notaties invoeren, onbekenden kiezen, voorbeelden analyseren.

Leervaardigheden
- het verwerken van losse gegevens;
- het verwerken van samenhangende informatie;
- het raadplegen van informatiebronnen;
- het plannen van de studietijd;
- het sturen van het eigen leerproces.

Zin voor nauwkeurigheid en orde.
Zin voor helderheid, bondigheid, eenvoud van taalgebruik.
Kritische zin,
    o.m. een kritische houding tegenover de eigen berekeningen, beweringen, handelingen.
Zelfvertrouwen, zelfstandigheid en doorzettingsvermogen bij het aanpakken van problemen.
Zelfregulatie,
    o.m. oriëntatie, planning, bewaking, zelftoetsing en reflectie.
Zin voor samenwerking en overleg.

2 ALGEMENE DOELSTELLINGEN

2.1 Wiskunde en wiskundevorming

Wiskunde

Wiskunde biedt middelen tot *het begrijpen, het beschrijven, het verklaren en eventueel het beheren van systemen en situaties* uit onze omgeving. Het gaat in het bijzonder om natuurverschijnselen (bijv. in de natuurwetenschappen, beschrijving in de ruimte rondom), om technische realisaties (bijv. automatiseringsprocessen) en om menselijke relaties (bijv. het gebruik van statistische gegevens in de economie en in de media).

Een kenmerk van wiskunde is het creëren van *modellen* voor die beschrijving. De mathematisering van een situatie of een probleem betekent dat, na analyse en kwantificering, een wiskundig model (bijv. een evenredigheid, een vergelijking, een functioneel verband, een stelsel, een meetkundig verband, ...) wordt gevonden, waarin de situatie of het probleem kan beschreven worden. De bijbehorende oplossingstechnieken kunnen tot een effectieve oplossing leiden. *Kritische toetsing* van de oplossing in de beschreven realiteit kan leiden tot het aanvaarden, verwerpen of bijstellen van het wiskundig model.

Een ander kenmerk van wiskunde is het steeds verder *ordenen en organiseren* van de verworven inzichten in samenhangende schema's en systemen, waarbij de toepasbaarheid en de beperkingen van wiskundesystemen kan beschreven worden. Van nieuwe vaststellingen wordt geprobeerd ze te verbinden met of te verantwoorden vanuit de bestaande systemen.

Wiskundevorming

De wiskundevorming in het secundair onderwijs heeft een dubbele rol: het ontwikkelen van een wiskundig *basisinstrumentarium* en het *ontwikkelen* van het denken in het algemeen.

Enerzijds moeten leerlingen een minimale kennis en vaardigheid verwerven in het wiskundige *instrumentarium*, nodig om goed te kunnen functioneren in een maatschappij, waar wiskunde in vele toepassingen gebruikt wordt. Daarom moeten wiskundige begrippen en verbanden een *brede betekenis* krijgen in relatie met voldoende realiteitsgebonden situaties en moeten veel gebruikte wiskundige *technieken en methoden* voldoende beheerst worden (al of niet met gebruik van hulpmiddelen zoals een rekenmachine, een computerprogramma, een formularium).

Wil deze kennis en vaardigheid adequaat gehanteerd worden, is een efficiënte *kennisorganisatie* noodzakelijk. Daartoe moet voldoende aandacht besteed worden aan de samenhang tussen begrippen en eigenschappen en tussen de eigenschappen onderling. Efficiënte toegankelijkheid van de kennis houdt in dat ze inhoudelijk niet slechts logisch geordend is, maar dat een ordening beschikbaar is die gericht is op het gebruik ervan in toepassingen, ook in nieuwe situaties.

In het concrete verwervingsproces en in de toepassingen kan de bewondering voor de schoonheid en de verwondering voor het vaak verrassende van wiskunde groeien.

Anderzijds draagt de wiskundevorming bij tot een fundamentele *denk- en attitudevorming*. Bij het verwerven van wiskundekennis en wiskundige methoden worden meer algemene denkmethoden (bijv. het analyseren, het synthetiseren, het hanteren van symmetrie en analogie, het systematisch en methodisch werken), verwervingstechnieken van kennis (bijv. herhaling, verbanden leggen, toetsing, verdere abstractie) en attitudes (bijv. het opbouwen van vertrouwen in het eigen kunnen, doorzettingsvermogen en kritische zin) ontwikkeld.

Bij het mathematiseren en het oplossen van problemen kunnen leerlingen vaardigheden en strategieën verwerven die breder toepasbaar zijn. In het proces van het argumenteren en het bespreken van de kwaliteit van een wiskundige oplossing zal wiskunde bijdragen tot het verwerven van een *kritische houding*, ten aanzien van het eigen denken en handelen.

Omdat dit vormingsproces niet los verloopt van de sociale context van de klas, wordt onrechtstreeks bijgedragen tot de vorming van sociale vaardigheden.

2.2 Algemene doelstellingen voor wiskunde in de tweede graad

Voor de wiskundevorming in de *tweede graad* van het *kunst secundair onderwijs* en het *technisch secundair onderwijs* kunnen de volgende algemene doelstellingen vooropgesteld worden.

Kennis en inzicht

De leerlingen gebruiken en onderhouden de kennis en de inzichten verworven in de eerste graad.
De leerlingen ontwikkelen

- een wiskundig instrumentarium van begrippen, eigenschappen en methoden;
- het inzicht in verbanden tussen de wiskundige leerinhouden onderling en tussen de wiskundige leerinhouden en andere vakdisciplines;
- het inzicht in verbanden tussen het wiskundig instrumentarium en problemen die wiskundig vertolkt kunnen worden;
- het inzicht in het verwerken van numerieke informatie en beeldinformatie;
- een aantal redeneermethoden om hun bevindingen te argumenteren en te verklaren;
- een aantal wiskundige denkmethoden om o.m. verbanden te leggen, te ordenen en te structureren.

Vaardigheden

De leerlingen onderhouden de vaardigheden verworven in de eerste graad.
De leerlingen ontwikkelen

- rekenvaardigheden;
- meet- en tekenvaardigheden;
- wiskundige taalvaardigheden;
- denk- en redeneervaardigheden;
- probleemoplossende vaardigheden;
- leervaardigheden.

Attitudes

De leerlingen ontwikkelen

- zin voor nauwkeurigheid en orde;
- zin voor volledigheid;
- zin voor helderheid, bondigheid, eenvoud van taalgebruik;
- kritische zin;
- zelfvertrouwen, zelfstandigheid en doorzettingsvermogen;
- zelfregulatie;
- zin voor samenwerking en overleg;
- waardering voor wiskunde als een dynamische wetenschap en als een component van de cultuur.

Verwerking in het leerplan

Wiskunde kan in de tweede graad aangeboden worden met een verschillend aantal wekelijkse lestijden. De realisatie van de algemene doelstellingen hangt daarmee samen. Dit resulteert in een verschil in leerplandoelstellingen en andere klemtonen op een van de voornoemde aspecten van de wiskundevorming. Dit wordt geconcretiseerd in deel 5.

De *vaardigheden en attitudes* worden voorzien voor de *gehele tweede graad* en worden verwerkt in 5.1. Het spreekt voor zich dat ze met een groter aantal lestijden wiskunde diepgaander kunnen gerealiseerd worden. In de tekst van 5.1 zelf wordt de nuancering in functie van het verschillend aantal lestijden aangebracht.

De wiskundige *leerinhouden* voor het *leerplan a* worden verwerkt in leerplandoelstellingen in de hoofdstukken *5.2* voor het eerste leerjaar en *5.3* voor het tweede leerjaar.

Ze worden gepresenteerd volgens een inhoudelijke ordening: *meetkunde* met inbegrip van de driehoeksmeting en ruimtemeetkunde, *getallenleer en algebra* met een numeriek en een algebraïsch onderdeel, *reële functies en analytische meetkunde* met inbegrip van stelsels en *beschrijvende statistiek.*

De wiskundige *leerinhouden* voor het *leerplan b* worden verwerkt in leerplandoelstellingen in de hoofdstukken *5.4* voor het eerste leerjaar en *5.5* voor het tweede leerjaar.

Ze worden gepresenteerd volgens een inhoudelijke ordening: *meetkunde* met inbegrip van de driehoeksmeting en ruimtemeetkunde, *getallenleer en algebra* met een numeriek en een algebraïsch onderdeel, *reële functies en analytische meetkunde* met inbegrip van stelsels en *beschrijvende statistiek.*

De wiskundige *leerinhouden* voor het *leerplan c* worden verwerkt in leerplandoelstellingen in de hoofdstukken *5.6* voor het eerste leerjaar en *5.7* voor het tweede leerjaar.

Ze worden gepresenteerd volgens een inhoudelijke ordening: *meetkunde* met inbegrip van de driehoeksmeting en ruimtemeetkunde, *getallenleer en algebra* met een numeriek en een algebraïsch onderdeel, *reële functies en analytische meetkunde* met inbegrip van stelsels en *beschrijvende statistiek.*

De wiskundige *leerinhouden* voor het *leerplan d* worden verwerkt in leerplandoelstellingen in de hoofdstukken *5.8* voor het eerste leerjaar en *5.9* voor het tweede leerjaar.

Ze worden gepresenteerd volgens een inhoudelijke ordening: *meetkunde* met inbegrip van de driehoeksmeting en ruimtemeetkunde, *getallenleer en algebra* met een numeriek en een algebraïsch onderdeel, *reële functies* met inbegrip van stelsels en *beschrijvende statistiek.*

Deze inhoudelijke ordening wil het opzoeken van de doelstellingen vereenvoudigen. Dit betekent geenszins dat de leerinhouden in deze volgorde moeten aangeboden worden. Het leerplan wil daarentegen het leggen van bruggen tussen verschillende onderdelen en het geïntegreerd behandelen van onderwerpen stimuleren. Daartoe worden in de pedagogisch-didactische wenken verwijzingen opgenomen.

Samengevat:

het leerplan a bestaat uit de hoofdstukken 5.1, 5.2 en 5.3,
het leerplan b bestaat uit de hoofdstukken 5.1, 5.4 en 5.5,
het leerplan c bestaat uit de hoofdstukken 5.1, 5.6 en 5.7,
het leerplan d bestaat uit de hoofdstukken 5.1, 5.8 en 5.9.

3 ALGEMENE PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

In de tweede graad wordt verder gebouwd op de wiskundige vorming van de eerste graad en het basisonderwijs. Dat houdt in dat de leerlingen de kennis, de inzichten en de vaardigheden die eerder verworven werden, blijven gebruiken en onderhouden. Als uit een diagnostische toets blijkt dat onderdelen onvoldoende verworven werden, kunnen die functioneel en gericht herhaald en bijkomend ingeoefend worden. Een gedifferentieerde aanpak is hier aangewezen.

Kennis en inzicht

In de tweede graad komen een aantal nieuwe leerinhouden en nieuwe wiskundeonderdelen aan bod. Daarbij moet voldoende aandacht besteed worden aan de *begripsvorming*. Een eerste abstractie van nieuwe begrippen wordt best onderbouwd met voorbeelden, die onder meer kunnen aansluiten bij de ervaringswereld van de leerlingen, bij de historische ontwikkeling van het begrip of bij de problemen die er mee kunnen opgelost worden. In een onderzoeksfase kunnen de leerlingen zelf ervaren wat de relevante en niet-relevante kenmerken van een begrip zijn. Bij het verbinden van nieuwe ervaringen aan het begrip of het niet meer behoorlijk functioneren van het begrip kunnen leerlingen hierop dan terugvallen. Door begrippen van bij de vorming te koppelen aan verschillende onderdelen worden ze breder en betekenisvoller opgenomen en wordt het gebruik ervan in de verschillende onderdelen vereenvoudigd. Dit kan een motivatie zijn om leerstofonderdelen geheel of gedeeltelijk geïntegreerd te behandelen. De aanbreng van nieuwe eigenschappen kan op gelijkaardige wijze aangepakt worden.

Naast het aanzetten van nieuwe begrippen en eigenschappen zal er naar gestreefd worden een aantal begrippen en eigenschappen uit te diepen en op een hoger *verwoordingsniveau* te brengen, waarbij vertrouwde begrippen en eigenschappen met een redelijke exactheid worden vertolkt. Voor de leerlingen die vijf lestijden wiskunde per week in hun pakket kiezen slaat het ‘verwoorden’ van kennis en inzichten, zowel op het effectief vertolken ervan in een behoorlijke en vlotte taal, als op het beschrijven ervan in een meer formele wiskundetaal met symbolen. Het overgaan van de ene vorm naar de andere verdient veel aandacht. Notaties en symbolen zijn geen doel op zich, maar een middel om de verworven begrippen en eigenschappen en de gemaakte redeneringen adequaat en beknopt uit te drukken. Voor de leerlingen met een kleiner aantal wekelijkse lestijden wiskunde moet gezocht worden naar een haalbare, aangepaste vorm, waarbij de eisen aan het taalniveau minder hoog kunnen liggen. Voor de wiskundig-zwakke leerlingen is het zinvol aandacht te besteden aan een goed doordachte, stapsgewijze opbouw van het inzichtelijk proces en aan de verbetering van de eigen onvolmaakte verwoording, in plaats van hen een aantal elementen betekenisloos te laten memoriseren.

Inzicht in de aangeleerde begrippen en eigenschappen impliceert dat de verworven kennis kan *toegepast* worden. De leerlingen moeten daartoe geconfronteerd worden met zinvolle en haalbare toepassingen binnen en buiten de wiskunde. Precies de toepassingen kunnen het inzicht verscherpen in verbanden tussen het gekende wiskundig instrumentarium en het oplossen van problemen en daardoor ook in de wiskundige begrippen en eigenschappen zelf. Ook hier ligt een gradatie in het aangeboden materiaal voor de hand.

Vaardigheden

Technieken en routineprocedures worden verder ingeoefend en aangevuld. Daarbij wordt het efficiënt gebruik van rekentechnische hulpmiddelen, zoals rekenmachine en computer, sterk aanbevolen. Bij een aantal leerinhouden is het gebruik van een toestel met grafische mogelijkheden zelfs aangewezen.

Daarnaast moet, afhankelijk van het aantal lestijden wiskunde en de mogelijkheden van de leerlingen, aandacht besteed worden aan vaardigheid in verwoorden en formaliseren, probleemstellen en probleemoplossen, redeneren en verantwoorden. De leerkracht dient te beseffen dat deze vaardigheden slechts progressief opgebouwd worden. Hierop wordt uitvoerig ingegaan in de pedagogisch-didactische wenken bij 5.1.

Attitudevorming

Doorheen de wiskundevorming kunnen leerlingen een aantal attitudes en in het bijzonder *leerattitudes* verwerven, zoals orde, nauwkeurigheid, doorzettingsvermogen, zelfvertrouwen, ... Het aanpakken van problemen kan leiden tot een *onderzoeksgerichte houding*, tot methodisch en planmatig werken. Een leerproces waarin oplossingen worden vergeleken en getoetst, kan bijdragen tot samenwerking, overleg, structurering, zin voor helderheid, bondigheid, volledigheid, eenvoud in taalgebruik, waardering voor andere oplossingen.

Bij het bespreken van oplossingsmethoden en door het kritisch onderzoeken van elkaars oplossing kan *waardering* voor een andere mening aangeleerd worden en daardoor voor de persoon van de andere. Zo kan binnen het wiskundeonderwijs aandacht besteed worden aan *waarden* en *sociale vaardigheden*.

Ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit *realiteitsbetrokken situaties* kan bij de leerlingen het besef doen groeien van de bruikbaarheid en de werkelijkheidswaarde van wiskunde. Ontwikkeling van begrippen en eigenschappen vanuit een historische context kan belangstelling en waardering opwekken voor de historische en culturele aspecten van wiskunde in het algemeen.

Actieve werkvormen

De leerlingen van de tweede graad beschikken over voldoende achtergrondkennis en voldoende ervaring met de wiskunde-opbouw om ze te betrekken bij het ontwikkelen van de leerinhouden. Een radicale keuze voor *actieve wiskundelessen* ligt voor de hand. Begrippen en eigenschappen kunnen in goed gekozen didactische situaties door de leerlingen zelf onderzocht worden. Die leermomenten kunnen in leer- of klassengesprekken verwoord worden en aan de ervaring van anderen getoetst. Reflecties over dit proces zelf zijn aangewezen momenten om technieken in verband met 'leren-leren' (bijv. zich vragen stellen) aan te reiken.

In een *actief leerproces* leren leerlingen communiceren over wiskundige onderwerpen. De manier waarop leerlingen onder elkaar en naar de leerkracht toe informatie over hun denkproces overdragen, mag zich niet beperken tot het debiteren van een rijtje wiskundige symbolen. Hun uitleg zou voor buitenstaanders begrijpbaar moeten zijn. Ook in de wiskundelessen is het hanteren van een verzorgde en behoorlijke taal belangrijk.

Van leerlingen van de tweede graad mag verwacht worden, dat ze een hogere vorm van *zelfstandig leren en werken* opbouwen. De opbouw van het leerproces moet er op gericht zijn dat leerlingen actief deelnemen aan de wiskundelessen. Die moeten zo ingericht worden dat leerlingen zelf een deel van het werk aanpakken. Door goed gekozen, progressief opgebouwde opdrachten moeten leerlingen vertrouwd gemaakt worden met het opnemen van verantwoordelijkheid voor het eigen leren en werken.

Informatica en wiskunde

In onze maatschappij groeit de informatie- en communicatietechnologie (ICT) uit tot een veralgemeend hulpmiddel. De leerlingen moeten er in het onderwijs al mee vertrouwd worden. Wiskunde is een aangewezen weg tot het verwerven van inzicht in een aantal computertoepassingen (rekenwerk, grafische mogelijkheden, dataverwerking).

Heel wat *routine-rekenwerk* wordt in de praktijk niet meer manueel uitgevoerd. Ook in de wiskundeles kan het gebruik van moderne rekenapparatuur zoals rekenmachine en computer tijdbesparend werken, zeker bij getallen waar het handmatig rekenwerk veel tijd in beslag zou nemen. Routine-rekenvaardigheden blijven weliswaar belangrijk voor een snelle schatting, bijv. na afronding van de getallen. Maar men kan niet voorbij aan de consequentie dat aan de inoefening van rekenvaardigheden minder tijd kan besteed worden. Uiteraard moet misbruik van de rekenmachine voorkomen worden. Foutief gebruik kan het inzicht in de wiskundige aanpak van een probleem zelfs verstoren. In die zin zal in de inzichtelijke fase of de aanbrengfase het rekenen soms nog ambachtelijk moeten gebeuren.

Wat het *algebraïsch rekenwerk* (formules, letterrekenen, vergelijkingen oplossen) betreft beschikt de computer en een aantal rekenmachines al over heel wat mogelijkheden. In de tweede graad lijkt het zinvol toch nog tijd te investeren in manueel rekenwerk omdat het inzicht in de algebraïsche manipulaties nog te verwerven is. De aard van de oefeningen is dan niet gericht op complexiteit, maar op versterking van inzicht in de methode. Verder kan vanuit het inzicht in de relatieve beperktheid van de mogelijkheden bij het algebraïsch rekenen al aandacht besteed worden aan het numeriek benaderen van oplossingen.

De *verwerking van gegevens* die in de beschrijvende statistiek voorzien is, zal niet enkel manueel uitgevoerd worden. Moeilijkheden met het rekenwerk zullen aanzienlijk verminderen door radicaal gebruik te maken van de rekenmachine of de computer.

De computer en grafische rekenmachines zijn handige *didactische hulpmiddelen*, o.m. bij exploratieopdrachten. Door de snelheid waarmee leerlingen een antwoord kunnen bekomen, krijgen ze snel terugkoppeling over hun denk-, reken- of oplossingsproces. De bijsturing die er op volgt kan het inzicht verhogen. Zo kunnen bijvoorbeeld de grafische mogelijkheden aangewend worden bij het onderzoek van functies en hun grafieken. En in de meetkunde kan een zelfde relatie of situatie in een aantal verschillende posities of liggingen uitgeprobeerd worden waardoor de besluitvorming (bijv. bij het formuleren van een vermoeden of een vaststelling) efficiënter kan. De *visuele ondersteuning* die uitgaat van deze ‘wiskunde in beelden’ mag voor leerzwakke leerlingen niet onderschat worden. En al zal de computer in de wiskundeles niet voor flitsende beelden zorgen en vraagt het gebruik van de leerling heel wat inzet, toch kan het moderne medium de *motivatie* van een aantal leerlingen verhogen.

Het gebruik van een rekenmachine of software brengt *nieuwe mogelijkheden en moeilijkheden* mee, zo bijv. het interpreteren van de randvoorwaarden van een probleem (bijv. de keuze van de dimensies van het grafisch scherm) of het extrapoleren (vanuit een verband vastgesteld op een grafiek). Dergelijke hulpmiddelen kunnen ook gebruikt worden als controlemiddel op manueel uitgevoerde berekeningen of bij het verifiëren van vermoedens, veronderstellingen en schattingen. Daartegenover staat dat nieuwe controlevaardigheden (bijv. het maken van schattingen) moeten aangeleerd worden, om meteen een kritische houding tegenover de resultaten en de mogelijkheden van deze nieuwe technologie te verwerven.

In deze tijd is het leren organiseren, gebruiken en interpreteren van informatie belangrijker dan het onthouden van de zoveelste formule. Naast het eigen geheugen worden o.m. elektronische geheugens, formularia, tabellen gebruikt. Het wiskundeonderwijs kan hieraan niet voorbij. Het kan nodig zijn de tijd te nemen om inzicht in berekeningen, regels en formules te verwerven, maar het indrillen en het berekenen met ingewikkelder getallen moet gerelativeerd worden. De gewonnen tijd kan besteed worden aan het oplossen van een probleem, een vraagstuk meer.

Wiskunde voor elke leerling

In de tweede graad wordt wiskunde aangeboden met een verschillend aantal wekelijkse lestijden. Er mag verwacht worden dat de leerlingengroepen meer homogeen zijn samengesteld dan in de eerste graad. Toch moet er aandacht besteed worden aan een gedifferentieerde aanpak van de leerlingen. Dit kan betekenen dat bepaalde onderdelen en doelstellingen gedifferentieerd aangeboden worden. Dit impliceert dat zowel bijzondere aandacht kan gaan naar de wiskundig minder begaafde leerling, als naar de leerling met meer wiskundige mogelijkheden.

Oriëntering

Op het einde van de tweede graad kunnen sommige leerlingen opnieuw voor een keuze staan in hun studieloopbaan. Voor een aantal speelt daarin het aantal wekelijkse lestijden wiskunde nog een rol. Daartoe zal dan getracht worden de keuzerijpheid bij de leerlingen zelf te bevorderen. Maar ook los daarvan zal de verwerking van de leerinhouden (basis en/of uitbreiding) verschillende aspecten van wiskunde omvatten en voldoende uitdaging bevatten, opdat leerlingen zich een reëel beeld kunnen vormen van hun mogelijkheden.

Relatie met het opvoedingsproject van de school

Een school wil haar leerlingen méér meegeven dan louter vakkennis. Haar intentieverklaring in dit verband is te vinden in het opvoedingsproject, waarin waardenopvoeding en christelijke duiding zijn opgenomen.

Een vakleerkracht in een school van het katholieke net zal geen andere wiskunde geven dan de collega's in een ander net. Wel heeft hij de taak om, waar de kans zich voordoet, naar het opvoedingsproject of een aspect daarvan te refereren. Als mededrager van het christelijk opvoedingsproject is elke leerkracht alert voor elke kans die het school- en klasgebeuren biedt om de diepere dimensie aan te reiken. Ook wiskundelessen bieden hiertoe de kans, niet in het minst in de persoonlijke contacten tussen leerlingen en leerkracht. Hoe beter de leerkracht de leerlingen persoonlijk kent, hoe beter hij zal aanvoelen wanneer er openheid is om met de leerlingen door te stoten naar zins- en zijnsvragen.

4 MINIMALE MATERIËLE VEREISTEN

Leerkrachten wiskunde hebben de beschikking over behoorlijk en gemakkelijk toegankelijk materiaal voor het uitvoeren van tekeningen op het bord, m.n. *geodriehoek en passer*. Ze kunnen vlot beschikken over een *overheadprojector en ICT-hulpmiddelen voor demonstratie.*

Leerkrachten wiskunde kunnen beschikken over *rekenmachines en wiskundige software* voor de didactische ondersteuning van hun lessen.
Voor de tweede graad betekent dit concreet:

- software voor meetkunde met interactieve en dynamische mogelijkheden;
- software voor exploratie van reële functies;
- software voor de verwerking van statistische gegevens (exploratie van grafische voorstellingen, berekeningen, voorstellen van gegevens in grafieken en diagrammen).

Deze software kan beschikbaar zijn op geavanceerde rekenmachines en/of op computer (eventueel met inbegrip van Internet voor exploratieopdrachten). ICT-hulpmiddelen staan minimaal 20 % van de lestijden ter beschikking van de leerkracht.

De *leerlingen* beschikken over behoorlijk tekenmateriaal (*geodriehoek en passer*). Ze beschikken over een *rekenmachine.*

De leerlingen moeten doorheen het onderwijs vertrouwd worden met het gebruik van ICT-hulpmiddelen. De toepassingsmogelijkheden in wiskunde zijn uitgebreid (zie o.m. *Informatica en wiskunde* p. 15, en de concrete pedagogisch-didactische wenken). Daarom moeten de leerlingen geregeld gebruik kunnen maken van ICT-hulp-middelen.

Voor leerlingen, die de leerplannen a, b en c volgen, is daartoe een rekenmachine met interactieve grafische functies (bijv. zoom-functie, trace-functie) en met mogelijkheden voor statistische berekeningen noodzakelijk (bijv. gezien de vaak beperkte beschikbaarheid van computerinfrastructuur). Voor leerlingen die het leerplan d volgen is een grafische rekenmachine aangewezen vanaf het vierde leerjaar. Tot dan volstaat een rekenmachine die de gebruikelijke bewerkingen en wiskundige functies bezit.

Opmerking in verband met de implementatie

Op de vakgroep wiskunde zal geregeld een evaluatie gemaakt worden van het gebruik van en de vordering van de implementatie van ICT-hulpmiddelen. Dit is een gelegenheid om ideeën en werkmateriaal uit te wisselen. Aanvullend overleg is wenselijk met de vakwerkgroepen wetenschappen, technische vakken en informatica, o.m. om het wiskundig gebruik van de ICT-hulpmiddelen in die vakken aan te moedigen en eventueel toe te lichten.

Het komt de didactische verwerking in de klas ten goede als de leerlingen over een zelfde rekenmachine beschikken. Het is niet wenselijk dat leerlingen in hun studieloopbaan geregeld van toestel moeten veranderen. De vakgroep wiskunde zal (afhankelijk van de studierichtingen) afspraken maken over de vereisten waaraan een toestel moet voldoen, in functie van het gebruik dat men er wenst van te maken. Om een continuïteit in het gebruik van rekenmachines te waarborgen doorheen de studieloopbaan van de leerlingen is het wenselijk dat ook afspraken gemaakt worden op het niveau van de scholengemeenschap. Als toch verschillende toestellen gehandhaafd worden, moet de uitwisselbaarheid onderzocht worden.

Het verwerven door de leerlingen van een grafische rekenmachine kan, indien gewenst, gespreid worden over een beperkte tijd. Een dergelijk toestel kan verworven worden in de loop van het eerste semester van het derde jaar. In de vakgroep wiskunde wordt afgesproken vanaf welk moment het gebruik van het toestel zal uitgelegd worden en vanaf wanneer het courant in gebruik zal genomen worden in de lessen. Tenslotte moet voorzien worden dat leerlingen uit een sociaal minder begoed midden geen probleem ervaren met de beschikbaarheid van deze hulpmiddelen.

5 LEERPLANDOELSTELLINGEN – LEERINHOUDEN PEDAGOGISCH-DIDACTISCHE WENKEN

De leerplandoelstellingen zijn opgemaakt op basis van de eindtermen wiskunde van de tweede graad van het secundair onderwijs. Omdat wiskunde in de tweede graad met een gedifferentieerd aantal lestijden aangeboden wordt zijn vier leerplannen uitgewerkt, één realiseerbaar met vijf wekelijkse lestijden wiskunde, twee op basis van vier wekelijkse lestijden wiskunde met specifieke tegemoetkomingen naargelang de studierichtingen en één met drie wekelijkse lestijden wiskunde.

Bij de doelstellingen is een *verwijzing naar de eindtermen* (kolom Et) opgenomen. Bij een aantal doelstellingen staan meer verwijzingen, als gelijktijdig aan het realiseren van meer dan een eindterm kan gewerkt worden. Dit betekent niet dat deze eindtermen uitsluitend hier aan bod komen, want anderzijds kunnen verschillende doelstellingen verwijzen naar dezelfde eindterm. In hoofdstuk 7 is een concordantietabel opgenomen.

De doelstellingen voor *vaardigheden en attitudes* worden uitgeschreven voor het *geheel van de tweede graad*. Dit betekent dat hieraan in het eerste *én* in het tweede leerjaar aandacht moet besteed worden. Deze inhoudsoverstijgende doelstellingen bestrijken een zeer brede waaier van de wiskundevorming. Het betreffen doelstellingen die niet in een oogwenk gerealiseerd kunnen worden, maar waaraan voortdurend aandacht moet besteed worden.

Omwille van hun brede formulering en hun ruim toepassingsgebied kunnen ze op verschillende niveaus en verschillende wijzen gerealiseerd worden. Het gaat daarbij meer om het verwerven van een wiskundige dispositie en methode, dan wel om concreet specifieke doelen. Daarom worden ze voor de verschillende leerplannen op dezelfde wijze geformuleerd. Dat wil niet zeggen dat ze op een zelfde wijze worden gerealiseerd. In de pedagogisch-didactische wenken wordt hierop meer genuanceerd ingegaan. Daartoe wordt in de wenken met behulp van een **A, 5, 4, 3, …** in de marge verwezen naar de leerlingengroep waarop ze betrekking hebben (respectievelijk **a**lgemeen voor alle groepen, **5** voor de vijf wekelijkse lestijden, **4** voor de vier wekelijkse lestijden, …).

In verband met de controle geldt de opmerking dat attitudes altijd na te streven zijn en dat de effecten ervan op de leerlingen geen deel uitmaken van een inspectieonderzoek.

De *leerinhoudelijke* doelstellingen worden opgedeeld in doelstellingen per leerjaar. Ze zijn ook samengebracht in onderdelen op basis van samenhangende leerinhouden. Met deze inhoudelijke groepering wil het leerplan niet opleggen op welke wijze de leerinhouden moeten aangebracht worden. Ook de volgorde, waarin de verschillende leerstofonderdelen in het leerplan zijn weergegeven, is niet noodzakelijk de volgorde waarin ze in de klas moeten worden behandeld. Zo is bijvoorbeeld een integratie tussen verschillende onderdelen mogelijk.

Om tegemoet te komen aan de onderlinge leerlingenverschillen is differentiatie noodzakelijk. Een eerste differentiatie wordt uiteraard bepaald door het aantal lestijden wiskunde per week en de daarvoor uitgeschreven leerplannen. Binnen elk leerplan worden nog meer mogelijkheden aangereikt door het opsplitsen van de doelstellingen in twee rubrieken: *basisdoelstellingen* en *uitbreidingsdoelstellingen*.

De *basisdoelstellingen* vormen een minimum. Bij het opstellen van het jaarplan moet er over gewaakt worden dat ze volledig kunnen verwerkt worden.

De *uitbreidingsdoelstellingen* bieden differentiatiemogelijkheden volgens de mogelijkheden die haalbaar zijn met de klasgroep en volgens de verdere studieloopbaan van de leerlingen. Naast de uitbreidingsdoelstellingen worden in de pedagogisch-didactische wenken nog aanwijzingen tot uitbreiding gegeven. In beide gevallen staat de commentaar onder de titel *Uitbreiding*.

Verwijzing naar de eindtermen *wiskunde* gebeurt naar hun *nummer* (bijv. Et 27 verwijst naar eindterm 27 van wiskunde). Verwijzing naar leerplandoelstellingen gebeurt met leerjaar, onderdeel, nummer en niveau. Zo verwijst **1g4B** naar het **1**ste leerjaar, onderdeel **g**etallenleer, doelstelling **4**, **b**asis.

Aanbeveling voor het aantal lestijden

Voor elk leerplan wordt een aanbeveling gedaan over het aantal te besteden lestijden. Deze getallen zijn slechts *richtinggevend*. Bij het samenstellen van de leerplannen werd ervoor geopteerd niet altijd het maximaal aantal beschikbare lestijden in te vullen. De leerkracht kan hierdoor zelf een aantal *eigen klemtonen* inschuiven, bijvoorbeeld door bepaalde aspecten van de basisdoelstellingen meer uit te diepen, door enkele uitbreidingsdoelstellingen te realiseren of door specifieke remediëringsopdrachten.

5.1 Vaardigheden en attitudes

5.1.1 VAARDIGHEDEN

	Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
	De leerlingen ontwikkelen (binnen het gekende wiskundig instrumentarium)	
1	rekenvaardigheid, o.m. – het vlot rekenen met getallen (zowel hoofdrekenen, cijferrekenen als rekenen met een rekenmachine); – het rekenen met formules en algebraïsche vormen; – het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden, stelsels, …; – het voorspellen en inschatten van de grootte-orde van een resultaat; – het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het uitvoeren van bewerkingen.	5
2	meet- en tekenvaardigheid, o.m. – het analyseren en opbouwen van een figuur bij een redenering; – ruimtelijk voorstellingsvermogen; – het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het opbouwen van figuren.	1 5
3	wiskundige taalvaardigheid, o.m. – het begrijpen van wiskundige uitdrukkingen (zowel mondeling als schriftelijk); – het lezen van figuren, tekeningen, grafieken en diagrammen; – het verwoorden van hun gedachten en hun inzichten (zowel mondeling als schriftelijk).	1

4
 	
5
	denk- en redeneervaardigheden, o.m.
	– het onderscheid maken tussen hoofd- en bijzaken, gegeven en gevraagde, gegeven en te bewijzen;
	– het begrijpen van een redenering of argumentering bij een eigenschap;
	– het gebruik van ICT-hulpmiddelen bij het opbouwen van een redenering;
	– het opbouwen van een redenering ter verklaring van een eigenschap of de oplossing van een probleem, dit houdt onder meer in:
	    – een hypothese (vermoeden) formuleren en argumenteren;
	    – een eigenschap formuleren op basis van een onderzoek op een aantal voorbeelden, een inductieve redenering;
	– een gegeven redenering op geldigheid onderzoeken;
	– zelf een verklaring of een bewijs opstellen;
	– een eigenschap verantwoorden door de deductieve samenhang met een andere eigenschappen aan te tonen.
		1
		5

5	probleemoplossende vaardigheden, zoals – een probleem leren ontdekken en behoorlijk leren stellen; – probleemoplossende vaardigheden (i.h.b. heuristische methoden) toepassen bij het werken aan problemen, zowel over alledaagse als over wiskundige situaties; bijv. een opgave herformuleren, een goede schets of een aangepast schema maken, notaties invoeren, onbekenden kiezen, voorbeelden analyseren; – reflecteren op de keuzen voor representatie, oplossingstechnieken en resultaten; – resultaten controleren op hun betrouwbaarheid en volledigheid; – ICT-hulpmiddelen gebruiken om wiskundige informatie te verwerken en wiskundige problemen te onderzoeken.	2 3 4 5
6	leervaardigheden, o.m. – het verwerken van losse gegevens; – het verwerken van samenhangende informatie; – het raadplegen van informatiebronnen; – het plannen van de studietijd; – het sturen van het eigen leerproces.	

Pedagogisch-didactische wenken

A

De leerlingen moeten bij hun wiskundevorming een aantal vaardigheden ontwikkelen. Voor de duidelijkheid werden ze gescheiden geformuleerd. Dit betekent echter niet dat ze altijd zo gescheiden voorkomen. In een wiskundig leerproces wisselen ze voortdurend af.

Het is belangrijk te beseffen dat vaardigheden maar bereikt worden doorheen een proces van langere duur. Een aantal vaardigheden werden aangezet in het basisonderwijs en de eerste graad. Ze moeten verder uitgewerkt worden in de tweede graad en eventueel nog verder in de derde graad.

Vaardigheden worden niet automatisch gegenereerd door de ermee verwante leerinhouden. Er moet bewust aandacht aan besteed worden. Dit betekent niet noodzakelijk dat ze in afzonderlijke lessen gepresenteerd moeten worden. Ze moeten precies meermaals bij het spontaan gebruik geëxpliciteerd worden.

Een aantal vaardigheden winnen aan belangrijkheid in functie van de vervolgopleiding van de leerlingen.

De mate waarin leerlingen bepaalde vaardigheden beheersen kan een aanwijzing zijn voor het oriënteren van de leerlingen in functie van hun latere studie- en beroepsloopbaan.

5

Bij een keuze voor vijf wekelijkse lestijden wiskunde mag verwacht worden dat de aandacht voor meer theoretische vaardigheden hoger ligt, zonder evenwel de praktische vaardigheden te verwaarlozen

1 Rekenvaardigheid

A

In de tweede graad worden leerlingen geconfronteerd met allerlei uitbreidingen van het rekenen, zowel binnen de getallenleer (bijv. wortelvormen), het algebraïsch rekenen (het ontbinden in factoren, het rekenen met formules, het rekenen met functievoorschriften) als het rekenen in de driehoeksmeting en de beschrijvende statistiek. Daarnaast worden rekenprocedures ontwikkeld voor het oplossen van vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels die voldoende moeten beheerst worden. Of het nu gaat over effectief rekenen of rekenprocedures, wiskunde kan daartoe niet gereduceerd worden. Ze zijn slechts *middelen* om problemen op te lossen. En precies daarbinnen krijgen ze hun juiste betekenis. Langdurig oefenen van rekenprocedures in een geïsoleerde situatie heeft dan weinig zin. Zoals hierboven vermeld zijn er voldoende natuurlijke gelegenheden om een gepaste rekenvaardigheid te verwerven.

Met de opgang van geavanceerde rekenmachines en gemakkelijk toegankelijke en adequate software kan de aandacht voor het automatiseren van deze technieken en procedures beperkt worden. Het is nu al duidelijk dat wie later nog rekenprocedures nodig heeft, in de praktijk veelal zal gebruik maken van moderne informatie- en communicatietechnologie. Weliswaar is inzicht nodig in de precieze werking van de gebruikte procedures. Het gebruik van een rekenmachine of een computer mag het inzicht in de noodzakelijke basisvaardigheden dus niet verminderen. Maar er zal minder aandacht besteed worden aan de manuele beheersing ervan. Ook de kritische houding ten aanzien van wat op het scherm van een toestel verschijnt moet verworven worden.

4/5

Anderzijds bieden rekenmachines nieuwe mogelijkheden. Praktische problemen die tot nu toe niet binnen het bereik van het secundair onderwijs lagen, omdat de berekeningen (bijv. bij het oplossen van vergelijkingen) te ingewikkeld of te moeilijk waren, kunnen nu wel behandeld worden.

2 Meet- en tekenvaardigheid

A

De meet- en tekenvaardigheid die in de eerste graad verworven werd kan nu bij het onderzoeken van eigenschappen goed gebruikt worden. Het lezen en interpreteren van figuren is een belangrijk onderdeel van een meetkundig analyseproces. Ook bij de ontwikkeling van ruimtelijk inzicht is het voorstellingsvermogen essentieel. Leerlingen moeten de gewoonte aannemen bij een meetkundig probleem, zowel in het vlak als in de ruimte, een tekening of een schets te maken.

Ook het lezen en interpreteren van informatie uit grafieken en diagrammen kan onderhouden worden bij het oplossen van problemen, o.m. in het onderdeel beschrijvende statistiek, door die aan te bieden in allerlei presentaties. Bij de studie van reële functies krijgt het begrip grafiek meer wiskundig gehalte. Leerlingen moeten vaardig worden in het lezen van de informatie die hierin verstrekt wordt. Ze moeten probleem, grafiek en voorschrift met elkaar kunnen verbinden.

4/5

Grafische rekentoestellen en wiskundige software bieden de mogelijkheid om van bij de aanvang van de studie van functies de grafiek er bij te betrekken. Leerlingen kunnen de invloed van parameters op het verloop zelf in een oogwenk onderzoeken. Grafische rekenmachines kunnen als een veredelde pen een meerwaarde brengen aan de behandelde leerinhoud, zonder dat ze een aantal basisvaardigheden overbodig maken. Zo dienen leerlingen toch kritisch om te springen met de getoonde resultaten, bijvoorbeeld de begrensdheid inzien van het uitleesvenster of een snelle controle uitvoeren (cf. het schatten bij het rekenen) aan de hand van een nulpunt of van enkele specifieke punten, het stijgen en dalen van de grafiek, eventueel het asymptotisch gedrag.

Een bijzondere en ‘nieuwe’ vaardigheid is het omgaan met informatie uit meetkundige figuren gepresenteerd op het scherm van een computer of een grafische rekenmachine. Een eerste stap daarin is dat leerlingen de soms compact aangeboden informatie leren lezen en interpreteren. Daarnaast moeten ze het gebruik van dergelijke programma’s verwerven, zodat ze zelf met behulp van het toestel situaties kunnen onderzoeken.

3 Wiskundige taalvaardigheid

A

Wiskunde is uitgegroeid tot een wetenschap waarin begrippen en eigenschappen welomschreven moeten worden. Daartoe wordt de omgangstaal vaak verengd tot een meer *specifieke vaktaal* met eigen regels.

Begrippen, eigenschappen, procedures en wiskundige verbanden worden erin omschreven met behulp van typische *vaktermen* (bijv. vierkantswortel, evenredig, richtingscoëfficiënt, stelsel, evenwijdig met, middelloodlijn, ligt op gelijke afstand van, histogram, ...). Soms moet een onderscheid gemaakt worden tussen de wiskundige en de dagelijkse betekenis van een term, waarbij de wiskundige betekenis meestal minder vaag omschreven wordt. In de omschrijving van de begrippen en de formulering van eigenschappen worden naast vaktermen specifieke *kernwoorden* gebruikt, die wijzen op het veralgemeningsproces, verbanden, samenhang, ... (bijv. gelijk aan, als ... dan, daaruit volgt, alle, sommige, ...). De wiskundetaal kent vanuit haar voorgeschiedenis een sterke *formalisering* en *symbolisering* die snelle communicatie en universalisering mogelijk maakt, maar die wiskunde voor sommige leerlingen precies zo moeilijk toegankelijk maakt. De eisen die gesteld worden aan deze formalisering zullen uiteraard toenemen naarmate de leerling voor een hoger aantal wekelijkse lestijden wiskunde kiest. Naast de verbale taal is in wiskunde de specifieke *visuele taal* van tekeningen en wiskundige voorstellingen van belang. Een bijzondere vorm van visueel geordend aanbieden van informatie is die in tabelvorm.

Buiten de vaktaal waarmee wiskunde opgebouwd wordt, moeten leerlingen de *beschrijvende taal* blijven hanteren waarin over het wiskundig handelen gesproken wordt (met termen zoals definitie, eigenschap, kenmerk, verklaar ..., bereken..., los op ..., construeer ..., vraagstuk).

Tenslotte, reële problemen worden meestal niet rechtstreeks in de wiskundetaal gesteld. Een belangrijke vaardigheid is het omzetten, het *vertalen* van de omgangstaal naar de wiskundige vaktaal.

In de tweede graad moeten leerlingen vertrouwd geraken met de verschillende aspecten van de wiskundetaal. In een actief leerproces krijgen de leerlingen heel wat kansen om de verschillende communicatieve vaardigheden (zowel lezen, luisteren, spreken als schrijven) te hanteren en ze toe te passen op wiskundige situaties. In communicatie met andere leerlingen kunnen voorbeelden en tegenvoorbeelden van begrippen en eigenschappen besproken worden, wat de begripsvorming ondersteunt. Speciale aandacht kan gaan naar de betekenis van de wiskundige vaktermen en kernwoorden. De leerlingen moeten leren de geëigende vaktermen correct te gebruiken. Ze moeten vertrouwd geraken met strengere eisen die aan wiskundige wendingen worden gesteld. Toch mag dit niet leiden tot een stroef en steriel gebruik van de wiskundetaal. Leerlingen moeten leren hun ervaringen, bevindingen, vermoedens, besluiten en oplossingen te verwoorden. Precies in het verwoorden van hun gedachten en hun inzicht kunnen ze beter de tekortkomingen ervan ervaren en daardoor hun inzicht verdiepen.

Omdat wiskundige informatie visueel kan overgebracht worden, moet aandacht besteed worden aan het lezen en interpreteren van visuele informatie (bijv. op tekeningen in de meetkunde of informatie op een grafiek of een diagram). Het hanteren van een schets of een nauwkeurige tekening als middel tot communicatie moet aangemoedigd worden. Het maken van een meer abstracte of formele redenering zal ondersteund worden door het redeneren op figuren.

3/4 Bijzondere aandacht moet besteed worden aan het verwerven van de leesvaardigheid bij het lezen van de tekst van opgaven, problemen en vraagstukken. Vaak is deze moeilijkheid voor de leerlingen groter dan het uitvoeren van gekende rekentechnieken. Aan deze belangrijke stap, noodzakelijk bij het analyseren van problemen en het formuleren van vermoedens, moet bijzondere aandacht besteed worden.

5 Het spreekt voor zich dat aan de eisen van de taal van de leerlingen hogere eisen kunnen gesteld worden wat betreft exactheid, duidelijkheid, overzichtelijkheid en bondigheid.

Van de leerlingen mag verwacht worden dat ze de voordelen van een formelere taalvorm waarderen en daardoor gemotiveerd zijn om zich deze taalvorm eigen te maken. Het verwerven ervan verloopt echter niet zonder inspanning en zou in een geleidelijk en gedifferentieerd proces moeten gebeuren. Dat betekent concreet dat bepaalde aspecten al geformaliseerd kunnen worden, waar andere, bijv. bij nieuwe leerinhouden, nog op een minder geformaliseerd taalniveau kunnen verlopen. Formalisering en symbolisering zijn geen doel op zich, maar moeten functioneel ingeschakeld worden.

De leerlingen moeten een aantal argumentaties, verklaringen en bewijzen kunnen geven. Ook hier zal de wiskundetaal verzorgd worden. Bovendien zal voldoende aandacht besteed worden aan een ordelijke presentatie.

4 Denk- en redeneervaardigheden

A Met denk- en redeneervaardigheden worden onder meer bedoeld abstraheren (bij de begripsvorming), een vermoeden formuleren, veralgemenen (ontdekken van een eigenschap), analyseren, synthetiseren, structureren, ordenen, analoog werken, argumenteren, bewijzen. Het gaat om meer dan het kunnen bewijzen van eigenschappen.

Vanuit het actief onderzoeken van relaties tussen begrippen worden leerlingen geconfronteerd met vele vormen van beweringen en vermoedens. Niet elk intuïtief vermoeden leidt tot een 'eigenschap', niet elke bewering zal blijken juist te zijn, veralgemeenbaar, ... Daarom is het zinvol bij de besluitvorming aandacht te besteden aan de argumenten die ervoor kunnen gegeven worden. Ook bij actief probleemoplossen zullen de leerlingen hun oplossing of hun redenering op een of andere wijze moeten argumenteren.

3/4 Het verwerven van deze redeneervaardigheid vraagt een geleidelijke en geduldige aanpak. Zinvol is aandacht te besteden aan de verschillende fasen van het opbouwen van een redenering of een bewijs, o.m. het redeneren op een tekening, het argumenteren van delen van een redenering (bijv. het expliciteren van gegeven en te bewijzen), het inzien van en/of zelf ontdekken van de kernidee uit een redenering, het begrijpen en uitleggen van een gegeven bewijs, het maken van redeneringen in analoge situaties, het zelf uitschrijven van een behoorlijk geordende redenering.

5 Er zal voldoende aandacht besteed worden aan het verfijnen van de argumentatie die de leerlingen aanreiken om vermoedens te onderbouwen. Geleidelijk aan moet daaruit het inzicht in wiskundig bewijzen groeien. Waar mogelijk zullen de eerder spontane opwerpingen, om een oplossing te 'verdedigen', gebruikt worden om een leergesprek op te zetten, waarin de leerlingen onderling en ten aanzien van de leerkracht hun argumentatie uitwisselen. De leerkracht zal ervoor zorgen dat in deze fase aangebrachte argumenten kritisch bevraagd en getoetst worden. Belangrijk hierbij is dat weerhouden argumenten als valabel aanvaard worden en dat de reden van het afwijzen van argumenten wordt ingezien. In de eerste graad maakten de leerlingen al kennis met dergelijke ‘verklaringen’. In de tweede graad moeten deze verklaringen kwalitatief beter worden. Dat betekent dat naast de redenering zelf, het ordelijk uitschrijven ervan een doelstelling wordt.

In de tweede graad moeten de leerlingen leren zelf een bewijs op te bouwen, bijv. als verklaring bij een eigenschap of een toepassing, als verantwoording van de oplossing van een probleem. Belangrijk daarbij is dat de leerlingen zelf leren een analyse maken van de mogelijkheden om een bewijs op te bouwen. In deze fase kunnen de leerlingen de wisselwerking tussen kenniselementen en zoekstrategieën, en het belang van beide, ervaren. Daarna volgt het stap voor stap uitklaren en ordelijk uitschrijven van het hiervoor genoemde argumentatieproces. Het formele bewijs is daarin de laatste stap. Dit doel betekent niet dat nu alles moet bewezen worden. Voor nieuwere onderdelen kan een intuïtievere kennismaking volstaan. In de meetkunde kan bijvoorbeeld geïllustreerd worden dat voor redeneringen en verklaringen verschillende uitgangspunten mogelijk zijn.

Tenslotte moeten leerlingen geleidelijk het inzicht verwerven dat ze voor hun verantwoordingen niet zomaar in het wilde weg argumenten kunnen aanbrengen, maar dat ze moeten terugvallen op een samenhangend geheel van eigenschappen. Het flexibel organiseren van deze kennis is een belangrijk doel voor de tweede graad. Zo vergt het inzicht in hun kennisorganisatie dat leerlingen het onderscheid begrijpen tussen definitie, kenmerk en eigenschap. Een strenge axiomatische opbouw (d.w.z. vanuit een minimaal axiomastelsel) moet evenwel nog niet worden nagestreefd.

5 Probleemoplossende vaardigheden

A

Leerlingen moeten vaardigheid verwerven in het zelfstandig oplossen van problemen. Het bevorderen van dit probleemoplossend denken is een van de voornaamste opdrachten van leerkrachten wiskunde. De transferwaarde van deze vaardigheden naar andere vakken kan zeer groot zijn. Probleemoplossende vaardigheden zijn een essentiële troef in de studie- en beroepsloopbaan van leerlingen.

De meest zinvolle aanpak lijkt die van een volgehouden *integratie* ervan *in het normale lesgebeuren*. Leerlingen zullen deze vaardigheden maar verwerven doorheen een actief proces van zich vragen stellen, patronen ontdekken, antwoorden zoeken en onderzoeken, voorbeelden en tegenvoorbeelden opzoeken, vraagstelling vereenvoudigen, voorstellen analyseren, testen en bijsturen, vermoedens argumenteren, ...

Belangrijk is dat de leerlingen aantrekkelijke, haalbare problemen aangeboden krijgen. Vooral succeservaring zal leerlingen aanzetten om nieuwe en moeilijkere problemen aan te pakken. Leerlingen moeten evenwel problemen leren ‘zien’. Daarom zullen geregeld open problemen, weliswaar haalbaar op het niveau van de leerlingen, aangeboden worden. Problemen moeten niet noodzakelijk altijd buiten de wiskunde gezocht worden. Ook wiskundige situaties kunnen als aantrekkelijke problemen gepresenteerd worden.

Het verwerven van probleemoplossende vaardigheden is een lang en arbeidsintensief proces. Daarom moet de aanpak in de tweede graad aansluiten op de inspanningen die al in de eerste graad werden gedaan. Zo kan men terugvallen op verschillende stappen die voor leerlingen misschien al vertrouwd zijn.

In de eerste plaats zal aandacht besteed worden aan een goede *probleemstelling*. Het probleem moet voor de leerlingen duidelijk zijn (dit kan bijvoorbeeld door de leerlingen het probleem in eigen woorden te laten stellen). Als het gaat om het onderzoeken van verbanden of eigenschappen moet dit leiden tot een duidelijke formulering van een vermoeden of hypothese.

Daarop volgt het *analyseren* en/of het *mathematiseren*. Dit betekent dat de leerlingen de wiskundige probleemstelling kunnen herkennen in het gestelde probleem of in de opgave (bijv. het gaat er om aan te tonen dat rechten loodrecht op elkaar staan). Dit betekent onder meer dat ze bij een situatie gegeven en gevraagde kunnen bepalen, kwantificeerbare elementen kunnen opzoeken en wiskundig vertolken, relaties tussen elementen (gegevens onderling, gegevens en gevraagde) kunnen leggen en wiskundig vertolken, uit te voeren bewerking(en) kunnen bepalen. In deze fase worden vaak *zoek-strategieën* of *heuristische methoden* gebruikt. In een leerproces van probleemoplossende vaardigheden is het belangrijk deze te expliciteren. Bij een complexer probleem is het zinvol in deze fase een planmatige aanpak te voorzien en de uitvoering van het plan verderop te bewaken.

Daarop volgt het *uitschrijven van een oplossing, het berekenen van het resultaat of het uitschrijven van een verklaring*, het maken van een *(reken)proef*, het maken van een *realiteitsproef* (kan dit resultaat in deze context) en het formuleren van een *antwoord* op het gestelde probleem.

Heuristische methoden

Voorbeelden van veel gebruikte heuristische methoden zijn:
- gegeven en gevraagde wiskundig expliciteren;
- bij een gegeven situatie een schets of een tekening maken;
- bij een gegeven situatie een voorbeeld of een tegenvoorbeeld geven;
- bij een situatie bijzondere gevallen onderzoeken;
- gebruik maken van analogie, symmetrie, …;
- een eenvoudigere probleemstelling onderzoeken;
- een of meer veranderlijken in het probleem constant houden;
- een gestelde voorwaarde laten vallen.

Heuristische methoden worden veelvuldig gebruikt. Belangrijk is ze bewust te laten ervaren en te expliciteren op het ogenblik dat ze spontaan gebruikt worden. Een actieve aanpak van het leerproces laat toe dat leerlingen hierover onderling en met de leerkracht informatie uitwisselen. Met het oog op het verwerven van een hogere graad van zelfwerkzaamheid bij de leerlingen kan een aantal complexere oefeningen aangeboden worden waarbij doelbewust het inzicht in het gebruik van heuristische methoden wordt nagestreefd.

Bij het oplossen van problemen worden de leerlingen geconfronteerd met het toepassen van hun kennis in diverse situaties. Het is belangrijk te beseffen dat probleemoplossende vaardigheden en heuristische methoden maar effectief zullen werken, als de leerlingen over een efficiënte kennisorganisatie beschikken. Het oplossen van problemen kan leerlingen precies motiveren deze kennisorganisatie te onderhouden.

De *rol van de leerkracht* kan erin bestaan leerlingen individueel tot nadenken aan te zetten, discussie over oplossingen uit te lokken en hierbij een kritische houding aan te bevelen. De leerkracht kan verkiezen minder inhoudelijke hulp aan te reiken, maar eerder te verwijzen naar het gebruik van heuristische methoden en de beschikbare kennisorganisatie (niet naar specifieke kennis). De leerkracht zou dezelfde werkwijze kunnen hanteren bij het klassikaal opstellen van bewijzen van eigenschappen en het opbouwen van redeneringen. Ook is het zinvol dat de leraar aan het eind van een oplossingsproces of redenering de denkstappen eens controlerend overloopt en de gebruikte heuristische methoden eens expliciet laat formuleren of bevragen.

Het verdient aanbeveling dat voldoende differentiatie in de opdrachten wordt nagestreefd, omdat in de verwerving van probleemoplossende vaardigheden het verschil tussen de leerlingen erg groot kan zijn. Hierdoor kan zowel een wiskundig-sterke leerling aan zijn trekken komen, als tijd vrijgemaakt worden voor het begeleiden van de wiskundig-zwakke leerlingen. Voor wiskundig-sterke leerlingen kan men bijv. vlugger naar open problemen grijpen.

6 Leervaardigheden

A

Aan het verwerven van leervaardigheden moet in de tweede graad nog bewust gewerkt worden. Daarbij moet meer aandacht gaan naar het zelfstandig leren van de leerlingen. Belangrijk is dat de bijdrage van wiskunde kadert in een bredere aanpak van de problematiek leren-leren in de school en de groei naar een zelfverantwoord leren. Omdat het 'de leerling' is die adequate technieken moet verwerven, zal over de vakken heen toch een zekere eenvormigheid nagestreefd worden. Algemene technieken worden uiteraard vakspecifiek vertaald.

Bij het verwerven van wiskunde worden een aantal *leervaardigheden* geactiveerd.

Voorbeelden zijn
- het inprenten (notaties, symbolen, formules);
- het gebruik van de vormkenmerken van een tekst (titels, subtitels, afbeeldingen, schikking kaders, lettertype, tekstmarkeringen);
- de aandacht voor het begrijpen en analyseren van het geleerde;
- het opnieuw opzoeken en zo nodig inoefenen van voorkennis (het aanleggen of gebruiken van een vademecum kan hierbij ondersteunend werken);
- het verdiepen van de leertekst in leerboeken of notities (zich vragen stellen bij de leerinhoud, de tekst structureren bijv. met tekstmarkeringen, kleur, ..., het bijhouden van een kennisschema);
- het gebruiken van 'informatiebronnen' (een inhoudstafel, een register, een samenvatting van de leerinhouden in het leerboek, een vademecum, een handleiding van de rekenmachine);
- het zichzelf sturen bij het leren, bijv.
  - de keuze van het verwerkingsproces eigen aan de wiskundige leerinhoud,
  - het oordeelkundig gebruiken van een antwoordblad, een correctiesleutel,
  - het plannen van de studietijd,
  - het onderzoeken van de gemaakte fouten (bijv. door de eigen werkwijze te vergelijken met die van anderen, aangeven waarom iets fout gegaan is) en hoe die kunnen vermeden worden.

Belangrijk is te beseffen dat *tijdens het leerproces* zelf al sterk kan bijgedragen worden tot het realiseren van leervaardigheden. Zo kan een leerproces waarin de leerling actief betrokken wordt bij het bevragen van de leerinhouden, die leerling leren 'vragen stellen'. Het 'analyseren' van een definitie of eigenschap in de klas ondersteunt het analyseren tijdens het instuderen. Het gebruik van een ordelijk bordschema met het geëxpliciteerd (niet automatisch) gebruik van verdiepingstechnieken (kleur, kaders, structuur) zal leerlingen aanzetten dit te doen. Het vergelijken van het bordschema met de neerslag van de leerstof in het leerboek (veel meer dan het aanduiden van de leerstof) en het wijzen op de vormkenmerken ervan ondersteunt het leren. Het hernemen van de structuur bij de aanknopingsfase van de les, het laten raadplegen van overzichten van leerinhouden (bijv. samenvatting in het leerboek en/of in een beschikbaar of eigenhandig aangelegd vademecum) zal hen telkens opnieuw confronteren met structurering en synthese van hun kennis en hen meteen leren hun voorkennis zelfstandig op te zoeken en aan te vullen. De wijze waarop de leerkracht omgaat met fouten en deze aangrijpt als leerkansen, kan leerlingen de waarde leren van het onderzoeken van hun fouten. De wijze waarop leerlingen betrokken worden bij het leerproces kan hun zelfwerkzaamheid en hun verantwoordelijkheid voor het eigen leren versterken.

5.1.2 ATTITUDES

	Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et

De leerlingen ontwikkelen

7	zin voor nauwkeurigheid en orde, o.m. – een houding van gecontroleerd uitwerken en terugkijken op uitgevoerde opdrachten.	
8	zin voor helderheid, bondigheid, volledigheid, eenvoud en doelmatigheid van de gebruikte wiskundetaal, o.m. – de ervaring dat gegevens uit een probleemstelling toegankelijker worden door ze doelmatig weer te geven in een geschikte wiskundige representatie.	6
9	kritische zin, o.m. – een kritische houding tegenover de eigen berekeningen, beweringen, handelingen, ...; – een reflectieve houding ten aanzien van gemaakte keuzen voor representatie en oplossingstechnieken; – een kritische houding tegenover de mogelijkheden en de beperkingen van het gebruik van wiskunde.	
10	zelfvertrouwen, zelfstandigheid, doorzettingsvermogen en doelmatigheid bij het aanpakken van problemen en opdrachten.	6 8 9
11	zelfregulatie, o.m. – een onderzoeksgerichte houding ten aanzien van feiten, opgaven en problemen; – het oriënteren, plannen, uitvoeren en bewaken van een oplossingsproces.	7
12	zin voor samenwerking en overleg, o.m. – de ervaring dat ze hun mogelijkheden kunnen vergroten door samenwerking met anderen; – appreciatie voor een andere oplossing of aanpak.	10
13	waardering voor wiskunde door inzicht in de bijdrage ervan in de culturele, historische en wetenschappelijke ontwikkeling, o.m. – zin voor verwondering en bewondering voor de elegantie van een redenering of een oplossing;	11
5	– gerichte belangstelling voor wiskundige aspecten van problemen en oplossingen.	

	Pedagogisch-didactische wenken

A

Doorheen de wiskundevorming kunnen leerlingen een aantal attitudes en in het bijzonder leerattitudes verwerven. Omdat zoals bij leervaardigheden het de leerling is die attitudes moet verwerven, zal over de vakken heen een zekere eenvormigheid nagestreefd worden en moet de bijdrage van wiskunde *kaderen in een bredere attitudevorming in de school*.

Het is belangrijk te beseffen dat attitudes maar bereikt worden doorheen een *proces van langere duur*. Daarom zullen attitudes nagestreefd worden op grond van wat al verworven werd in de basisschool en in de eerste graad en zullen ze in de derde graad nog verder ondersteund worden.

7 Zin voor nauwkeurigheid en orde

A

Zin voor nauwkeurigheid en orde kan nagestreefd worden bij de ontwikkeling van reken-, meet- en tekenvaardigheid. In de tweede graad moeten de leerlingen beschikken over de gewoonte op hun uitvoeringsproces terug te kijken als een vorm van *controle*. Ze kunnen zo vlugger tot nauwkeurige resultaten komen.

Omdat de graad van complexiteit van de wiskunde en de opdrachten toeneemt, moet nauwkeurigheid nagestreefd worden bij het gebruik van notaties en symbolen, bij het verwoorden van definities en eigenschappen (zowel schriftelijk als mondeling). Het leerproces in de klas moet voldoende kansen bevatten om terugkoppeling te geven over antwoorden en oplossingen van leerlingen zelf. Het is precies in het toetsen van hun onvolmaakte antwoord dat de leerlingen de kans krijgen het te corrigeren.

Ordelijk en systematisch werken is een belangrijke leerhouding. Ze kan bijgebracht worden bijvoorbeeld bij het noteren, het maken van oefeningen en het aanpakken van problemen.

5 Van de leerlingen wordt verwacht dat ze de wiskundetaal in haar verschillende aspecten vlotter kunnen hanteren. Met het oog op de doorstroming worden hogere eisen gesteld aan de nauwkeurigheid van formuleringen en oplossingen. De leerprocessen kunnen zo geconcipieerd worden dat deze eisen in de tweede graad geleidelijk toenemen. Zo kunnen de leerlingen er stilaan mee vertrouwd worden en er het nut van inzien.

8 Zin voor kwaliteit van de wiskundige representatie

A Leerlingen moeten hun gedachten en hun inzicht behoorlijk leren verwoorden. Het leerproces in de klas moet daartoe voldoende kansen bieden. Vanuit de vaak intuïtieve verwoording in de fase van de begripsvorming of het vermoeden van een eigenschap moeten de leerlingen geleidelijk aan een correcte wiskundetaal hanteren. Een wiskundige formulering is vaak helder, bondig en van alle ballast ontdaan. De leerlingen kunnen hierbij ervaren dat het gebruik van dergelijke formuleringen vaak het denkproces helder doet verlopen. Ligt de beknoptheid van symbolische formuleringen voor de hand, dan is een behoorlijke verwoording ervan vaak een probleem. Dit vraagt bijzondere aandacht.

Omdat een zoekproces soms met vraag en antwoord, met gissen en missen en dus niet rechtlijnig ontwikkeld wordt, zal eens het doel bereikt, de uiteindelijke redenering synthetiserend overlopen worden, om een helder inzicht te bekomen. Voor leerzwakke leerlingen biedt dit vaak de gelegenheid terug aan te pikken. Ook bij het oplossen van problemen zal aandacht besteed worden aan het overhouden van een duidelijke synthese. Een heldere oplossing zal meestal overzichtelijk zijn en gemakkelijker te begrijpen. Zowel bij het leerproces van de wiskundige inhouden zelf, als bij het probleemoplossen zal men bij het synthetiserend overlopen aandacht besteden aan de doelmatigheid van een aanpak door de voor- en nadelen van bepaalde werkwijzen te bespreken.

5 De leerlingen die vijf wekelijkse lestijden wiskunde hebben gekozen moeten geleidelijk vertrouwd gemaakt worden met het opzoeken van de verschillende mogelijkheden en situaties bij wiskundige beweringen. Deze eis naar volledigheid moet hen confronteren met de mogelijkheid van verschillende situaties en interpretaties bij een zelfde bewering (bijv. met een meer systematisch aangepakte gevalsonderscheiding) en met de consequenties van beweringen eens een bepaald kader is aanvaard.

9 Kritische zin

A Wiskundevorming moet leiden tot een bevragende, onderzoekende, controlerende, verifiërende houding. Dit wil zeggen dat berekeningen (zowel bij hoofdrekenen en schriftelijk rekenen als bij het gebruik van een rekenmachine), beweringen, argumenten en redeneringen niet zomaar worden aanvaard en overgenomen. Dit slaat op vermoedens, oplossingstechnieken, redeneringen door leerlingen in de klasgroep gebracht ter bespreking. Dit slaat op de zelf gekozen modellen of representaties en op de eigen berekeningen, oplossingen en redeneringen. Bij de keuze van een model of bij een berekening, een redenering, een oplossing van een probleem zijn zowel het proces als het eindproduct van belang. Oog krijgen voor de oplossingsmethode kan leiden tot het leren waarderen van andere oplossingen. Zo kunnen de leerlingen een werkwijze of methode leren waarderen omdat ze eenvoudiger is, minder tijd vraagt, wiskundig helder geformuleerd is, sneller veralgemening toelaat.

4/5 Omwille van de plaats die wiskunde inneemt in de vorming (basisvorming versus fundamentele vorming) is het evident dat de verwachtingen ten aanzien van leerlingen hoger mogen liggen, naarmate ze een groter aantal lestijden wiskunde per week hebben. Naarmate men doordringt in de wiskundekennis moet ook de bevragende, onderzoekende, controlerende, verifiërende houding groeien. Ze is onmisbaar bij de verdere ontwikkeling van wiskunde. Gelukkig doen zich ook meer kansen voor om ze te ontwikkelen.

Belangrijk is dat deze onderzoekende houding herkenbaar is in het didactisch optreden van de leerkracht. Zowel de aanbreng van nieuwe leerinhouden als het toepassen van kennis en het oplossen van problemen bieden kansen tot stimulerende klassengesprekken. Leerlingen zullen maar oog krijgen voor het oplossings'proces', als hieraan ook tijdens het onderwijsleerproces voldoende aandacht besteed wordt en als ze bijvoorbeeld gestimuleerd worden verschillende oplossingen of antwoorden te vergelijken.

Doorheen het ontwikkelen van een dergelijke kritische houding worden leerlingen geconfronteerd met de mogelijkheden en de beperkingen van het gebruik van wiskunde in de praktijk. Dat is een belangrijke houding voor wiskundegebruikers, die de meeste leerlingen in de toekomst zullen zijn. Een gezonde relativering naast de verwondering over de mogelijkheden van de wiskunde kan bij leerlingen leiden tot een gemotiveerde, evenwichtige opvatting over wiskunde.

10 Zelfvertrouwen en zelfstandigheid

A

Bij vaardigheden werd uitvoerig ingegaan op het aanpakken van problemen. Het is niet moeilijk in te zien dat het verwerven van probleemoplossende vaardigheden een uitgelezen kans biedt om zelfwerkzaamheid en doorzettingsvermogen te verwerven.

Een goede aanpak van deze leerprocessen zal de leerlingen een solide basis geven waarop zij kunnen terugvallen. Succeservaring zal daarbij het zelfvertrouwen en de motivatie van leerlingen onderbouwen. Wiskundig minder begaafde leerlingen geraken snel ontmoedigd als ze geen succes kennen. Ze moeten aangezet worden een zelfde stap meermaals te hernemen. In een gedifferentieerde aanpak kunnen oefeningen zo aangeboden worden, dat voor die leerlingen de stappen niet te groot zijn. Voor anderen kan geopteerd worden voor een meer open vorm van aanbieden, zodat ze leren zelf een probleem te ontdekken en te stellen.

Het is evident dat leerlingen fouten zullen maken. In een te uitsluitend cognitief gewaardeerd leerproces worden leerzwakke leerlingen daardoor wel eens benadeeld. Het is belangrijk in te zien dat fouten maken inherent deel uitmaakt van het (wiskundig) leerproces. Een goede leerkracht zal deze aanwenden als belangrijke leerkansen. Een aanmoedigende en respectvolle benadering zal leerlingen zeker stimuleren en uiteindelijk leiden tot betere resultaten.

11 Zelfregulatie

A

Bij het oplossen van problemen moeten de leerlingen over een goede kennisorganisatie beschikken en zoekstrategieën kunnen hanteren. Daarnaast moeten ze hun zoeken en werken gecontroleerd uitvoeren. Dit betekent dat ze zelf hun werk kunnen 'reguleren'. Dit houdt onder meer in dat ze hun resultaat toetsen (bijv. bij een rekenresultaat zowel op juistheid als op realiteitswaarde). Het is echter niet alleen aan het einde van het proces dat 'controle' nodig is. Die kan van bij de aanvang in het oplossingsproces opgenomen worden. Van bij de verkenning van het probleem (de oriëntatie), bij het opmaken van een uitvoeringsplan en bij de uitvoering zelf kan stapsgewijze gewerkt worden en kan elke stap gecontroleerd worden. Zo leidt het aanpakken van problemen tot een onderzoeksgerichte houding en tot methodisch, planmatig en gecontroleerd werken. Bij het opzetten van een redenering, bij het verklaren van een eigenschap kunnen dezelfde regulatietechnieken gevolgd worden.

Het is evident dat leerlingen deze houding maar geleidelijk aan zullen verwerven en dat dit gemakkelijker zal gaan, naarmate deze houding tijdens de leerprocessen in de klas aan bod komt in de werkwijze van de leerkracht.

Met het ontwikkelen van een dergelijke onderzoeksgerichte houding kan wiskunde bijdragen tot een meer algemene vorming. Ze kan overgedragen worden op het aanpakken van andere dan wiskundige problemen. Zo kan ze ondermeer leiden tot de leerhouding van methodisch, planmatig en gecontroleerd werken. Op deze wijze kan wiskunde bijdragen tot het verwerven van een kritische houding ten aanzien van het globale eigen denken en handelen.

5

Van leerlingen die kiezen voor een sterker wiskundepakket in hun vorming mag verwacht worden dat ze creatiever zijn in de aanpak van problemen, dat ze daartoe meer zelf initiatief nemen en dat ze in een hogere mate zelfstandig hun oplossingsproces en hun leerproces kunnen organiseren, uitvoeren en bewaken. Het zijn kwaliteiten die een belangrijke troef kunnen betekenen in hun ontwikkeling, hun verdere studie- en beroepskeuze. Het leerproces moet voldoende gelegenheden creëren om leerlingen deze mogelijkheden te laten ontdekken en ontwikkelen. Meer open gestelde opdrachten kunnen hier een bijdrage leveren. Een andere mogelijkheid wordt zeker geboden door hen zelf een beperkt onderdeel van de leerinhouden te laten verwerken aan de hand van goed gekozen leermateriaal. In de tweede graad moet hierop weliswaar nog een door de leerkracht begeleide controlefase volgen.

12 Zin voor samenwerking en overleg

A

Een onderwijsleerproces waaraan de leerlingen volwaardig en actief kunnen deelnemen, waarin ze hun bevindingen en hun oplossingen kunnen vergelijken en toetsen aan die van anderen, kan hen een positieve waardering bijbrengen voor samenwerking en overleg. Bij het bespreken van oplossingsmethoden, bij het kritisch onderzoeken van elkaars oplossing kan waardering voor elkaars mening aangeleerd worden en daardoor waardering voor de persoon van de andere zelf.

Bij het uitvoeren van een aantal opdrachten, bijv. het oplossen van bepaalde (ruimer gestelde) problemen, het opzoeken van allerlei historische gegevens, het opzoeken op Internet over wiskundigen, belangrijke wiskundige stellingen, wiskundige illustraties of toepassingssituaties kan de samenwerking gestimuleerd worden door de opdrachten in groep te laten afwerken. Zo kunnen leerlingen aangezet worden tot samenwerking en overleg.

Actieve leerprocessen zullen wiskundig-sterke leerlingen zeker niet benadelen. Daarom moet er over gewaakt worden dat ook de wiskundig-zwakke leerling voldoende waardering ervaart in het onderwijsleerproces.

13 Waardering voor wiskunde

A

Wiskundevorming staat niet los van die van de andere vakken. Wiskunde zelf is doorheen eeuwen ontwikkeld precies in samenhang met de opvattingen en de problemen van die tijd. Een aantal historische contexten bieden vandaag nog een zinvolle instap om bepaalde wiskundeproblemen en leeronderdelen aan te pakken. Daarom zal die historische context geïntegreerd worden in de aanpak.

Een meer realistische aanbreng en voldoende concrete toepassingen moeten er borg voor staan dat de ontwikkeling van wiskunde bij de leerlingen niet los staat van de wereld rondom hen. Anderzijds biedt wiskunde zelf heel wat kansen om door te dringen tot de essentie van bepaalde problemen en situaties. Door een beter begrijpen kan de verwondering en de bewondering voor de context groeien. De elegante wijze waarop met behulp van wiskunde problemen beschreven en opgelost worden kan op zich al verwondering wekken.

5

Op het einde van de tweede graad kunnen een aantal leerlingen een nieuwe keuze maken voor een vervolgopleiding met een aanzienlijk deel wiskunde in het vormingspakket. Dit keuzeproces mag niet verengd worden tot één moment. De bekwaamheid in en de ingesteldheid ten aanzien van wiskunde kan doorheen de tweede graad geleidelijk groeien. Leerlingen kunnen er zich van bewust worden dat een wiskundige beschrijving, dat een typisch wiskundige aanpak van problemen en situaties waarbij helderheid, bondigheid, … belangrijk zijn, hun goed ligt of hun belangstelling opwekt. Dit zijn elementen die hun keuzerijpheid kunnen bevorderen. Maar ook in het algemeen zal het wiskundig leerproces voldoende motiverende elementen inhouden, die gericht zijn op creatieve ontwikkeling.

leerplan a

vijf wekelijkse lestijden wiskunde

KSO studierichting

Beeldende en architecturale vorming

TSO-studierichtingen

Biotechnische wetenschappen
Industriële wetenschappen
Techniek-wetenschappen

5.2 Leerplan a - eerste leerjaar

5.2.1 MEETKUNDE

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **meetkunde** (basisdoelstellingen) worden ca. **35 lestijden** besteed

de stelling van Thales en gelijkvormigheid van vlakke figuren	ca. 18 lestijden
de stelling van Pythagoras en de driehoeksmeting van een rechthoekige driehoek	ca. 17 lestijden
vectoren	*ca. 10 lestijden*

Pedagogisch-didactische wenken

Door de studie van meetkunde moeten de leerlingen methoden verwerven om meetkundige problemen te herkennen en op te lossen, zowel in het vlak als in de ruimte. De nadruk moet liggen op zelf onderzoeken, analyseren, ordenen, verklaren, …, waarbij onder meer congruentie, gelijkvormigheid, toepassing van basisstellingen en coördinaten *middelen* zijn om meetkundige toepassingen en denkproblemen te behandelen.

Voor de opbouw van de meetkunde bestaat een zekere vrijheid. Enerzijds kunnen vanuit kennisschema's die de leerlingen hebben verworven nieuwe leerinhouden onderzocht en ingepast worden. Voordeel hiervan is dat leerlingen een *samenhangende kennisorganisatie* krijgen waarop ze kunnen terugvallen. Anderzijds kunnen bepaalde onderdelen op een intuïtievere wijze afzonderlijk aangepakt worden (bijv. stelling van Thales, gelijkvormigheid, stelling van Pythagoras), om vandaar af *geleidelijk aan meer aandacht* te besteden *aan opbouw en samenhang*. Voordeel hiervan is dat minder tijd moet geïnvesteerd worden in het verwerven en bewijzen van de basiseigenschappen en dat er tijd vrijkomt om aan onderzoek van meetkundige eigenschappen te besteden. De laatste keuze is zeker verantwoord als binnen het studierichtingsprofiel gekozen wordt voor een minder sterke theorievorming.

Alleszins moeten de leerlingen voldoende *zelf exploratief* te werk kunnen gaan in het onderzoeken van eigenschappen en opzoeken van verklaringen en samenhang.

Leerlingen moeten door exploratie, met behulp van heuristische methoden, leren de meetkundige probleemstelling in een situatie of opgave te herkennen. (Bijv.: dit probleem is te herleiden tot het aantonen dat twee rechten loodrecht op elkaar staan, of deze vraag is te herleiden tot een berekening of constructie met behulp van een evenredigheid van lengten van lijnstukken.) Zo is het aangewezen dat leerlingen een aantal opdrachten aangeboden krijgen waarbij de theoretische context niet meteen mee gegeven is. Ze moeten dan zelf in een breder verband achterhalen waartoe het gestelde probleem herleidbaar is, d.w.z. in hun kennisbestand op zoek gaan naar welk meetkundig 'model' de situatie gemathematiseerd kan worden.

Dan worden *argumenten* onderzocht om de oplossing te *verklaren*. Dit betekent dat eigenschappen worden aangewezen waaruit de nieuwe bewering kan worden afgeleid. Binnen wiskunde met vijf wekelijkse lestijden moet voldoende aandacht besteed worden aan het ordelijk opbouwen en uitschrijven van die redeneringen. Vandaar dat het belangrijk is dat leerlingen leren terugvallen op een ordelijk georganiseerd kennisbestand. Omdat eigenschappen in een onderzoeksfase (bijv. ook in oefeningen) en verklaringen in een leerproces met leerlingbetrokken werkvormen worden ontwikkeld zal meer dan voorheen zorg besteed worden aan dit kennisbestand, opdat leerlingen een voldoende duidelijk omschreven 'referentiekader' verwerven (zowel wat betreft de kennis zelf, als de mogelijkheden om de samenhang te verklaren). Omdat eigenschappen in een onderzoeksfase en argumenteringsfase vlot moeten kunnen gehanteerd worden, is het zinvol dat leerlingen hun kennis niet alleen logisch organiseren. Die ordening kan ook volgens schema's die gemakkelijk bruikbaar zijn bij het bewijzen van specifieke, veel voorkomende elementen (bijv. met welke eigenschappen is evenwijdigheid aan te tonen). In het onderdeel redeneervaardigheden bij 5.1 werden een aantal algemene suggesties in verband met het bewijzen opgenomen.

De leerlingen bezitten vanuit de eerste graad een aantal methoden en voorstellingstechnieken om *ruimtelijke situaties* te beschrijven. De eigenschappen, nu nog vaak in de vlakke meetkunde geformuleerd, moeten waar zinvol, in ruimtelijke situaties geïllustreerd worden en toegepast worden bij het oplossen van ruimtelijke problemen.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m1	B	Gelijkvormige driehoeken definiëren en construeren.	26
m2	B	Gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken formuleren.	
m3	U	Gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken bewijzen.	
m4	B	In het vlak de verschillende situaties onderzoeken die zich kunnen voordoen bij de projectie van een lijnstuk en een rechte op een rechte.	26
m5	B	De stelling van Thales formuleren.	
m6	U	De stelling van Thales bewijzen.	
m7	B	Gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Thales toepassen bij constructies en bij het berekenen van de lengte van lijnstukken.	26
m8	B	Gelijkvormigheid van driehoeken gebruiken om een evenredigheid van lengten van lijnstukken of een gelijkheid van hoeken te bewijzen.	
m9	B	De stelling van Thales gebruiken om de evenredigheid van lengten van lijnstukken te bewijzen.	

Pedagogisch-didactische wenken

Een aantal meetkundeonderwerpen vertonen raakpunten met onderwerpen die in dit leerplan in andere onderdelen vermeld worden. Dit biedt kansen voor een meer *geïntegreerde aanpak*. Voorbeelden zijn o.a. het koppelen van de stelling van Pythagoras aan de voorstelling van irrationale getallen en het integreren van een synthetische en analytische beschrijving van eenzelfde begrip of eigenschap.

Ontegensprekelijk bestaat er een *verwantschap* tussen de doelstellingen in verband met gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Thales. Het aanbrengen en verwerken van de leerinhouden kan daarom best geïntegreerd verlopen. De volgorde waarin deze onderwerpen behandeld worden zal afhangen van de keuzen die gemaakt worden in verband met de eigenschappen die men als 'basis' wil aanvaarden of die men wil bewijzen. De oplossing van een aantal toepassingen kan vaak verklaard worden vanuit beide leerstofonderdelen. Het inzicht wordt versterkt door aandacht te besteden aan de verschillende motiveringen. Een mogelijke *behandelingsvolgorde* is: gelijkvormigheid, projectie, stelling van Thales en dan de toepassingen geïntegreerd aanbieden. Een andere mogelijkheid is projectie en de stelling van Thales voor de gelijkvormigheid van driehoeken te bespreken.

1 De gelijkvormigheid van figuren is al onderzocht in de eerste graad en kan hier kort hernomen worden. Bij de herhaling kan de gelijkvormigheid tussen figuren geïllustreerd worden met figuren die niet in eenzelfde vlak liggen (bijv. bij kubus, balk, grondvlak en bovenvlak prisma, evenwijdige snijvlakken in prisma en piramide).

Voor het praktisch gebruik wordt, zoals bij de congruentie, de gelijkvormigheid van driehoeken beter omschreven aan de hand van de overeenkomstige elementen van de driehoeken (gelijkheid van de overeenkomstige hoeken en evenredigheid van overeenkomstige zijden). Hierbij kan ook het verband tussen gelijkvormigheid en congruentie gelegd worden. De gelijkvormigheidsfactor zal in verband gebracht worden met het begrip schaal dat al in de eerste graad werd aangebracht.

2 Zoals bij de congruentie wordt gezocht naar nodige en voldoende voorwaarden opdat twee driehoeken gelijkvormig zouden zijn. Hierbij kan erop gewezen worden dat dergelijke eigenschappen een economie in het denken met zich mee brengen, m.a.w. slechts een beperkt aantal, maar wel goed gekozen, voorwaarden moet gecontroleerd worden.

Als het verband tussen gelijkvormigheid en congruentie gelegd werd, zal men ook de gelijkvormigheidskenmerken en de congruentiekenmerken vergelijken.

3 **Uitbreiding**

Afhankelijk van de gekozen samenhang kunnen de gelijkvormigheidskenmerken hier bewezen worden. De gelijkvormigheid kan teruggebracht worden tot congruentie met een ‘productfiguur’ of een homothetische figuur. Als tussenstap kan ook eerst op basis van Thales de gelijkvormigheid aangetoond worden van een gegeven driehoek en een driehoek gevormd door twee zijden en een evenwijdige snijlijn aan de derde zijde.

De leraar kan er voor opteren niet alle gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken te bewijzen en zich beperken tot een exemplarisch bewijs.

4 Leerlingen hebben in de eerste graad intuïtief gebruik gemaakt van projectie als ze in het vlak de coördinaatgetallen van een punt hebben bepaald en als ze ruimtefiguren hebben voorgesteld met aanzichten. Zo hebben ze ervaren dat bij dergelijke voorstellingen informatie verloren gaat. Vaak wordt de lengte van een lijnstuk niet behouden bij projectie. De projectie van een lijnstuk is zelfs niet altijd een lijnstuk. Deze inzichten worden hier verdiept door expliciete formulering in het vlak.

Wat de leerlingen in de eerste graad intuïtief in de ruimte hebben ingezien, kan met het inzicht in de projectie in een vlak verdiept worden. Mogelijkheden zijn: de projectie onderzoeken van een vlakke figuur of een eenvoudige ruimtefiguur op een vlak (cf. aanzichten); onderzoeken welke informatie verloren gaat bij het projecteren op een vlak; een figuur opbouwen als de projecties op een horizontaal en een verticaal vlak gegeven zijn. Afhankelijk van de studierichting, de leerinhouden van de andere vakken en de mogelijke vervolgopleidingen kan aan dit ruimtelijk interpreteren van projectie meer of minder aandacht besteed worden. In studierichtingen waar de leerlingen wetenschappelijk/technisch tekenen in hun studieprogramma hebben, is overleg tussen de leerkrachten wiskunde en de leraren tekenen aangewezen, bijv. over notaties of afkortingen, afspraken wat betreft voorstellingswijzen, de gevraagde nauwkeurigheid (die kan verschillen van vak tot vak), ….

5 De verhouding van de lengten van lijnstukken wordt bij projectie wel behouden als die lijnstukken evenwijdig zijn. Dit leidt onder meer tot de stelling van Thales. De leerlingen kunnen dit op goed gekozen voorbeelden zelf onderzoeken (o.m. met behulp van ICT-hulpmiddelen). De stelling van Thales wordt zowel in verband gebracht met de situatie in een driehoek (met een snijlijn evenwijdig aan een zijde) als met de situatie op twee rechten gesneden door een aantal evenwijdigen. Het laatste geval kan aanleiding zijn om het verband te leggen met het beeld van een geijkte rechte door een projectie.

6 *Uitbreiding*

Afhankelijk van de genomen opties voor de opbouw van de meetkunde kan de stelling van Thales als basiseigenschap aanvaard worden, of verklaard, of bewezen worden met behulp van al beschikbare eigenschappen. Ook kan een van de situaties als uitgangspunt genomen worden om daaruit andere vormen of interpretaties af te leiden.

7 Met behulp van de gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Thales kunnen een aantal *eigenschappen en situaties* onderzocht worden. Dit kan leiden tot een aantal *constructies en berekeningen* (bijv. een lijnstuk in n gelijke delen verdelen, constructies van de vierde evenredige, verhouding van de lengten van lijnstukken berekenen, het vergroten en verkleinen van afmetingen, het verband opzoeken tussen de omtrekken en de oppervlakten van gelijkvormige figuren).

Gelijkvormigheid van driehoeken kan gehanteerd worden bij het berekenen van afstanden die niet meetbaar zijn, omdat ze ontoegankelijk zijn.

Bij het construeren van gelijkvormige driehoeken en het berekenen van lengten van zijden zal men niet nalaten enkele eigenschappen van driehoeken te herhalen die door de leerling als controlemaatstaf kunnen gehanteerd worden (bijv. de relatie ‘tegenover een grotere hoek ligt een grotere zijde’ en de driehoeksongelijkheid).

Mits goede voorstellingen kan de stelling van Thales in ruimtelijke situaties geïnterpreteerd worden (bijv. de schaduw van evenwijdige stokken, het berekenen van de hoogte van een gebouw met behulp van de schaduwbeelden van gebouw en een stok, de oppervlakte berekenen van de doorsnede van een gegeven piramide met een vlak evenwijdig met het grondvlak en op een gegeven hoogte).

8 Uit de gelijkvormigheid van driehoeken volgt dat overeenkomstige lijnstukken evenredige lengten hebben en dat overeenkomstige hoeken gelijk zijn. Het ontdekken van die gelijkvormigheid kan intuïtief verlopen, bijv. door onderzoek op figuren. Toch moeten de leerlingen de nodige kritische zin ontwikkelen. Ze mogen de gelijkvormigheid van twee figuren niet zomaar intuïtief aanvaarden. Daarom moeten ze in een

aantal aanschouwelijke situaties hun besluit *kunnen verklaren met behulp van eigenschappen*, zoals de gelijkvormigheidskenmerken.

Mogelijke eigenschappen die hier kunnen bewezen worden zijn:
- eigenschappen van een middenparallel van een driehoek,
- de metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek,
- de bissectrice-eigenschap (in een driehoek verdeelt de bissectrice van een hoek de overstaande zijde in stukken die evenredig zijn met de aanliggende zijden),
- de eigenschap in verband met de verhouding van de lijnstukken waarin het zwaartepunt van een driehoek een zwaartelijn verdeelt.

9 Uit de stelling van Thales volgt dat overeenkomstige lijnstukken evenredige lengten hebben. De grootste moeilijkheid voor leerlingen is vaak het herkennen van de toepasbaarheid van de stelling van Thales in figuren of de samenhang tussen figuren.

Ook hier liggen kansen om bij de leerlingen de nodige kritische zin te ontwikkelen. Net zoals bij de gelijkvormigheid moeten ze ook hier kunnen verklaren hoe ze de stelling van Thales toegepast hebben en mogen ze de evenredigheid van lengten van lijnstukken niet zomaar intuïtief aanvaarden.

Het is zinvol de leerlingen bij de verwerking te confronteren met situaties waarin zowel de gelijkvormigheid als de stelling van Thales kan ingeschakeld worden als verklaring. Zo leren ze de voor- en de nadelen van het gebruik van elk van de eigenschappen ervaren.

2 Stelling van Pythagoras

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m10	B	De stelling van Pythagoras formuleren.	26
m11	B	De stelling van Pythagoras bewijzen.	
m12	B	De stelling van Pythagoras gebruiken in – berekeningen, o.m. de afstand berekenen tussen twee punten in het vlak gegeven met hun coördinaten; – constructies; – bewijzen.	26 27

Pedagogisch-didactische wenken

10 De stelling van Pythagoras kan onderzocht worden op verschillende situaties. Daarbij is het zinvol gebruik te maken van de interpretatie met oppervlakten van vierkanten (bijv. construeer een vierkant waarvan de oppervlakte de som is van twee gegeven vierkanten). Het gebruik van een simulatieprogramma voor meetkunde kan overtuigend werken. Een voorbeeld van dezelfde regel toegepast op niet-rechthoekige driehoeken levert een tegenvoorbeeld en verantwoordt in de formulering de wending ‘in een rechthoekige driehoek’. In de praktijk kunnen drietallen van Pythagoras gebruikt worden om een rechte hoek te construeren. De 3-4-5-regel, gekend bijvoorbeeld in de bouw, kan ter sprake komen.

De stelling biedt een uitstekende gelegenheid om de leerlingen te wijzen op het bestaan van irrationale getallen. Dit kan een aanwijzing zijn om de exploraties rond de stelling van Pythagoras te laten vooraf gaan aan de behandeling van irrationale getallen in de getallenleer.

De stelling van Pythagoras, het verband met irrationale getallen en de aanverwante problematiek kan een aanleiding zijn om even uit te weiden over een stukje geschiedenis van de wiskunde. Zo ook kan, naar aanleiding van constructies van situaties die voldoen aan de stelling van Pythagoras, een fractaal, m.n. de boom van Pythagoras, ter sprake gebracht worden.

11 Er zijn vele mogelijkheden om de stelling van Pythagoras te bewijzen. Zo kunnen de metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek gebruikt worden. Een andere mogelijkheid is gebruik maken van de oppervlakten van figuren (bijv. puzzels over het herschikken van de oppervlakten). Het kan verrijkend

zijn meerdere bewijzen te geven. Ze kunnen ook als oefening aangeboden worden.

Meetkundige software biedt de mogelijkheid zowel de verklaring met gelijkvormigheid (o.m. de metrische betrekkingen), als de oppervlakteberekening aanschouwelijk te expliciteren.

12 De stelling van Pythagoras kan toegepast worden in allerlei meetkundesituaties, zo bijvoorbeeld de diagonaal van een vierkant berekenen, de hoogte van een gelijkzijdige driehoek berekenen, ….

De te berekenen zijde hoeft niet enkel de schuine zijde te zijn, bijvoorbeeld:
- bereken de zijde van een vierkant als de lengte van een diagonaal gegeven is;
- bereken de lengte van een rechthoek als de lengte van een diagonaal en de breedte gegeven zijn;
- bereken in een concrete figuur, waarvan een aantal afmetingen gegeven zijn, enkele andere afmetingen;
- controleer of een figuur met bepaalde afmetingen concreet gegeven wel de vereiste kenmerken heeft;
- onderzoek of een driehoek waarvan een aantal afmetingen gegeven zijn gelijkbenig is.

De stelling kan gebruikt worden om de formule voor de *afstand* tussen twee punten in een cartesiaans assenstelsel af te leiden en ze toe te passen om dergelijke afstanden te berekenen.

Met behulp van passer en liniaal kunnen een aantal lijnstukken geconstrueerd worden waarvan de lengte een irrationale vierkantswortel is. En zo kan verklaard worden dat deze irrationale getallen effectief kunnen voorgesteld worden.

De stelling van Pythagoras (of de formule voor afstand in een vlak) kan in ruimtelijke situaties toegepast worden, bijv. om afstanden tussen de hoekpunten van een balk te berekenen. Het is niet de bedoeling de formule voor de afstand tussen twee punten in de ruimte te gebruiken. Het gebruik van deze formule kan vermeden worden door in verschillende stappen te werken. Daarbij wordt telkens gebruik gemaakt van de stelling van Pythagoras (of de afstandsformule) in een *vlakke* situatie. Het is daarbij nodig aandacht te besteden aan het zichtbaar, transparant maken van de vlakke situatie. Het inzicht in de probleemstelling zal versterkt worden als de leerlingen zich een adequate voorstelling kunnen maken van de ruimtelijke situatie en het gebruikte ‘vlak’. Op zich versterkt dit het ruimtelijk inzicht en het ruimtelijk voorstellingsvermogen.

Voorbeelden van andere ruimtelijke problemen zijn:
- bereken de hoogte van een piramide;
- bereken de lengte van een ribbe van een vierzijdige rechte piramide als de zijde van het grondvlak en de hoogte gegeven zijn;
- bereken de omtrek van de gelijkzijdige driehoek gevormd door drie diagonalen in verschillende zijvlakken van een kubus;
- bereken de lengte van lijnstukken op gegeven ruimtefiguren als bepaalde afmetingen gegeven zijn, bijv. een lijnstuk begrensd door de middens van twee ribben van een kubus.

3 Driehoeksmeting van een rechthoekige driehoek

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m13	B	De sinus, cosinus en tangens van een scherpe hoek in een rechthoekige driehoek definiëren (symbolen: sin, cos, tan).	26
m14	B	De goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens gebruiken voor het oplossen van vraagstukken in rechthoekige driehoeken.	26

Pedagogisch-didactische wenken

13 De begrippen *sinus, cosinus en tangens* van een scherpe hoek volgen uit de vaststelling dat alle rechthoekige driehoeken met eenzelfde scherpe hoek α gelijkvormig zijn. Dit zijn de goniometrische getallen ‘van de hoek α’ omdat de kennis van één van deze getallen toelaat de scherpe hoek ondubbelzinnig te bepalen. Als symbool voor de tangens van een hoek wordt gekozen voor ‘tan’, dat internationaal wordt aanbevolen

en dat op de meeste rekenmachines gebruikt wordt.

Voor de praktische toepassingen wordt het gebruik van de *rekenmachine* aangeleerd, voor het opzoeken van enerzijds de sinus, de cosinus en de tangens van een scherpe hoek, en anderzijds van het maatgetal van een scherpe hoek als de sinus, de cosinus of de tangens van die hoek gegeven is.

De fundamentele formules $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ en $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ kunnen afgeleid worden met behulp van de stelling van Pythagoras en de gelijkvormigheid van driehoeken.

14 Vraagstukken bieden de mogelijkheid de goniometrische verhoudingen te gebruiken bij het oplossen van praktische, concrete problemen. Voor leerlingen is de moeilijkheid vaak het herkennen van de situatie op een figuur. Daarom wordt in een eerste benadering best gewerkt met gegeven, heldere figuren. Toch blijft het zelf maken van een dergelijke figuur behoren tot de analysevaardigheden die doorheen het oplossingsproces van deze vraagstukken moeten verworven worden.

4 Vectoren

Voor de studierichting ***Industriële wetenschappen*** zijn deze doelstellingen ***basis***doelstellingen.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	**Et**
m15	U	Het begrip vector definiëren.	
m16	U	Een vector ontbinden volgens de assen van een assenstelsel en associëren met een koppel coördinaatgetallen.	
m17	U	De som van twee vectoren definiëren en construeren met de parallellogramregel.	
m18	U	Eigenschappen van de optelling van vectoren onderzoeken.	
m19	U	Het product van een vector met een getal definiëren en construeren.	
m20	U	Het vectorbegrip gebruiken om meetkundige eigenschappen te formuleren en te verklaren.	

Pedagogisch-didactische wenken

Uitbreiding

15 Voortbouwend op het begrip verschuiving dat vorig leerjaar werd ingevoerd kan het begrip vector relatief eenvoudig worden aangebracht. Ook een meer realistische benadering vanuit de fysische of technische toepassingen (grootheid met grootte, richting, zin) kan relatief eenvoudig gekoppeld worden aan het begrip verschuiving. (Zie leerplan eerste graad p.61: ‘verschuiven gebeurt intuïtief over een bepaalde afstand volgens een bepaalde richting en zin’.)

Het belang dat aan het onderdeel vectoren zal gehecht worden is afhankelijk van de gevolgde studierichting. In studierichtingen waar dat voor de technische toepassingen noodzakelijk is kan het begrip in de wiskundelessen ontwikkeld worden, zo mogelijk in samenspraak met de leerkrachten van die vakken. Belangrijk is dat bij de leerlingen een duidelijk vectorbegrip ontstaat dat efficiënt en functioneel kan gebruikt worden in de verschillende toepassingen.

16 Het is zinvol het begrip vector vrij snel te verbinden aan een stel coördinaatgetallen. Dit verband kan gebruikt worden bij het analytisch beschrijven van rechten. Dit is een aanwijzing om de onderdelen vectoren en analytische meetkunde meer geïntegreerd te verwerken.

18 De eigenschappen van de optelling kunnen via voorbeelden onderzocht worden.

20 Het heeft weinig zin het vectorbegrip in de wiskunde te ontwikkelen zonder er ook effectief gebruik van te maken. Daarom moet het in toepassingen worden verwerkt. Daarin kunnen leerlingen eventueel ervaren welke voor- en/of nadelen het gebruik van vectoren heeft (bijv. elegantie van een modellering, van een verklaring, …).

Als toepassingen kunnen bijvoorbeeld aan bod komen:
- de voorwaarde voor collineariteit;
- de voorwaarde voor het midden van een lijnstuk;
- eigenschappen in een driehoek (bijv. zwaartepunt);
- eigenschappen in een parallellogram (bijv. diagonalen).

5 Toepassingen in de ruimte

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m21	B	Gebruik maken van schetsen en tekeningen bij het oplossen van problemen gesteld in vlakke en beperkte ruimtelijke situaties.	26
m22	B	Gebruik maken van begrippen en elementaire eigenschappen bij het oplossen van problemen in vlakke en ruimtelijke situaties.	26

Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen moeten hun kennis leren gebruiken bij het oplossen van meetkundige problemen, zowel in het vlak als in de ruimte. Het gaat hoofdzakelijk om berekeningen in praktische en concrete situaties en minder om het opstellen van nieuwe eigenschappen. Bij het oplossingsproces maken ze gebruik van tekeningen om de problemen te analyseren en gekende eigenschappen om de oplossing te argumenteren. Het lezen van en het zichtbaar maken van informatie op een tekening is voor de leerlingen een belangrijke stap in de probleemanalyse. Het is een cruciale stap naar het zelf maken van tekeningen bij een gesteld probleem. Met het argumenteren van hun oplossing hebben de leerlingen vaak moeilijkheden. Het leren argumenteren van een oplossing moet daarom volgens een weg van geleidelijkheid opgebouwd worden.

Het best sluiten deze toepassingen aan bij de behandeling van de eigenschappen zelf. (Zie de doelstellingen m7, m12 en m14.) Toch wil de expliciete formulering van deze doelstellingen het belang ervan aangeven. De tijd voor het verwerken van deze doelstellingen werd evenwel verrekend bij de andere onderdelen.

21 Leerlingen beschikken uit de eerste graad over een aantal voorstellingstechnieken voor ruimtelijke situaties (aanzichten, cavalièreperspectief, eventueel isometrisch perspectief). Bij de behandeling van toepassingen in de ruimte zal aandacht besteed worden aan een adequate voorstelling, waarbij de gemaakte conventies gerespecteerd worden. Omdat bij een ruimtelijke voorstelling bepaalde informatie over situaties soms anders wordt voorgesteld (bijv. een rechte hoek wordt scherp of stomp, kruisende rechten worden snijdend, …) zal veel zorg besteed worden aan de tekeningen en het zichtbaar maken van de vlakke situatie waarvan men gebruik wil maken. Zo nodig zal men de ruimtelijke situatie met didactisch materiaal illustreren om het inzicht van de leerlingen te bevorderen.

22 De leerlingen moeten de gekende meetkundige begrippen en eigenschappen leren gebruiken om meetkundige problemen op te lossen, zowel in het vlak als in de ruimte. Oefeningen waarbij lengten en hoeken berekend worden, moeten zeker aan bod komen.

6 Gereedschapskist meetkunde

Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen moeten na het eerste leerjaar van de tweede graad beschikken over een verzameling meetkundige eigenschappen, die vlot kunnen toegepast worden bij het onderzoeken van meetkundige situaties, het verklaren van eigenschappen, het oplossen van meetkundige problemen. Een vlotte en soepele verwoording ervan en een duidelijke visuele ondersteuning kunnen de toepasbaarheid vergroten. Ze moeten een duidelijk en hanteerbaar kader vormen, waarop de leerling kan terugvallen. Dit betekent niet dat de leerlingen dergelijke overzichten moeten memoriseren. Het overzicht moet wel beschikbaar zijn. Dat kan bijvoorbeeld in de vorm van een *'vademecum'*. Zo'n lijst kan geleidelijk (gespreid over de verschillende leerjaren) en samen met de leerlingen worden opgebouwd (bijv. een synthesetaak na een hoofdstuk). Als voorbeeld worden in het volgend overzicht een aantal eigenschappen opgesomd die kunnen worden opgenomen in zo'n vademecum. (Een aantal van deze eigenschappen werden al verworven in de eerste graad.)

Eigenschappen over de lengten van de zijden en de grootte van de hoeken van driehoeken en vierhoeken.

Eigenschappen over de diagonalen van vierhoeken.

Eigenschappen over de hoeken bij een snijlijn van evenwijdige rechten.

De eigenschappen van de middelloodlijn van een lijnstuk en van de bissectrice van een hoek en hun omgekeerde.

In een driehoek gaan de zwaartelijnen, de middelloodlijnen, de hoogtelijnen, de bissectrices telkens door één punt.

Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijn in twee stukken die zich verhouden als twee tot één.

De driehoeksongelijkheid tussen de zijden van een driehoek.

– In elke driehoek is elke zijde langer dan het verschil van de twee andere, maar korter dan hun som.

Eigenschappen van de merkwaardige lijnen in een driehoek, in een gelijkbenige driehoek en in een gelijkzijdige driehoek.

Eigenschappen van (invariantie bij) een verschuiving, een puntspiegeling, een spiegeling , een draaiing.

De congruentiekenmerken van driehoeken.

De gelijkvormigheidskenmerken voor driehoeken.

De stelling van Thales en haar omgekeerde.

De stelling van Pythagoras en haar omgekeerde.

De eigenschap van een middenparallel van een driehoek.

De metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek.

– In een rechthoekige driehoek is de hoogtelijn middelevenredig tussen de stukken waarin ze de schuine zijde verdeelt.
– In een rechthoekige driehoek is elke rechthoekszijde middelevenredig tussen de schuine zijde en haar loodrechte projectie op de schuine zijde.

Belangrijk is dat deze lijst van eigenschappen geen steriel overzicht is van een aantal geziene en/of bewezen eigenschappen. De lijst moet ook gemakkelijk hanteerbaar zijn in nieuwe situaties. Daarom is een ordening op basis van *bruikbaarheid* een zinvolle ordening.

Voorbeelden: met welke hulpmiddelen kan verklaard, bewezen worden

– dat twee rechten evenwijdig zijn;
– dat twee hoeken even groot zijn;
– dat de lengten van twee lijnstukken gelijk zijn;
– dat een punt het midden is van een lijnstuk;
– dat een vierhoek een parallellogram is;
– dat drie punten collineair zijn.

Een dergelijke opvatting en ordening van de gekende eigenschappen zal de leerlingen meer hulp bieden bij het zelfstandig exploreren van meetkunde.

Van leerlingen, die wiskunde volgen op basis van vijf wekelijkse lestijden, kan verwacht worden dat ze een aantal van deze eigenschappen hebben uitgediept. Dat betekent bijvoorbeeld dat ze elementen uit het onderzoeksproces kunnen bespreken (al of niet geleid, al of niet met behulp van ICT-hulpmiddelen), dat ze beseffen dat een bepaalde eigenschap als basiseigenschap werd aanvaard of dat ze werd verklaard door het verband te leggen met andere eigenschappen.

5.2.2 GETALLENLEER

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **getallenleer** (basisdoelstellingen) worden ca. **35** lestijden besteed

uitbreiding van het getalbegrip	ca. 7 lestijden
toepassingen op bewerkingen met reële getallen	ca. 28 lestijden

1 Uitbreiding getalbegrip

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
g23	B	Het bestaan van irrationale getallen illustreren.	
g24	U	Bewijzen dat 2 geen kwadraat is van een rationaal getal.	
g25	B	Reële getallen ordenen en voorstellen op een getallenas.	
g26	B	De vierkantswortel van een positief reëel getal en de derdemachtswortel van een reëel getal definiëren en benaderen met behulp van een rekenmachine.	12 15

Pedagogisch-didactische wenken

In de getallenleer wordt het getalbegrip verder uitgebreid tot de verzameling van de *reële getallen*. Daarvoor moeten leerlingen het begrip irrationaal getal verwerven. Zowel de wortelvormen met inbegrip van een meetkundige voorstelling als de decimale vorm moeten aan bod komen. De aanbreng van irrationale getallen kan een aanleiding zijn om elementen uit de geschiedenis van de wiskunde in te brengen, bijv. de problemen met de irrationaliteit voor de Pythagoreïsche school. Wat betreft de ordening en de rekenregels blijven de gekende eigenschappen geldig. Ook het oplossen van vergelijkingen verandert in wezen niet. De uitbreiding van □ naar □ betreft dus vooral de kennismaking met de irrationale getallen.

Het is evenwel niet realistisch te verwachten dat de leerlingen van het eerste jaar van de tweede graad de begrippen reëel getal en irrationaal getal al kunnen doorgronden in al hun subtiliteit. De behandeling in dit leerjaar kan dus maar beperkt zijn. De reële getallen zullen in de derde graad in de analyse verder aan bod komen.

23 Het bestaan van irrationale getallen is niet vanzelfsprekend. Zoals de andere soorten getallen zouden de reële getallen een brede betekenis moeten krijgen. Voor reële getallen is dit niet zo eenvoudig.

Eerst kan de *periodiciteit* in de decimale voorstelling van rationale getallen geconstateerd worden. Daarna kan van enkele concrete rationale getallen met repeterende decimale vorm de breukvorm berekend worden. Het bestaan van irrationale getallen kan dan geïllustreerd worden met enkele getallen met een niet-repeterende decimale voorstelling. Ook het getal π is een voorbeeld van een irrationaal getal.

De problematiek van *irrationale lengten* die ontstaat bij de stelling van Pythagoras biedt een voor de hand liggende aanleiding. Getallen die als vierkantswortel geschreven kunnen worden krijgen hier een meetkundige voorstelling. Dit is een aanwijzing om deze meetkundige elementen en irrationale getallen geïntegreerd te behandelen.

Van niet-rationale vierkantswortels (van positieve getallen) zal aangenomen worden dat ze irrationaal zijn. Zo kan intuïtief aanvaard worden dat er geen rationaal getal bestaat met kwadraat 2. De verzameling van de rationale getallen volstaat dus niet om een dergelijk elementair probleem te beschrijven. Dit is een van de weinige mogelijkheden om leerlingen een haalbare motivatie te bieden voor het bestaan en de noodzaak van irrationale getallen.

Het inzicht in de irrationale getallen met zowel de problematiek van de decimale ontwikkeling als die van de vierkantswortels en hun eventuele meetkundige voorstelling, volstaat op dit niveau als inzicht in ‘reële’ getallen.

Er dient verder op gewezen dat, ondermeer bij het rekenen met een rekenmachine, reële getallen zowel wat de interpretatie betreft (bijv. bij plaatsbepaling) als bij bewerkingen (in realistische problemen), vaak benaderd worden door een eindig decimaal getal.

24 *Uitbreiding*

Als exemplarisch voorbeeld van de irrationaliteit van getallen kan het bewijs gegeven worden dat er geen rationaal getal bestaat met kwadraat 2. De verzameling van de rationale getallen volstaat dus niet om een dergelijk elementair probleem te beschrijven. Dit is een van de weinige mogelijkheden om leerlingen een haalbare motivatie te bieden voor het bestaan en de noodzaak van irrationale getallen.

25 De *ordening* van de reële getallen volgt op natuurlijke wijze uit hun decimale schrijfwijze en komt uiteraard overeen met de ordening van punten op de getallenas.

Door intuïtief de plaats van enkele concrete irrationale getallen te bepalen op de *getallenas* en door omgekeerd van een aantal concrete punten de abscis benaderend te bepalen, groeit het besef dat met elk punt van de getallenas juist één reëel getal overeenstemt en omgekeerd dat met elk reëel getal juist één punt van de getallenas overeenstemt. De irrationaliteit van $\sqrt{2}$ gekoppeld aan de stelling van Pythagoras illustreert dat er wel degelijk irrationale ‘lengten’ of abscissen op de getallenas voorkomen. Het punt met abscis $\sqrt{2}$ kan men precies construeren.

26 Voor de invoering van het begrip vierkantswortel en derdemachtswortel kan uitgegaan worden van het omkeren van de machtsverheffing.

Bij vierkantswortel moet aandacht besteed worden aan de vaststelling dat er voor elk strikt positief getal a twee getallen (b en -b) bestaan waarvan het kwadraat a is. Ofwel b ofwel -b is positief. Er wordt afgesproken de positieve vierkantswortel uit a te noteren met $\sqrt{a}$. Met ‘vierkantswortel a’ wordt de positieve vierkantswortel bedoeld. Verder kan opgemerkt worden dat $\sqrt{a^2} = |a|$. De leerlingen moeten inzien waarom binnen de verzameling van de reële getallen de vierkantswortel uit een negatief reëel getal niet wordt gedefinieerd. Ze moeten hierbij een correct taalgebruik hanteren, niettegenstaande ze de volle draagwijdte ervan (m.n. er is een verzameling waarin voor negatieve getallen toch vierkantswortels kunnen gedefinieerd worden) misschien niet vatten.

Voor enkele omrekeningen van formules (bijv. volume) is het zinvol de derdemachtswortel in te voeren. Het gebruik wordt wel beperkt tot functionele toepassingen. De veralgemening naar de n-de machtswortel zal later volgen.

Bij het benaderen van een vierkantswortel of een derdemachtswortel met behulp van een *rekenmachine* moeten de leerlingen leren hun resultaat te controleren, bijv. met een schatting van de grootteorde. Verder zal er op gewezen worden dat het getal op het scherm meestal een rationale benadering is. Dit is een gelegenheid om het gebruik van het aantal decimalen te bespreken. In het algemeen is het zinvol leerlingen resultaten te leren aflezen (afronden) in functie van de betekenis of het gebruik ervan (bijv. ‘precies’ resultaat of grootteorde gewenst). Voor sommige doeleinden zal een benadering tot op bijv. 0,1 volstaan, voor andere zal een nauwkeurigheid tot op bijv. 0,0001 gevraagd worden. Dat staat onder meer in verband met de gebruikte nauwkeurigheid bij het invoeren van getallen, met het verdere gebruik van het getal in berekeningen, ….

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
g27	B	Berekeningen uitvoeren met getallen in decimale vorm, in breukvorm en in wetenschappelijke schrijfwijze en daarbij de rekenmachine gebruiken.	12 15
g28	B	Regels voor het rekenen met machten toepassen bij het rekenen met getallen en met letters.	
g29	B	De rekenregels voor het rekenen met vierkantswortels uitdrukken in woorden en symbolen.	
g30	B	De rekenregels voor het rekenen met vierkantswortels toepassen bij het uitvoeren van bewerkingen.	
g31	B	Bewerkingen met vierkantswortels en derdemachtswortels benaderend uitvoeren met behulp van een rekenmachine.	
g32	U	De rekenregels voor het rekenen met vierkantswortels bewijzen.	
g33	B	Vraagstukken oplossen en daarbij – in de probleemstelling herkennen welke grootheden aan de orde zijn; – het probleem vertalen in een wiskundige vorm met algebraïsche bewerkingen tussen de grootheden; – verantwoord kiezen tussen schattend rekenen, benaderend rekenen en het gebruik van een rekenmachine; – de oplossing zinvol afronden en interpreteren.	13 14 15 20
g34	B	Vraagstukken oplossen die leiden tot een vergelijking van de eerste graad met één onbekende.	24
g35	B	Vraagstukken oplossen die leiden tot een ongelijkheid van de eerste graad met één onbekende en de oplossing grafisch voorstellen en symbolisch noteren.	24
g36	U	Vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste graad met één onbekende bespreken.	
g37	B	Een veelterm ontbinden in factoren door gebruik te maken van – de distributieve eigenschap; – merkwaardige producten; – groepering van termen.	

Pedagogisch-didactische wenken

27 Het *rekenen met rationale getallen* (zowel in breukvorm als in decimale vorm) behoort tot de leerinhouden van de eerste graad (en deels het basisonderwijs). De leerlingen die vijf wekelijkse lestijden wiskunde kiezen zouden dit moeten verworven hebben, zodat een herhaling in een hele reeks lessen niet zinvol is. De leerinhouden van dit leerjaar bieden voldoende gelegenheden om met rationale getallen te rekenen (bijv. bij vraagstukken als toepassing op verscheidene nieuwe leerinhouden). Als het gebruikt wordt in functionele situaties, ervaren de leerlingen dit rekenen als meer zinvol.

Waar echter nog problemen vastgesteld worden, kunnen die uiteraard gericht geremedieerd worden. Een vlotte en inzichtelijke rekenvaardigheid biedt de leerling op lange termijn alleen maar voordelen.

De uitbreiding naar het rekenen met irrationale getallen (met een oneindig doorlopende decimale vorm) zal verlopen via een rekenen met een benaderende eindige decimale vorm (bijv. met een rekenmachine). Dit is een van de mogelijkheden om het rekenen met rationale getallen te herhalen.

De leerlingen moeten leren gebruik te maken van een *rekenmachine*. Zeker voor meer complexe berekeningen lijkt dit in de technische studierichtingen aangewezen. Toch moet het gebruik van de rekenmachine zinvol zijn. Dat wil onder meer zeggen dat leerlingen geleerd wordt de bekomen resultaten te toetsen, bijv. door ze te vergelijken met een schatting van de grootteorde. Bij het gebruik van een rekenmachine worden leerlingen in hoofdzaak geconfronteerd met het rekenen met decimale getallen. Dit zou hen de idee kunnen geven dat resultaten niet exact kunnen berekend worden. Het is zinvol deze problematiek te bespreken naar aanleiding van een gepast voorbeeld. Zonder hierop uiteraard een hele reeks oefeningen uit te voeren zal, waar de gebruikte toestellen het toelaten, het gebruik van het rekenen met de breukvorm machinaal uitgevoerd worden, zodat een ‘exact’ resultaat bekomen wordt. Anderzijds zullen resultaten die evident verwijzen naar breuken als dusdanig geïnterpreteerd worden. Zo kan bijvoorbeeld 0,333… in sommige situaties tot 0,3 afgerond worden, maar men zal niet nalaten dergelijk resultaat te noteren als $\frac{1}{3}$.

Niet alle leerlingen zijn vanuit de eerste graad voldoende vertrouwd met het rekenen met getallen in de wetenschappelijke schrijfwijze. Ze hebben al wel gerekend met de machten van 10, wat als basis voor het rekenen met de wetenschappelijke schrijfwijze kan gebruikt worden. Deze schrijfwijze van getallen moet geïllustreerd worden met realistische voorbeelden (van zeer kleine of zeer grote getallen) uit de wetenschappen en de technische toepassingen.

In overleg met de vakgroep van de technische vakken kan voor de wetenschappelijke schrijfwijze aandacht besteed worden aan de bijzondere notatie van rationale getallen, met machten van tien waarvan de exponent een veelvoud is van drie. Daaraan kunnen de voorvoegsels zoals mega-, giga-, …, nano-, pica-, … gekoppeld worden.

28 De leerlingen die vijf wekelijkse lestijden wiskunde kiezen zouden vertrouwd moeten zijn met het rekenen met machten. De leerinhouden van dit leerjaar bieden voldoende gelegenheden om met machten te rekenen. Waar echter nog problemen vastgesteld worden moeten die uiteraard geremedieerd worden, zowel wat betreft het benaderend uitrekenen als het symbolisch rekenen. Het is zeker zinvol extra aandacht te besteden aan het rekenen met machten met letters, waar de rekenregels meer symbolisch moeten toegepast worden.

29 Naast het rekenen met irrationale getallen in decimale vorm moeten leerlingen rekenen met wortelvormen. Ook hier geldt de opmerking dat leerlingen hiervoor allicht sterker gemotiveerd kunnen worden als dit gebeurt in een functionele context.

Het formuleren van rekenregels is noodzakelijk om vlot met wortelvormen te kunnen rekenen, maar de aandacht moet toch vooral gaan naar het toepassen van deze regels.

Voor het rekenen met vierkantswortels wordt de formulering van de regels best voorbereid door te redeneren op voorbeelden. (Voorbeeld: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ is een getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 6, dus is $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ gelijk aan $\sqrt{6}$). Er dient gewezen te worden op de uitdrukkingen die niet leiden tot eigenschappen. (Voorbeeld: $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ is niet gelijk aan $\sqrt{7}$, want het kwadraat van $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ is niet gelijk aan 7). Regels die aan bod kunnen komen zijn het vereenvoudigen van vierkantswortels, som en verschil van gelijksoortige vierkantswortels, product, quotiënt en machten van vierkantswortels.

30 De beschikbare tijd voor de inoefening van dit onderwerp is beperkt. Een beperking tot eenvoudige situaties is aangewezen. De rekenmachine maakt uitgebreide inoefening met veel en ingewikkeld cijferwerk overbodig.

Vooraleer over te stappen op het rekenen met wortelvormen waarin *letters* optreden zal best gerekend worden met wortelvormen van getallen waarop de rekenregels kunnen toegepast worden. Bij de lettervormen zal de moeilijkheidsgraad bewust beperkt gehouden worden. Het gaat er veeleer om het principe van de rekenregels beter te begrijpen. Zo is het in een eerste inoefening zeker zinvol de letters te beperken tot de positieve reële getallen. De bespreking van de letters kan dan later als *uitbreiding* aan bod komen.

Om een vorm met wortelvormen in de noemer te vereenvoudigen kan de mogelijkheid aangebracht worden die noemer rationaal te maken. Het is niet de bedoeling uitgebreid in te gaan op deze techniek, maar wel hem functioneel aan te wenden. Het kan zinvol zijn zich te beperken tot die vormen waarin de noemer een eenterm is bestaande uit een wortelvorm van de tweede graad.

Enige aandacht moet besteed worden aan het rekenen met lettervormen waarbij ook irrationale coëfficiënten optreden.

31 Bij bewerkingen met reële getallen in decimale voorstelling moeten die meestal benaderd worden met een rationaal getal met een eindige decimale vorm. Hetzelfde probleem doet zich voor als berekeningen met vierkantswortels en derdemachtswortels benaderend worden uitgevoerd of bij berekeningen met rationale getallen met een oneindige decimale vorm. En ook bij het rekenen met een rekenmachine worden reële getallen benaderd door rationale getallen met een eindige decimale vorm. De nauwkeurigheid van het decimaal getal dat wordt afgelezen is te bepalen, onder meer in functie van de gebruikte nauwkeurigheid van de ingevoerde getallen of van het gebruik van het afgelezen getal in verdere berekeningen. Werken

met decimale getallen die nauwkeurig zijn tot op een verschillend aantal decimalen kan tot onoverzichtelijke onnauwkeurigheden leiden. Dergelijke uitgebreide foutenbespreking moet niet aan bod komen. Wel is het zinvol leerlingen aan te bevelen het afronden uit te stellen tot het eindresultaat. Leerlingen moeten inzien dat een rekenmachine intern met meerdere decimalen werkt en hiervan maximaal gebruik weten te maken.

33 De herhaling en de uitdieping van de getallenkennis zal bij de leerlingen nagestreefd worden aan de hand van het oplossen van allerlei problemen uit hun omgeving. Die kunnen onder meer aansluiten bij de technische vakken van de studierichting. De aandacht voor *vraagstukken* zal niet beperkt blijven tot enkele geïsoleerde lessen. Vraagstukken dienen geregeld in allerlei omstandigheden aan bod te komen in de loop van het gehele jaar. Precies de volgehouden aandacht biedt meer kans op het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden. (Voor een algemene situering hiervan zie 5.1.)

Belangrijk daarbij is onder meer dat leerlingen een probleem leren stellen in een gegeven situatie. Dat betekent onder meer dat ze uit het gevraagde de te berekenen grootheid kunnen afleiden. Dat betekent dat ze in functie daarvan de gegevens en de uit te voeren bewerkingen kunnen selecteren.

De leerlingen kennen al een aantal voorstellingstechnieken van gegevens, zoals diagrammen, grafieken en tabellen. Hiervan kan handig gebruik gemaakt worden om de presentatievorm van de problemen te variëren.

Nadat de leerlingen een accurate wiskundige representatie gekozen hebben moeten ze een aangepaste rekenwijze kiezen. Naargelang de complexiteit van de gegevens en de bewerkingen kan dat zowel het hoofdrekenen als het cijferrekenen of het gebruik van een rekenmachine zijn.

Bij het afronden van berekende getallen, in het bijzonder van het resultaat, moet rekening gehouden worden met de getallen zelf, hun rol eventueel verder in de berekening, de grootteorde van de gegevens en het realiteitsaspect van de situatie.

(Over de interpretatie van het resultaat in de context van de situatie, zie het onderdeel probleemoplossende vaardigheden bij 5.1..)

34 De oplossingstechnieken van *vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende* in zijn dezelfde als die in . Deze werden door de leerlingen verworven in de eerste graad. Hierdoor is het oplossen van deze vergelijkingen in geen doel op zich meer en dient dit geïntegreerd te worden in het aanbieden van *realiteitsbetrokken vraagstukken*. Let wel, dat hier vraagstukken aan bod kunnen komen waarin zowel de coëfficiënten als de oplossingen van de vergelijkingen reële getallen zijn.

Wel moet een verband gelegd worden met het opzoeken van nulpunten van eerstegraadsfuncties. Het oplossen van vergelijkingen en eerstegraadsfuncties kunnen daartoe geïntegreerd aangepakt worden.

Voor het oplossen van vergelijkingen van de eerste graad van een eenvoudige vorm en met eenvoudige getallen is de manuele techniek een basisvaardigheid die moet verworven blijven. Dergelijke duidelijke gevallen moeten het inzicht versterken. Voor het oplossen van meer ingewikkelde vormen kunnen ICT-hulpmiddelen ingeschakeld worden. Zo kan men in deze gevallen gebruik maken van de ingebouwde oplosser. Of als het verband gelegd wordt met eerstegraadsfunctie(s), kan de oplossing van de vergelijking grafisch afgelezen worden of als het snijpunt van twee functies (bijv. rechter- en linkerlid) bepaald worden.

35 De eigenschappen van *ongelijkheden* zijn geen doel op zich, maar dienen toegepast te worden bij het oplossen van deze ongelijkheden en om de gelijkwaardigheid van twee ongelijkheden aan te geven. In die zin kan aandacht besteed worden aan de verenigbaarheid van een ongelijkheid met de optelling en met de vermenigvuldiging, i.h.b. aan de verandering van de zin van de ongelijkheid bij het vermenigvuldigen van beide leden van een ongelijkheid met een negatief getal.

Zoals geldt voor vergelijkingen dient het oplossen van ongelijkheden met één onbekende in geïntegreerd te worden in het aanbieden van *realiteitsbetrokken vraagstukken*.

Hier moet een verband gelegd worden met de tekenbespreking van eerstegraadsfuncties. Het verband met het voorstellen van de oplossingen op een geijkte rechte ligt voor de hand (cf. eerste coördinaatas). Ongelijkheden en eerstegraadsfuncties kunnen daartoe geïntegreerd worden.

In verband met het gebruik van ICT-hulpmiddelen geldt voor ongelijkheden een analoge opmerking als voor vergelijkingen. Bij meer ingewikkelde vormen kan een rekenmachine of software ingeschakeld worden. Als het verband gelegd wordt met eerstegraadsfunctie(s), kan de oplossing van de ongelijkheid grafisch afgelezen worden of bepaald worden door het vergelijken van de onderlinge ligging van twee functies (bijv. welk is het gebied waarin de functie bepaald door het rechterlid groter is dan deze bepaald door het linkerlid).

De leerlingen moeten de oplossing symbolisch kunnen noteren. Dit betekent de oplossing schrijven met behulp van een interval of een unie van intervallen. Dit kan ondersteund worden vanuit het grafisch aanduiden van de oplossingsverzameling. Het biedt ook een gelegenheid waarbij leerlingen het voordeel kunnen waarderen van een beknopte wiskundige schrijfwijze.

36 *Uitbreiding*

Hier wordt de kans geboden kennis te maken met het begrip *parameter* en zijn invloed op de oplossing van vergelijkingen en ongelijkheden. (Voorbeeld: bij de uitdrukking ax = 0 leren de leerlingen het onderscheid maken tussen de veranderlijke x en de parameter a). Deze werkwijze confronteert de leerling onder meer met de mogelijkheid van gevalsonderscheiding en met het structureren van de opgezette redenering.

37 In de eerste graad hebben de leerlingen een-, twee- en drietermen leren optellen en vermenigvuldigen. Dit rekenen zou door de leerlingen die voor vijf wekelijkse lestijden wiskunde kiezen voldoende moeten verworven zijn. Toch kunnen zich hier nog tekorten voordoen. Voor zover de realisatie van andere doelstellingen hierdoor niet gehypothekeerd wordt, kan hier nog remediërend gewerkt worden. Dit betekent bijvoorbeeld dat leerlingen *gedifferentieerd en gericht* oefeningen kunnen verwerken. Hier ligt een belangrijke kans om de leerlingen gestuurd, maar toch zelfverantwoordelijk aan het werk te laten (bijv. via meerdere, over het gehele schooljaar gespreide, maar korte herhalingstaken), eventueel na een korte herhaling tijdens de lestijden. Wel moet men zich realiseren dat met de mogelijkheden die rekenmachines en computer zullen hebben in verband met het algebraïsch rekenen, de impact van het manueel algebraïsch rekenen kleiner wordt.

Een aantal *merkwaardige producten* en het *ontbinden in factoren* zijn behandeld in het tweede leerjaar van de eerste graad. Dit kan zo nodig zeer kort herhaald worden (bijv. na een diagnostische toets, met gespreide, korte herhalingstaken gericht op vaardigheidstraining). Er komen echter geen nieuwe vormen bij. Dus ook de beperkingen uit de eerste graad (ten hoogste twee veranderlijken, eenvoudige vormen) blijven van kracht. Als verantwoording kan aangevoerd worden dat de leerlingen dit in de praktijk maar zullen gebruiken bij het zoeken van nulpunten van veeltermfuncties in *één* veranderlijke. Te ingewikkelde vormen zullen het inzicht en de vaardigheid eerder bemoeilijken. Er dient dus voorrang gegeven te worden aan het vlot beheersen van de basisvormen. De beschikbare tijd voor dit onderwerp is overigens zeer beperkt!

Nu de wortelvormen gekend zijn kan aandacht besteed worden aan vormen zoals $x^2 - 3$, die in $\mathbb{R}$ wel ontbindbaar zijn en in $\mathbb{Q}$ niet en die vorig jaar niet behandeld werden.

Het invoeren van de formule voor $(a+b)^3$ en aanverwante vormen wordt uitgesteld.

5.2.3 REËLE FUNCTIES EN ANALYTISCHE MEETKUNDE

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **reële functies en analytische meetkunde** (basisdoelstellingen) worden ca. **50** lestijden besteed

algebraïsche verbanden expliciteren	ca. 10 lestijden
eerstegraadsfuncties	ca. 15 lestijden
algemene vergelijking van een rechte	ca. 8 lestijden
stelsels van twee vergelijkingen in twee onbekenden	ca. 8 lestijden
problemen analytisch oplossen	ca. 9 lestijden

Pedagogisch-didactische wenken

Het onderdeel *Reële functies* zal de volgende jaren studieonderwerp zijn voor de leerlingen. Het verder afliggend doel is het verloop van dergelijke functies te begrijpen, te beschrijven, te beheren, te gebruiken en toe te passen in praktische situaties. In dit leerjaar komen als hoofddoel de eerstegraadsfuncties aan bod. De behandeling van de vergelijking van een rechte uit de analytische meetkunde kan hierbij geïntegreerd verlopen.

Bij het begin van het onderdeel *Reële functies* is het zinvol enkele voorbeelden te onderzoeken van relaties tussen grootheden. Daarbij wordt uitgegaan van situaties die betekenisvol zijn voor de leerlingen en waarin de elementen in een wiskundig verband staan. Dat kunnen situaties uit hun leefwereld zijn, maatschappelijk relevante situaties of elementen uit hun basiskennis wiskunde of wetenschappen. Het verband tussen twee of meer grootheden wordt hierbij wiskundig geëxpliciteerd, bijv. de afgelegde weg bij eenzelfde snelheid is recht evenredig met de tijd; de rente is het product van kapitaal, rentevoet en tijd.

Het is evenwel gebruikelijk die verbanden niet slechts woordelijk te expliciteren. Ze kunnen omschreven worden met een formule (bijv. $I = K \cdot p \cdot t$; $S = \pi \cdot r^2$). Of aan de hand van een tabel van overeenkomstige waarden (bijv. de rente van eenzelfde kapitaal bij verschillende rentevoeten; de resultaten van een meting of experiment). Of door een grafische voorstelling ervan (bij een artikel in de krant valt vaak eerst de grafiek op en de legende, daarna volgt het lezen van het verhaal).

Leerlingen moeten in de inleiding op het onderdeel *Reële functies* leren omgaan met deze drie presentatievormen. De didactische aanpak kan daarbij verschillen naargelang de leerlingengroep. Zo kan bijv. in de aanvangsfase aandacht besteed worden aan elke mogelijkheid afzonderlijk, daarna aan de samenhang tussen de verschillende elementen. Het is zinvol de verschillende voorstellingen in een geïntegreerde aanpak ter sprake te brengen, bijv. uitgaande van enkele goed gekozen situaties zowel het tabuleren, het omzetten in een formule of de grafiek bespreken.

De leerlingen zijn uit de eerste graad al vertrouwd met enkele belangrijke elementaire verbanden, zoals die tussen recht evenredige grootheden of omgekeerd evenredige grootheden. Deze kunnen in de aanloop zeker hernomen worden. Andere mogelijkheden zijn een verband van de eerste graad (alhoewel die verderop expliciet aan bod komen) en kwadratische verbanden (bijv. het verband tussen de oppervlakte van een cirkel en de straal). Ook kunnen verbanden aan bod komen met een meervoudig voorschrift of met meer dan twee variabelen. De leerlingen beschikken evenwel nog niet over een uitgebreid algebra- of analysearsenaal om deze verbanden te bestuderen. De tweedegraadsfuncties komen expliciet aan bod in het tweede leerjaar van de tweede graad! In de aanloopfase is het zeker niet de bedoeling onderhands ingewikkelde algebraïsche uitdrukkingen ter sprake te brengen. De bestudeerde verbanden zullen dus relatief eenvoudig blijven. Het inzicht in het begrip functie kan versterkt worden door kort in te gaan op het verschil tussen een willekeurige relatie en een functioneel verband.

Leerlingen moeten bij een aantal situaties, geformuleerd in woorden, een tabel van overeenkomstige waarden maken, een grafiek tekenen en daarbij het gekozen assenstelsel accuraat kiezen; een voorschrift of formule opstellen. Ze moeten vlot van de ene vorm naar de andere overstappen indien dat mogelijk en wenselijk is.

Bij de exploratie van grafieken van functies, het bekijken van een bijbehorende tabel functiewaarden kan de grafische rekenmachine of de computer gebruikt worden. Dit is dan een gelegenheid om de doelstellingen in verband met ICT-hulpmiddelen na te streven.

In de wiskunde is het gebruikelijk in de meer geabstraheerde formules de letters x en y te gebruiken. Om te vermijden dat dit een al te stereotiep gebruik zou worden, is het zinvol bij de ontwikkeling van het functiebegrip en bij de inoefening letters te gebruiken die aangepast zijn aan de situatie (bijv. grootheden uit de techniek worden best met hun gebruikelijk symbool geschreven).

Voor de helderheid worden de doelstellingen hier gegroepeerd volgens de opdeling tussen functies en analytische meetkunde. Voor de uitwerking wordt aanbevolen de onderdelen eerstegraadsfunctie en vergelijking van een rechte geïntegreerd te behandelen.

1 Algebraïsche verbanden expliciteren bij betekenisvolle situaties

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f38	B	Een gegeven tabel interpreteren, o.m. – bepaalde waarden aflezen; – extreme waarden aflezen; – het globale verloop (constant, stijgen, dalen) bespreken.	18
f39	B	Een gegeven grafiek interpreteren, o.m. – bepaalde waarden aflezen; – extreme waarden aflezen; – het globale verloop (constant, stijgen, dalen) bespreken.	18
f40	B	In een gegeven formule – de waarde van één veranderlijke berekenen bij vervanging van de andere veranderlijke(n) door een getal; – het effect aangeven van de verandering van één veranderlijke op de andere.	21 20
f41	B	Het verband tussen twee veranderlijke grootheden weergeven door middel van – een tabel; – een grafiek in een opportuun gekozen assenstelsel; – een formule.	16 17 20
f42	B	De samenhang tussen verwoording, tabel, grafiek en formule uitleggen.	22
f43	B	Een tabel, een grafiek, een formule interpreteren met betrekking tot het onderscheid tussen relatie- en functieverband.	
f44	B	De onderlinge ligging van twee grafieken vergelijken en interpreteren.	19

Pedagogisch-didactische wenken

38 Het is zinvol bij de aanvang van dit onderdeel enkele concrete voorbeelden te bespreken van tabellen en grafieken over situaties uit de ‘leefwereld’ (bijv. uit kranten of tijdschriften, uit informatiebrochures, uit technische handleidingen). Het lezen en interpreteren ervan is een belangrijke vaardigheid.

Veel informatie, ook binnen technische toepassingen, wordt vaak vergezeld van tabellen bijv. over afmetingen, resultaten van een meetproces, …. Vanuit de eerste graad zijn leerlingen al vertrouwd met het aflezen van tabellen van eenvoudige relaties, zoals tussen twee recht evenredige grootheden. Nu kunnen meer algemene verbanden aan bod komen.

Een eerste stap in het begrijpen van de informatie in een tabel is het aflezen van de grootheden, het aflezen van waarden en het opzoeken van bijzondere waarden zoals extreme waarden. Ook over het globale ‘verloop’ van de waarden uit een tabel moeten leerlingen een indruk kunnen geven. Gaat het bijvoorbeeld om een stijgende, een dalende, een constante trend. Is er informatie af te lezen in verband met gelijkmatige toename of is er een maat te bepalen voor de snelheid van toe- of afname.

Belangrijk is dat leerlingen de afgelezen getallen terug in de juiste context kunnen plaatsen, bijv. wat is de betekenis van een extreme waarde of van een stijgende trend in deze situatie.

Leerlingen moeten kritisch leren omgaan met de geboden informatie en de veralgemening ervan. Een tabel biedt maar beperkte informatie aan over bepaalde waarden. Hieruit een vast verband afleiden is moeilijk. De kennis van een aantal bijkomende waarden zou het vermoeden over het beschreven verband kunnen wijzigen.

39 Een grafiek biedt heel wat zintuiglijke en overzichtelijke informatie. Meestal vallen belangrijke waarden zoals extreme waarden onmiddellijk op. Nulwaarden kunnen meestal snel afgelezen worden. En toename of afname van beeldwaarden is verbonden met het stijgen of dalen van de grafiek. Bij het aflezen wordt soms informatie over het hoofd gezien, bijvoorbeeld welke zijn de effectieve grootheden die uitgezet werden en met welke eenheden op de assen. Zo kan de keuze van de eenheid (schaal) een andere indruk geven over dezelfde informatie (bijv. met betrekking tot het stijgen of dalen, de schijnbare helling van de grafiek).

Anderzijds moeten leerlingen beseffen dat bij grafische informatie vaak aan nauwkeurigheid van de waarden moet ingeboet worden, omdat bij het opmeten van een ‘beeldwaarde’ onvermijdelijk meetfouten gemaakt worden. Hieruit blijkt dan weer dat een combinatie van zowel tabel als grafiek zinvol is om de informatie te versterken. Het precies omschrijven van het verband met een voorschrift of formule is een andere mogelijkheid om preciezere informatie te geven.

Ook ten aanzien van de informatie in een grafiek moeten leerlingen leren kritisch staan. Ook een grafiek kan maar gegeven zijn voor een bepaald deel. Het verloop kan buiten het beschikbare deel totaal anders zijn. Extrapolatie is mogelijk, maar kan helemaal niet beantwoorden aan de rest van het verloop of aan het reële verloop.

40 Uit het voorgaande onderzoek van tabellen en grafieken blijkt dat ze zeer zinvolle informatie kunnen geven. Om een verband tussen grootheden precies te beschrijven zal een formule of een voorschrift nochtans de meeste informatie bieden. Op grond daarvan kunnen overeenkomstige waarden berekend worden en kan een grafiek getekend worden.

Voor het praktisch gebruik in de wiskunde en in andere vakken (wetenschappen, technische vakken zoals mechanica, elektriciteit) moeten de leerlingen beschikken over de techniek om formules te gebruiken om waarden te berekenen of om bepaalde veranderlijken te expliciteren. Als een van de veranderlijken geschreven is in functie van de andere, kan die berekend worden als aan de andere veranderlijken een waarde wordt toegekend. Het gaat om het berekenen van de ‘getalwaarde’, zoals leerlingen dat voor veeltermen hebben gedaan in het tweede leerjaar. Als daarentegen een veranderlijke in een formule niet geëxpliciteerd is, dan kan op verschillende wijzen gewerkt worden. Enerzijds kan men de ‘gevraagde’ veranderlijke door het omvormen van formules toch nog expliciet schrijven in functie van de andere en de getalwaarde berekenen. Met de andere veranderlijken wordt dan gerekend zoals met letters. Toch is deze vorm van letterrekenen voor veel leerlingen moeilijk. Vandaar dat dit best wordt ingeschakeld in betekenisvolle situaties, o.m. bij het oplossen van problemen. Het omwerken van zomaar een uitdrukking met letters wordt hierbij vermeden. De context kan hier een signaalfunctie hebben voor flagrante fouten. In de wetenschappen en de technische vakken zullen leerlingen ook nog moeten leren met de juiste eenheden te rekenen. Een andere mogelijkheid is de gekende waarden invullen en de overgebleven veranderlijke oplossen, bijv. met technieken van het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen (overbrengen van een term, overbrengen van een factor), die de leerlingen kennen vanuit de eerste graad.

Het uitdrukken van een verband in een formule is een gelegenheid om de leerlingen te laten inzien dat de ene veranderlijke in functie van de andere verandert. Dit leidt tot begrippen zoals onafhankelijke en afhankelijke veranderlijke. Als het verband tussen twee grootheden geëxpliciteerd is in een formule, dan kan onderzocht worden welk effect er is op een van de veranderlijken als de andere gewijzigd wordt, bijv. wat is het effect van een vermenigvuldiging met 5 (bijv. ook een vermenigvuldiging met factor 5, met factor $\frac{1}{5}$, met factor 25, …).

Ook hier worden de uitdrukkingen vrij eenvoudig gehouden, bijv. vormen zoals $y = a$, $y = ax$, $y = ax + b$, $ax + by = c$, $y = ax^2$, $y^2 = x$, $x \cdot y = a$. Voor praktische toepassingen kunnen voorschriften ook algemeen genoteerd worden in hun impliciete vorm bijv. $f(x, y) = 0$, met $f(x, y)$ een algebraïsche uitdrukking in x en y.

41 De leerlingen moeten zelf een tabel kunnen opstellen, een grafiek tekenen, een verband in een formule vertolken. Om dit zinvol te maken wordt best aangesloten bij situaties die de leerlingen kennen, bijv. uit de technische toepassingen.

De leerlingen moeten eigenhandig een tabel kunnen opstellen en een grafiek kunnen tekenen. Dit vraagt enige inoefening. Bij de grafische voorstelling zal aandacht besteed worden aan de keuze van het assenstelsel en de eenheden op de assen, bijv. in functie van het aangeven van extreme waarden, nulwaarden, enz. Dit is een vaardigheid die nodig is bij het gebruik van het scherm op een grafische rekenmachine of een computer. Naast het manueel opmaken van een tabel of een grafiek kan aandacht besteed worden aan het gebruik van een grafische rekenmachine of software hiertoe. De routine die ze kunnen verwerven in deze relatief eenvoudige situaties kan hen ondersteunen bij meer ingewikkelde functies.

42 Het is te verwachten dat leerlingen een beter inzicht in de samenhang tussen tabel, grafiek, voorschrift en situatie zullen verwerven als ze een aantal oefeningen gemaakt hebben op het overbrengen van de informatie van de ene voorstelling naar een andere. Het doel is vlot te kunnen overgaan van een vorm van voorstelling naar een andere. Leerlingen moeten voorstellingen van eenzelfde situatie met elkaar kunnen associëren.

De overgang van 'tabel' of 'grafiek' naar 'voorschrift' is een gelegenheid om de leerlingen kritisch te leren omgaan met de besluitvorming (bijv. een tabel biedt maar informatie over een beperkt aantal koppels van de functie). Het omzetten van een situatie (verhaal, tekst) naar een meer formeel wiskundig voorschrift sluit dan weer nauw aan bij het doel van mathematiseren en/of modelleren van de leefwereld. Uiteindelijk zullen de leerlingen aan de vergelijking (of het voorschrift) de grafiek van een functie herkennen.

43 De leerlingen zullen in hun verdere studie hoofdzakelijk geconfronteerd worden met functies. Het is zinvol bij het begin dit begrip beter te omschrijven. Indien via het voorschrift aan elke waarde van de onafhankelijke veranderlijke (bijv. x) ten hoogste één waarde aan de andere (afhankelijk) veranderlijke (bijv. y) wordt toegekend, dan definieert dit voorschrift een functie. Deze kan dan genoteerd worden als functie (bijv.): $f: x \mapsto y = f(x)$ of $f: x \mapsto f(x)$ of zeer kort y = f(x). Voor een functie y = f(x) kan ook de uitdrukking $F(x, y) = y - f(x)$ gevormd worden. De grafiek van de functie f is dan de oplossingsverzameling van de vergelijking $F(x, y) = 0$. De grafiek van een functie wordt door een evenwijdige aan de y-as ten hoogste éénmaal gesneden.

Om beter in te zien wat een functie is kunnen de leerlingen geconfronteerd worden met enkele tegenvoorbeelden.

44 Bij het interpreteren van grafieken zal aandacht besteed worden aan het vergelijken van verschillende grafieken van eenzelfde verband. Daaruit zou een kritische houding moeten volgen ten aanzien van de keuze van assen, eenheden, kijkvenster, .… Anderzijds moeten leerlingen grafieken van verschillende verbanden met elkaar kunnen vergelijken (bijv. welk systeem van betalen kost het meest?). Zo kan de vraag naar de gelijkheid van twee functiewaarden voor een bepaalde x-waarde leiden tot het algebraïsch berekenen van de coördinaat van het snijpunt van de twee bijbehorende grafieken (bijv. met gelijkstelling van de voorschriften), tot het grafisch interpreteren ervan en tot het oplossen van een stelsel.

Bijzondere aandacht kan besteed worden aan de ligging van een grafiek ten opzichte van bepaalde 'niveaulijnen', in het bijzonder de nullijn.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f45	B	De definitie van een eerstegraadsfunctie geven.	
f46	B	De grafiek van een eerstegraadsfunctie tekenen.	23
f47	B	Het nulpunt van een eerstegraadsfunctie bepalen en grafisch interpreteren.	24
f48	B	De grafische betekenis van de coëfficiënten m en q in het voorschrift $f(x)=mx+q$ van de functie uitleggen.	24
f49	B	Uit een tabel van functiewaarden van een eerstegraadsfunctie het voorschrift bepalen.	
f50	B	Uit de grafiek van een eerstegraadsfunctie het voorschrift bepalen.	
f51	B	De tekenverandering van een eerstegraadsfunctie onderzoeken en interpreteren op de grafiek.	24
f52	B	Een ongelijkheid van de eerste graad met één onbekende oplossen en het verband leggen tussen die oplossing en een passende grafische voorstelling.	
f53	B	Vraagstukken oplossen waarbij het verband beschreven wordt door een eerstegraadsfunctie.	

Pedagogisch-didactische wenken

45 Bij de voorbeelden in de inleiding op reële functies worden de leerlingen geconfronteerd met de vier mogelijkheden waarmee een functie kan bepaald worden. Daaruit blijkt dat het voorschrift het middel is om een functie te bepalen. De grafiek, voor zover er vanuit gegaan wordt dat ze volledig gekend is op grond van het getekende deel, vervult die rol ook. Een tabel van functiewaarden kan daartoe ook gebruikt worden, al geeft die relatief beperkte informatie over het geheel van de functie.

Leerlingen moeten inzien dat een verband wordt beschreven met een functievoorschrift van de eerste graad, als de grafiek ervan een rechte is. En omgekeerd is de grafiek van een functie met een voorschrift van de eerste graad een rechte. Dit proces moet leiden tot een hanteerbare definitie van eerstegraadsfunctie met behulp van het functievoorschrift.

Er moet gelet worden op een correct taalgebruik: een punt ligt op een rechte, terwijl een coördinaat een oplossing is van een vergelijking van de rechte; een functie f met voorschrift $f(x)=mx+q$ heeft een grafiek, die grafiek heeft in een coördinatenstelsel een vergelijking $y=mx+q$.

46 De leerlingen hebben in de eerste graad kennis gemaakt met een grafische voorstelling van het verband tussen recht evenredige grootheden. De gevonden coördinatenkoppels liggen op een ‘rechte’. Nu de reële getallen gekend zijn, kan deze voorkennis een zinvol uitgangspunt zijn om de grafiek van eerstegraadsfuncties op te bouwen.

Deze doelstelling moet ruim geïnterpreteerd worden. De leerlingen moeten een idee hebben van de punt voor punt constructie van een grafiek. Zo kunnen ze bijv. een tabel van functiewaarden opstellen, de bijbehorende punten tekenen, nog tussenliggende koppels berekenen, om uiteindelijk vast te stellen dat de grafiek een rechte is. De grafische mogelijkheden van rekenmachine en computer kunnen hier het beeld van een effectieve punt voor punt constructie versterken.

Vanuit de meetkunde weten leerlingen dat een rechte kan bepaald worden met een *minimum* aan gegevens, bijv. twee punten of een punt en een rechte waaraan ze evenwijdig is. Analytisch vertaalt zich dat in een meer praktische werkwijze om het functievoorschrift op te stellen, met name op grond van de coördinaten van twee punten of van de coördinaat van een punt en de richtingscoëfficiënt van de rechte (zie f54). Weliswaar kan dit maar omdat men ‘weet’ dat de grafiek van een eerstegraadsfunctie een rechte is. De verantwoording daarvan komt aan bod in de volgende doelstellingen. Uiteindelijk zullen de leerlingen aan de vergelijking (of het voorschrift) herkennen of de grafiek van een functie al dan niet een rechte is. Verwijzend naar enkele meer algemene voorbeelden uit de inleiding op functies moeten ze kunnen inzien dat slechts eerstegraadsfuncties een rechte als grafiek hebben.

De grafiek van een eerstegraadsfunctie is een rechte. Het voorschrift van de functie kan gekoppeld worden aan de algemene vergelijking van die rechte (zie f57).

47 De gekende techniek van het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen kan hier gekoppeld worden aan het bepalen van het nulpunt van de overeenkomstige functie of aan het bepalen van het snijpunt van de rechte met de eerste coördinaatas (of de grafische interpretatie).

Bij een gegeven grafiek kan het nulpunt grafisch afgelezen worden. Dat is mogelijk voor gehele waarden en afhankelijk van de eenheden voor een aantal rationale waarden. Aflezing in het algemeen kan maar benaderend zijn. Leerlingen worden op deze wijze geconfronteerd met een eerste vorm van benadering van een nulpunt. Ze kunnen hier een voordeel ervaren van het werken met functievoorschriften en een algebraïsch algoritme voor het 'exact' oplossen van vergelijkingen. Maar verder in hun studieloopbaan zullen ze allicht geconfronteerd worden met situaties waarin een dergelijke werkwijze niet beschikbaar is en zullen ze hiervoor andere benaderingsmethoden gebruiken. Het grafisch benaderen van een oplossing is een eerste stap.

48 Op basis van voorbeelden over recht evenredige grootheden kan het verband geëxpliciteerd worden tussen formule, grafiek en de functie met voorschrift $f(x) = mx$. Dat de grafiek een rechte is kan o.m. afgeleid worden met behulp van gelijkvormigheid van driehoeken (cf. hoek met de eerste coördinaatas). Sommige eigenschappen van evenredigheden kunnen hier geïllustreerd worden (bijv. vermenigvuldigen van teller en noemer van een verhouding met eenzelfde getal geeft een gelijke verhouding; merk het verband met de stelling van Thales).

Snel blijkt dat m een idee geeft over de *helling* van de rechte en bijgevolg over de richting van de rechte. De betekenis van de term richtingscoëfficiënt wordt hierdoor duidelijk. Hier kan al een verband gelegd worden met het begrip *differentiequotiënt* (quotiënt van de toename van de afhankelijke veranderlijke en de toename van de onafhankelijke veranderlijke). De richtingscoëfficiënt kan in verband gebracht worden met het stijgen of dalen van de grafiek.

Bij de functie met voorschrift $f(x) = mx + q$ gaat de evenredigheid tussen x-waarden en de bijbehorende functiewaarden verloren. Evenredigheid is er wel tussen de toenamen van x en de bijbehorende toenamen van de functiewaarden (cf. differentiequotiënt). De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = mx + q$ is de grafiek van $f(x) = mx$, die onderworpen werd aan een *verschuiving* volgens de tweede coördinaatas waarvan de grootte en de zin bepaald worden door q. Hieruit kan meteen volgen dat evenwijdige rechten eenzelfde richtingscoëfficiënt hebben.

49 Als een tabel van functiewaarden gegeven is kan de vergelijking worden opgesteld door daaruit twee stellen coördinaatgetallen af te leiden en de redenering te maken voor een rechte door twee punten (zie f54). Uiteraard is een controle voor de andere gegeven waarden noodzakelijk.

Een andere mogelijkheid is in de tabel zelf op te zoeken of met een bepaalde vaste toename van de onafhankelijke veranderlijke telkens een gelijke toename van de afhankelijke veranderlijke overeenkomt. Daaruit kan dan de richtingscoëfficiënt afgeleid worden. (Bijv. als bij een vaste toename van de x-waarden met 5, een vaste toename van f(x) met 15 overeenkomt is de richtingscoëfficiënt 3.)

50 Een eenvoudige instap kan zijn het associëren van gegeven grafieken aan een reeks gegeven voorschriften. Daarbij komt het eerder aan op het verifiëren dan op het zelf opzoeken van de elementen.

Als de grafiek van een eerstegraadsfunctie gegeven is, kan men meestal de waarden van m en q van het functievoorschrift grafisch aflezen (de toename van f(x) bij een toename van x met 1 of de verhouding van de toename van f(x) tot de toename van x voor de richtingscoëfficiënt m, de grootte van de afsnijding op de y-as voor q).

Een andere mogelijkheid is het aflezen van twee stellen coördinaatgetallen zodat de vergelijking van de rechte door die twee punten kan opgesteld worden. Explicitering van de afhankelijke veranderlijke geeft het functievoorschrift. Voor het opstellen van de vergelijking kan gekozen worden voor een werkwijze met behulp van onbepaalde coëfficiënten.

Leerlingen moeten in beide gevallen bij het aflezen van coördinaatgetallen oog leren hebben voor 'nauwkeurigheid'. Zo zullen ze uitkijken naar punten met een stel gehele coördinaten of met eenvoudige coördinaten zoals die van het nulpunt. Dit is niet altijd mogelijk, wat de beperktheid van de procedure aangeeft.

Het bepalen van het voorschrift kan gebeuren door het oplossen van een 2x2-stelsel of door gebruik te maken van de formules uit de analytische meetkunde (zie f54). Een geïntegreerde aanpak is daarom wel aan te bevelen. Let wel, de situatie in de analytische meetkunde is ruimer dan die van de eerstegraadsfuncties.

Als toepassing kunnen hier oefeningen aangeboden worden op het zoeken van het voorschrift van constante functies en van functies met een meervoudig voorschrift.

52 Het oplossen van *ongelijkheden* van de eerste graad met één onbekende kan hier verbonden worden met de tekenverandering van de bijbehorende eerstegraadsfunctie.

Een verdere toepassing is het oplossen van stelsels ongelijkheden van de eerste graad.

In beide gevallen wordt het leerproces best omkaderd vanuit vraagstukken over meer realistische situaties. Interpretatie van de oplossing is dan wel noodzakelijk.

53 Als toepassing worden enkele vraagstukken behandeld die aanleiding geven tot een beschrijving met een functie van de eerste graad met twee onbekenden. Hierbij komt het omzetten in wiskundige vorm (het mathematiseren) door geschikte keuze van de onbekenden expliciet aan bod.

In deze toepassingssituaties kunnen voor de berekeningen van de karakteristieken van de eerstegraadsfuncties ICT-hulpmiddelen gebruikt worden, bijv. de ingebouwde oplosser voor nulpunten, het grafisch aflezen van nulpunten (cf. vergelijkingen), teken (cf. ongelijkheden), snijpunten of onderlinge ligging van twee functies (cf. rechter- en linkerlid van gelijkheid of ongelijkheid). Het is evident dat in eenvoudige situaties het manueel rekenen zinvol blijft.

3 Algemene vergelijking van een rechte

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f54	B	Een vergelijking opstellen van een rechte als ze gegeven wordt door – een punt en de richtingscoëfficiënt; – twee punten.	25
f55	B	De rechte met vergelijking $ax+by+c=0$, waarbij $a \neq 0$ of $b \neq 0$, tekenen en bespreken.	25
f56	B	De richtingscoëfficiënt van de rechte met vergelijking $ax+by+c=0$ waarbij $a \neq 0$ of $b \neq 0$ bespreken.	
f57	B	Het verband leggen tussen de algemene vergelijking van een rechte $ax+by+c=0$ (met $a \neq 0$ en $b \neq 0$) en de verwante eerstegraadsfunctie.	25

Pedagogisch-didactische wenken

54 Als een coördinatenstelsel is vastgelegd kan een rechte beschreven worden door middel van een vergelijking. Die drukt het verband uit tussen de coördinaatgetallen (x, y) van de punten van de rechte. De leerlingen hebben dit verband al onderzocht bij de grafiek van een eerstegraadsfunctie. Hier worden basisformules opgesteld voor rechten die aan bepaalde voorwaarden voldoen, enerzijds door een gegeven punt en met gegeven richtingscoëfficiënt en anderzijds door twee gegeven punten. Formules die aan bod kunnen komen zijn: $y - y_0 = m(x - x_0)$ en $y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$. Voor de tweede vorm bestaat het alternatief van het berekenen van de richtingscoëfficiënt van de rechte met behulp van de coördinaten van de twee gegeven punten met gebruik van de formule $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, waarna de eerste formule wordt toegepast.

Het opstellen van vergelijkingen van rechten door twee gegeven punten of door een gegeven punt en met een gegeven richtingscoëfficiënt moet ingeoefend worden met vele concrete voorbeelden en toepassingen. Zo kan bij het opstellen van een vergelijking van een rechte die aan bepaalde voorwaarden voldoet, al gewerkt worden met de methode van onbepaalde coëfficiënten. Ook het probleem van evenwijdige rechten kan aan bod komen. En als de twee gegeven punten op een rechte liggen evenwijdig aan één van de coördinaatassen komen leerlingen spontaan in aanraking met het probleem van de richtingscoëfficiënt.

55 De vergelijking van een rechte kan van de expliciete vorm omgewerkt worden tot de meer algemene vergelijking $ax+by+c=0$. Dit wil zeggen de verschillende vergelijkingen van rechten, m.n. de vormen $y=mx$ en $y=mx+q$, maar ook y = q en x = k moeten omgevormd worden tot de algemene vorm. De relatie tussen de coëfficiënten van de verschillende vormen van de vergelijking wordt gelegd.

Omgekeerd kan de algemene vorm van de vergelijking van de eerste graad omgewerkt worden tot de expliciete vorm, op voorwaarde dat $b \neq 0$. Dit leidt op een natuurlijke wijze tot de bespreking van de vergelijking als een of meer coëfficiënten nul zijn. Als in de algemene vergelijking b wel nul is (en $a \neq 0$), dan stelt ze een rechte voor evenwijdig aan de y-as. Deze vorm is niet herleidbaar tot een functievoorschrift. Van deze rechte kan de richtingscoëfficiënt niet bepaald worden.

56 Mits $b \neq 0$ kan de vergelijking $ax+by+c=0$ omgevormd worden tot $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$. Hieruit is af te leiden dat $-\frac{a}{b}$ de richtingscoëfficiënt van deze rechte is. Veeleer dan dit als zoveelste formule te laten memoriseren, kan dit als werkwijze aangeleerd worden. Wel kan hier in functie van de coëfficiënten van de veranderlijken (x en y) het stijgend of dalend zijn besproken worden.

4 Stelsels van vergelijkingen

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f58	B	Bij een gegeven verbale situatie een stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden opstellen.	25
f59	B	Een stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden grafisch oplossen en interpreteren.	25
f60	B	Een stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden algebraïsch oplossen.	25

Pedagogisch-didactische wenken

58 De leerlingen beschikken al over het model vergelijking om bepaalde situaties tussen twee veranderlijke grootheden te mathematiseren. Een aantal probleemsituaties leidt tot een systeem van twee (of meer) dergelijke vergelijkingen. Het aanpakken van stelsels vanuit voldoende vraagstukken moet waarborgen dat leerlingen vertrouwd geraken met deze nieuwe vorm van modellering.

Stelsels van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden worden meetkundig geassocieerd met het bepalen van het snijpunt van twee rechten. Dit leidt tot het grafisch aflezen van de coördinaat van het snijpunt en tot algebraïsche methoden om dit nauwkeuriger te bepalen. In de praktijk komen stelsels voor in allerlei situaties waar het verband met de meetkundige situatie minder duidelijk is. De moeilijkheden voor leerlingen zijn daarbij vaak het kiezen van de onbekenden en het opstellen van de vergelijkingen aan de hand van de beschreven situatie. Daarom is het zinvol hierop enkele afzonderlijke oefeningen te voorzien, zonder dat het stelsel noodzakelijk al effectief opgelost wordt.

59 De vergelijkingen van een stelsel kunnen in een assenstelsel voorgesteld worden als rechten (bijv. met ICT-hulpmiddelen). De oplossing van het stelsel kan grafisch afgelezen worden. Zo nodig kan een nauwkeurige oplossing berekend worden door gebruik van de daartoe geëigende middelen van de grafische rekenmachine of computer (bijv. met intersect).

60 Soms is het zinvol de oplossing van een stelsel zo exact mogelijk te bepalen. Daartoe kunnen als algebraische oplossingsmethoden de gelijkstellings-, de combinatie- en de substitutiemethode aangeleerd worden. Als basis kan men zich eventueel tot één methode beperken. Interessant is echter dat leerlingen de meest

accurate methode leren gebruiken. Bijvoorbeeld met twee (naar y) geëxpliciteerde vergelijkingen ligt de gelijkstellingsmethode voor de hand. Daartegenover zijn sommige stelsels eenvoudig met combinatie op te lossen, daar waar het omwerken van de vergelijkingen naar voorschriften al heel wat rekenwerk vraagt.

Het verband tussen het algebraïsch bepalen van het snijpunt van de grafiek van twee eerstegraadsfuncties en het oplossen van stelsels ligt voor de hand. Met ICT-hulpmiddelen kan deze grafische oplossingswijze eventueel als controlemiddel gehanteerd worden bij andere oplossingsmethoden.

5 Problemen analytisch oplossen

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f61	B	Vraagstukken oplossen waarbij – de coördinaat van een punt of de afstand tussen twee punten moet berekend worden; – een vergelijking van een rechte moet opgesteld worden; – een stelsel van vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden moet opgesteld worden.	
f62	B	Eigenschappen analytisch bewijzen.	

Pedagogisch-didactische wenken

61 Bij het oplossen van vraagstukken kunnen de leerlingen leren een beschreven situatie te mathematiseren. Bij het analytisch oplossen van een probleem ondervinden ze daarbij ‘nieuwe’ moeilijkheden. Ze moeten het verband tussen gegevens onderling en tussen gegevens en gevraagde leren analytisch te omschrijven, bijv. het kiezen van de onbekenden en het opstellen van de verschillende vergelijkingen. De leerlingen hebben hiermee vaak meer problemen dan met het uitvoeren van rekentechnieken.

Voorbeelden van meetkundige problemen die aanleiding geven tot het bepalen van een coördinaat of het berekenen van een afstand zijn: coördinaat van het midden van een lijnstuk, onderzoeken of drie punten collineair zijn, van een driehoek bepalen of die gelijkbenig of rechthoekig is.

Sommige problemen leiden tot het opstellen van een vergelijking, bijv. de vergelijking van een zwaartelijn in een driehoek opstellen, de omtrek van een driehoek bepalen als de vergelijkingen van de dragers van de zijden gegeven zijn. Bijkomende toepassingen op het berekenen van afstanden: de coördinaat van het zwaartepunt van een driehoek bepalen, de afstand van een hoekpunt van een driehoek tot het zwaartepunt berekenen.

Er zal aandacht besteed worden aan het grafisch oplossen van problemen, bijv. bij het vergelijken van twee functies (bijv. welk systeem van betalen kost het meest?). Zo kan de vraag naar de gelijkheid van twee functiewaarden voor een bepaalde x-waarde leiden tot het algebraïsch berekenen van de coördinaat van het snijpunt van de twee bijbehorende grafieken, tot het grafisch interpreteren ervan en tot het oplossen van een stelsel.

62 De leerlingen beschikken nu over een aantal middelen om bepaalde eigenschappen analytisch te verklaren (te bewijzen). Dit betekent concreet dat bepaalde relaties of situaties algemeen aangetoond worden door het gebruik van algemene coördinaten in een goed gekozen (orthonormaal) assenstelsel.

Voorbeelden:
- de eigenschap van een middenparallel in een driehoek of een gelijkbenig trapezium,
- de lengte van de zwaartelijn naar de schuine zijde in een rechthoekige driehoek,
- de concurrentie van zwaartelijnen in een driehoek,
- de eigenschap dat in een parallellogram de som van de kwadraten van de lengten van de diagonalen gelijk is aan de som van de kwadraten van de lengten van de zijden.

De leerlingen zijn nog niet zo vaak geconfronteerd geweest met deze vorm van mathematiseren. Er zal dus veel zorg besteed worden aan de werkwijze, bijv. de keuze van het assenstelsel om het rekenwerk te vereenvoudigen. De leerkracht zal er zich van bewust zijn dat het verwerven van dergelijke ervaring een meer dan occasionele behandeling van dit onderdeel vergt. Deze werkwijze biedt tevens een zinvol alternatief voor het louter technisch uitvoeren van oefeningen op algebraïsch rekenen en het rekenen met veranderlijken.

Bepaalde software laat toe problemen analytisch aan te pakken zonder de meer voordelige keuze voor assenstelsel, coördinaten,… te maken. Ze beschikken immers over de mogelijkheid rechten door punten te tekenen, de vergelijking op te vragen, en coördinaten van snijpunten te berekenen. Toch is het zinvol voldoende aandacht te besteden aan de manuele weg, omdat die het inzicht in de problematiek en de aanpak ervan kan versterken. Software kan hierbij dan nog gebruikt worden voor de berekeningen (bijv. oplossen van stelsel).

5.3 Leerplan a - tweede leerjaar

5.3.1 MEETKUNDE

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **meetkunde** (basisdoelstellingen) worden ca. **42** lestijden besteed

de cirkel	ca. 14 lestijden
driehoeksmeting	ca. 14 lestijden
ruimtemeetkunde	ca. 14 lestijden

1 De cirkel

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m1	B	Bewijzen dat door drie niet-collineaire punten juist één cirkel gaat.	
m2	B	Eigenschappen in verband met straal, koorde en apothema onderzoeken, bewijzen en gebruiken.	26
m3	B	De onderlinge ligging van een cirkel en een rechte onderzoeken en de definitie van raaklijn formuleren.	
m4	B	Eigenschappen in verband met middelpuntshoeken en omtrekshoeken onderzoeken, bewijzen en gebruiken.	26
m5	B	Meetkundige constructies uitvoeren en verklaren, zoals – de raaklijn in een punt van een cirkel, – de raaklijnen uit een punt aan een cirkel, – de ingeschreven cirkel in een driehoek, – de omgeschreven cirkel aan een driehoek..	26
m6	U	Eigenschappen van regelmatige veelhoeken onderzoeken.	
m7	B	Een vergelijking opstellen van een cirkel met gegeven middelpunt en straal.	
m8	B	Het middelpunt en de straal bepalen van een cirkel waarvan de vergelijking gegeven is.	

Pedagogisch-didactische wenken

In dit deel synthetische meetkunde blijft de essentie *het onderzoeken van meetkundige figuren en hun eigenschappen*. Het gebruik van een grafische rekenmachine of software, die de analyse van dergelijke figuren toelaat, is daarbij aangewezen. De vraag daarbij is vaak: waarom gebeurt, wat we zien op het scherm, op deze wijze. En daarom blijft in de wiskunde met vijf wekelijkse lestijden aandacht voor een verklaring of een bewijs belangrijk. De bekwaamheid daartoe kan voor leerlingen een aanwijzing zijn in hun keuzeproces naar de derde graad toe.

Met het onderdeel cirkel wordt voor de meeste leerlingen het onderdeel (vlakke) meetkunde afgerond. Uiteraard zal de meetkundekennis van de vorige jaren, bijv. congruentie, gelijkvormigheid, Pythagoras, betrokken worden bij de verwerking en integratie van dit onderdeel. Voor het toepassen van de eigenschappen moet zowel gezocht worden in het vlak als in de ruimte.

1 De cirkel als vlakke figuur is al langer door de leerlingen gekend. Toch bleef die kennis eerder passief, d.w.z. als ‘een gebruik maken van‘. Nu kan de cirkel als figuur met de rijkste symmetrie grondiger aangepakt worden.

2 Leerlingen zijn vanuit hun vooropleiding vertrouwd met het *zelf onderzoeken* van eigenschappen. De eigenschappen die hier bedoeld worden zijn relatief eenvoudig en kunnen door middel van een goede didactische aanpak hoofdzakelijk via zelf onderzoeken gevonden en verklaard worden.

Eigenschappen die in aanmerking komen zijn onder meer: middelloodlijn van een koorde en omgekeerd, verband lengte apothema’s en koorden, middellijn en symmetrie.

3 Het vergelijken van de afstand van het middelpunt van een cirkel tot een rechte en de straal van die cirkel leidt tot informatie over de onderlinge ligging van een rechte en een cirkel. Dat onderzoek leidt tot het begrip raaklijn aan de cirkel. Het begrip ‘raken’ komt hier voor het eerst specifiek aan bod. Omdat dit een belangrijk wiskundig begrip is, waarmee leerlingen nog meermaals geconfronteerd zullen worden, moeten de ‘kenmerkende eigenschappen’ onderzocht en geformuleerd worden.

4 De relatie tussen middelpuntshoek en omtrekshoek op eenzelfde koorde (of boog) kan onderzocht en verklaard worden. De toepassingen zullen in de eerste plaats gericht zijn op een praktisch gebruik van de eigenschappen in berekeningen van hoeken (bijv. omtrekshoek op een middellijn).

Uitbreiding

Als toepassing kunnen omtrekshoeken bepaald worden waarbij een been raaklijn is aan de cirkel.

Een andere toepassing is de bespreking van de begrippen binnen- en buitenomtrekshoek en de berekening van hun grootte in functie van middelpuntshoeken.

5 De constructies van cirkels die aan gegeven voorwaarden voldoen en van raaklijnen aan cirkels moeten tegelijk *teken- en denkproblemen* zijn. De leerlingen moeten daarbij een verklaring kunnen geven over de gebruikte technieken en procedures en waarom die een antwoord bieden op de gestelde problematiek.

De constructie van de ingeschreven cirkel en de omgeschreven cirkel van een driehoek is een aanleiding om de eigenschap van het snijden in één punt van respectievelijk de bissectrices en de middelloodlijnen van een driehoek aan te tonen.

Uitbreiding

Als redeneerproblemen kunnen de constructies van de gemeenschappelijke raaklijnen aan twee cirkels gegeven worden.

6 *Uitbreiding*

Met behulp van eigenschappen in een cirkel, het verband tussen middelpuntshoeken en koorden, de stelling van Pythagoras, vierkantswortels en de driehoeksmeting worden enkele voorbeelden behandeld van regelmatige veelhoeken, met o.m. de berekening van de zijde in functie van de straal van de omgeschreven cirkel.

Als toepassing kan de omtrek en de oppervlakte van een regelmatige veelhoek berekend worden. Uit de vergelijking met de omtrek of de oppervlakte van de cirkel kan een benadering afgeleid worden voor het reëel getal π (cf. het gebruik van tabellen op een rekenmachine).

7 De problematiek van de vergelijking van de cirkel kan als algemeen probleem gesteld worden. De leerlingen kennen de definitie van de cirkel en beschikken met de formule voor de afstand tussen twee punten over voldoende algebraïsche kennis om dit zelf te kunnen afleiden.

In een eerste stap kan men zich beperken tot cirkels met de oorsprong als middelpunt. Daarna kan een verschuiving volgens de richting(en) van de coördinaatassen uitgevoerd worden. Dit biedt de mogelijkheid de relatie tussen verschuiving en coördinaten te gebruiken.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m9	B	De sinus, de cosinus en de tangens van een hoek definiëren in een goniometrische cirkel.	
m10	B	De verbanden tussen de goniometrische getallen van verwante hoeken (i.c. tegengestelde, complementaire, supplementaire hoeken) onderzoeken, formuleren en verklaren met behulp van de goniometrische cirkel.	
m11	B	De som- en verschilformules opstellen.	
m12	B	Het verband onderzoeken tussen de begrippen hellingshoek en richtingscoëfficiënt van een rechte.	
m13	B	De sinusregel en de cosinusregel opstellen voor willekeurige driehoeken.	
m14	B	De sinusregel en cosinusregel toepassen bij het oplossen van vraagstukken.	

Pedagogisch-didactische wenken

9 De definities van sinus en cosinus van een georiënteerde hoek worden vastgelegd met behulp van de coördinaatgetallen van zijn beeldpunt op de goniometrische cirkel. Met behulp van gelijkvormige driehoeken krijgt de tangens een meetkundige interpretatie. Het aflezen en het interpreteren van de uitlezing bij het gebruik van een rekenmachine moet voldoende aandacht krijgen.

Op basis van de definities en eigenschappen (bijv. Pythagoras, gelijkvormige driehoeken) kunnen de betrekkingen tussen de goniometrische getallen van eenzelfde hoek, die in het eerste leerjaar van de tweede graad werden afgeleid voor scherpe hoeken, veralgemeend worden en/of uitgebreid.

10 Uitgaande van de betekenis van de goniometrische getallen op de goniometrische cirkel en op basis van meetkundige eigenschappen (bijv. van spiegelingen t.o.v. van de coördinaatassen en hun invloed op de coördinaten) kunnen de relaties tussen de goniometrische getallen van verwante hoeken (i.c. tegengestelde hoeken, complementaire hoeken en supplementaire hoeken) afgeleid worden. Belangrijk hierbij is dat de goniometrische cirkel als hulpmiddel voor het terugvinden van de betrekkingen functioneert. Deze formules kunnen ondersteunend werken bij het terugzoeken van een hoek uitgaande van een van zijn goniometrische getallen door middel van een rekenmachine.

De relaties tussen de goniometrische getallen van een hoek onderling en tussen die van verwante hoeken kunnen gebruikt worden om goniometrische uitdrukkingen te herleiden naar een eenvoudigere gedaante. Bij het ‘bewijzen van goniometrische identiteiten’ zal dit eenvoudiger maken voorop staan. De moeilijkheidsgraad van de oefeningen wordt dus bewust niet te complex gemaakt.

11 De leerlingen kunnen ontdekken dat de meest voor de hand liggende formules, waarbij bijvoorbeeld $\sin(a+b)$ verbonden wordt met $\sin a + \sin b$, niet geldig zijn. De rekenmachine en de grafiek van $f(x) = \sin x$ kunnen hier ondersteunend werken. Daarna zal voor een van de gevallen best de juiste formule gegeven worden en voor een aantal waarden gecontroleerd worden. Dan kan een bewijs volgen. De andere formules kunnen uit deze eerste basisformule afgeleid worden.

12 Let wel. Het verband tussen de tangens van de hellingshoek en de richtingscoëfficiënt geldt ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel. Leerlingen gebruiken deze regel wel eens verkeerd in situaties die daaraan niet voldoen.

14 Bij het oplossen van *vraagstukken in willekeurige driehoeken* ligt de kennis van de *sinusregel* en de *cosinusregel* voor de hand. De regels zullen voor de leerlingen plausibel gemaakt worden met voorbeelden. Het bewijs ervan behoort niet tot de basiskennis. Omwille van een mogelijk verschil in gebruik in de verschillende vakken zal voor de leerlingen de toepassing van de cosinusregel in mechanica en elektriciteit uitgelegd worden. Het gebruik van ICT-hulpmiddelen voor het effectieve rekenwerk kan hier meer tijd vrij maken voor aandacht aan dit mathematiseringsproces.

Het oplossen van driehoeken wordt best gesitueerd in het oplossen van problemen. Leerlingen moeten aandacht besteden aan de interpretatie van de resultaten. Al te extreme berekeningen worden vermeden.

Men kan aandacht besteden aan het berekenen van allerlei elementen van de driehoek, zoals hoogtelijn, zwaartelijn, oppervlakte van de driehoek, …. Zo komen een aantal problemen uit de synthetische meetkunde nog eens op een andere wijze aan bod. Bij het oplossen van driehoeken zal aandacht besteed worden aan ruimtelijk gesitueerde problemen.

3 Ruimtemeetkunde

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m15	B	In concrete situaties de onderlinge ligging van twee rechten, van een rechte en een vlak en van twee vlakken onderzoeken en ruimtelijk voorstellen.	
m16	B	Eigenschappen over de ligging van rechten en vlakken in de ruimte onderzoeken en formuleren.	
m17	B	Situaties waarin de ruimtelijke onderlinge ligging van rechten niet getrouw wordt weergegeven in een vlakke voorstelling ervan, ruimtelijk aanwijzen en in een tekening voorstellen.	26
m18	B	Eenvoudige problemen oplossen in verband met ruimtelijke situaties door gebruik te maken van eigenschappen van vlakke figuren.	

Pedagogisch-didactische wenken

Het hoofddoel van het onderdeel ruimtemeetkunde blijft het ontwikkelen van ruimtelijk inzicht. Dit wordt niet bereikt door een aantal theoretische beschouwingen, maar vooral door actief ruimtelijke (probleem)-situaties te onderzoeken, vermoedens te formuleren en ze te toetsen en te verklaren. De klemtoon op het actief onderzoeken door de leerlingen houdt in dat er nog altijd vrij intuïtief kan gewerkt worden.

15 In de eerste graad werden allerlei ruimtefiguren onderzocht en voorgesteld in twee dimensies. Daarbij werd het begrippenarsenaal omtrent de onderlinge ligging van rechten en vlakken vrij intuïtief gehanteerd zonder het te expliciteren. Nu wordt dit wat systematischer aangepakt. Daarbij verdient het nog steeds aanbeveling uit te gaan van *onderzoeksactiviteiten op concrete ruimtefiguren*, zoals balk, kubus en de voorstelling ervan. Zo kunnen bijvoorbeeld aan bod komen: de onderlinge ligging van grond- en bovenvlak, van zijvlakken van kubus en balk, van snijlijnen van grond- en bovenvlak met een zijvlak, van rechten in twee vlakken waarvan de onderlinge ligging gekend is, van rechten en/of vlakken die bepaald worden door ribben en/of punten op ribben, ….

Een aantal problemen wordt bij het tekenen opgelost door bijvoorbeeld lijnconventies in te voeren (cf. zichtbare en onzichtbare delen). Hier kan geïllustreerd worden dat afhankelijk van de gekozen perspectivische voorstelling andere conventies gelden en andere voorstellingsproblemen voorkomen.

16 De bedoeling is *elementaire eigenschappen* te verwerven die inzicht geven in de ligging van rechten en vlakken ten opzichte van elkaar. Deze eigenschappen kunnen gebruikt worden bij het onderzoeken van ruimtefiguren (bijv. welke consequenties heeft het evenwijdig zijn van grondvlak en bovenvlak van een ruimtefiguur op de snijlijnen met de zijvlakken). Vandaar dat het zinvol is deze eigenschappen zelf in concrete ruimtelijke situaties te ontwikkelen. Zo kunnen een aantal eigenschappen ontdekt worden door de doorsnede van een kubus of een balk met een vlak te onderzoeken.

Bij het aanbrengen van eigenschappen zal aandacht besteed worden aan een duidelijke verwoording, aan een adequate voorstelling ervan zowel in een ruimtelijke situatie als op een tekening en aan het gebruik ervan in toepassingen. Zoals voor de vlakke meetkunde kunnen een aantal van de onderzochte eigenschappen opgenomen worden in een gereedschapskist voor de ruimtemeetkunde. Dit kan bijvoorbeeld gebruikt worden bij het oplossen van nieuwe problemen. Het vormt ook de onderbouw voor het werkkader dat in de derde graad aan bod zal komen. (Voor een overzicht van eigenschappen die mogelijk aan bod kunnen komen, zie deel 4 Gereedschapskist meetkunde.)

Deze eigenschappen worden gebruikt om constructies en redeneringen te verklaren. In het kader van het ontwikkelen van redeneervaardigheden kunnen een aantal eigenschappen ook bewezen worden. Hierbij wordt lokaal deductief gewerkt, d.w.z. dat men werkt tegen de achtergrond van een aantal aanvaarde grondeigenschappen, die uit het intuïtieve leerproces van de voorbije jaren kunnen gesynthetiseerd worden, bijv. bij de aanvang van dit onderdeel ruimtemeetkunde. Voor de leerlingen moet het onderscheid duidelijk worden tussen een bewijs en een veralgemening door een onderzoeksopdracht, gevolgd van het aanvaarden van de eigenschap. Beide werkwijzen kunnen naast elkaar blijven functioneren. Zo kan men de (nieuwere) eigenschappen over loodrechte stand van rechten en vlakken vooral 'onderzoekend veralgemenen', waar men de eigenschappen over evenwijdigheid van rechten en vlakken voor bewijzen kan gebruiken.

Voor de *loodrechte stand* van rechten, van een rechte en een vlak en van vlakken, die hier voor het eerst aan bod komen, kan het intuïtieve inzicht geëxpliciteerd worden in een aantal elementaire eigenschappen. Hier zal aandacht besteed worden aan een duidelijke verwoording, aan een adequate voorstelling ervan zowel in een ruimtelijke situatie als op een tekening en aan het gebruik van de eigenschappen in toepassingen. Bewijzen van de eigenschappen kunnen in de derde graad aan bod komen.

17 De leerlingen hebben in de eerste graad al kunnen ervaren dat bij de voorstelling van de driedimensionale ruimte in een vlakke voorstelling informatie verloren gaat (bijv. loodrechte stand, hoek, …). De bespreking van dit onderdeel ruimtemeetkunde biedt de gelegenheid deze ervaring te verdiepen en/of nauwkeuriger te omschrijven. Expliciet kunnen aan bod komen: kruisende rechten die als 'snijdende rechten' kunnen worden voorgesteld; de hoek tussen rechten (bijv. de ribben van een balk of kubus) wordt niet noodzakelijk in ware grootte voorgesteld; de loodrechte stand van rechten of een rechte en een vlak; de vorm van bepaalde zijvlakken van een ruimtefiguur, …. Door de leerlingen te confronteren met reële ruimtelijke figuren en met verschillende voorstellingen ervan, kunnen ze oog krijgen voor het al of niet getrouw weergeven van de ruimtelijke onderlinge ligging.

Als toepassing kan het maken van *eenvoudige doorsneden* aan bod komen, omdat daarin zowel de problematiek van het voorstellen (m17) als die van de eigenschappen (m16) ter sprake komt.

18 De leerlingen beschikken nu over een ruime kennis van eigenschappen uit de vlakke meetkunde. Ze kunnen hier toegepast worden op *problemen in ruimtelijke situaties*. Het is daarbij zinvol telkens voldoende aandacht te besteden aan het zichtbaar maken van de vlakke situatie waarin de eigenschappen worden toegepast (bijv. op een ruimtefiguur, op een tekening; zo bijvoorbeeld hoeft een gelijkzijdige driehoek helemaal niet als gelijkzijdig voorgesteld te worden in een tekening). Op zich versterkt dit al het ruimtelijk inzicht en het ruimtelijk voorstellingsvermogen.

Problemen die aan bod kunnen komen zijn: toepassingen van eigenschappen van evenwijdige rechten, van gelijkvormige driehoeken (evenwijdige snijvlakken in een driezijdige piramide), de stelling van Pythagoras, vorm en oppervlakte van een doorsnede van een kubus of balk met een vlak, de hoek gevormd door snijdende rechten die de hoekpunten van een balk verbinden, de lengte berekenen van een bepaalde route afgelegd op een ruimtefiguur, de verhouding van beeld en origineel bij een fototoestel in functie van de afstand tot de camera, de verhouding van de oppervlakte van een schijfje en zijn schaduw in functie van de afstand tot de lichtbron, het berekenen van de omtrek van een breedtecirkel als de aardstraal gegeven is, de snelheid van een geostationaire satelliet, de bereikbaarheid van een antenne voor signalen van een satelliet, ….

4 Gereedschapskist meetkunde

Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen moeten na de tweede graad beschikken over een verzameling meetkundige eigenschappen, die vlot kunnen toegepast worden bij het onderzoeken van meetkundige situaties, het verklaren van eigenschappen, het oplossen van meetkundige problemen. Een vlotte en soepele verwoording ervan en een duidelijke visuele ondersteuning kunnen de toepasbaarheid vergroten. Ze moeten een duidelijk en hanteerbaar kader vormen, waarop de leerling kan terugvallen. Dit betekent niet dat de leerlingen dergelijke overzichten moeten memoriseren. Het overzicht moet wel beschikbaar zijn. Dat kan bijvoorbeeld in de vorm van een *'vademecum'*. Zo'n lijst kan geleidelijk (gespreid over de verschillende leerjaren) en samen met de leerlingen worden opgebouwd (bijv. een synthesetaak na een hoofdstuk). Als voorbeeld worden in het volgend overzicht een aantal eigenschappen opgesomd die kunnen worden opgenomen in zo'n vademecum. (Een aantal van deze eigenschappen is al verworven in de vorige leerjaren.)

Vlakke meetkunde

Eigenschappen over de lengten van de zijden en de grootte van de hoeken van driehoeken en vierhoeken.

Eigenschappen over de diagonalen van vierhoeken.

Eigenschappen over de hoeken bij een snijlijn van evenwijdige rechten.

De eigenschappen van de middelloodlijn van een lijnstuk en van de bissectrice van een hoek en hun omgekeerde.

In een driehoek gaan de zwaartelijnen, de middelloodlijnen, de hoogtelijnen, de bissectrices telkens door één punt.

Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijn in twee stukken die zich verhouden als twee tot één.

De driehoeksongelijkheid tussen de zijden van een driehoek.

- *In elke driehoek is elke zijde langer dan het verschil van de twee andere, maar korter dan hun som.*

Eigenschappen van de merkwaardige lijnen in een driehoek, in een gelijkbenige driehoek en in een gelijkzijdige driehoek.

De congruentiekenmerken van driehoeken.

De gelijkvormigheidskenmerken voor driehoeken.

De stelling van Thales en haar omgekeerde.

De stelling van Pythagoras en haar omgekeerde.

De eigenschap van een middenparallel van een driehoek.

De metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek.

- *In een rechthoekige driehoek is de hoogtelijn middelevenredig tussen de stukken waarin ze de schuine zijde verdeelt.*
- *In een rechthoekige driehoek is elke rechthoekzijde middelevenredig tussen de schuine zijde en haar loodrechte projectie op de schuine zijde.*

Eigenschappen over de relaties in een cirkel tussen koorden, hun middelloodlijn, apothema's en straal.

Eigenschappen over de raaklijnen (aan een cirkel) uit een punt buiten de cirkel.

Eigenschappen van middelpunts- en omtrekshoeken, en hun onderlinge relaties.

Ruimtemeetkunde

Een vlak wordt bepaald door drie niet-collineaire punten; twee snijdende rechten; twee niet-samenvallende evenwijdige rechten en een rechte en een punt buiten die rechte.

Als een rechte twee punten gemeen heeft met een vlak, dan ligt die rechte in dat vlak.

Verschillende rechten zijn of snijdend, of evenwijdig, of kruisend.

Als twee rechten evenwijdig zijn met een zelfde derde, dan zijn ze ook onderling evenwijdig.

Als een rechte evenwijdig is met een vlak, dan ligt de rechte die door een punt van dat vlak gaat en evenwijdig is met de gegevens rechte volledig in dat vlak.

Als een rechte evenwijdig is met twee snijdende vlakken dan is ze evenwijdig met hun snijlijn.

Als twee snijdende rechten van een vlak evenwijdig zijn met een ander vlak, dan zijn beide vlakken evenwijdig.

Als twee vlakken evenwijdig zijn met eenzelfde derde vlak dan zijn ze ook onderling evenwijdig.

Als een vlak twee evenwijdige vlakken snijdt, dan zijn de snijlijnen evenwijdig.

Als een vlak één van twee evenwijdige rechten snijdt, dan snijdt dit vlak ook de andere rechte.

Als een vlak één van twee evenwijdige vlakken snijdt, dan snijdt het ook het andere vlak en de snijlijnen zijn evenwijdig.

Een rechte staat loodrecht op een vlak als ze loodrecht staat op twee snijdende rechten van dat vlak.

5.3.2 REËLE FUNCTIES

	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **reële functies** (basisdoelstellingen) worden ca. **44** lestijden besteed

functies van de tweede graad in één veranderlijke	ca. 24 lestijden
functies met voorschrift $f(x) = a\sin\left[b\left(x+c\right)\right]+d$	ca. 10 lestijden
elementaire begrippen in verband met functies	ca. 10 lestijden

1 Functie van de tweede graad in één veranderlijke

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	**Et**
f19	B	De definitie geven van een functie van de tweede graad in één veranderlijke.	
f20	B	De grafiek van $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ (grafisch) opbouwen vanuit de parabool met vergelijking $y = x^2$ en daarbij – de top en de as van de grafiek bepalen, – de coördinaat van de snijpunten met de x-as bepalen.	
f21	B	Aantonen dat de vergelijking $y = ax^2+bx+c$ kan worden omgevormd tot de vorm $y = a(x-\alpha)^2+\beta$.	
f22	B	De formule voor het algebraïsch oplossen van een tweedegraadsvergelijking bewijzen en toepassen, onder meer bij het oplossen van hogeregraadsvergelijkingen.	
f23	B	De nulpunten van een tweedegraadsfunctie bepalen en grafisch interpreteren.	
f24	B	Onderzoeken of een drieterm van de tweede graad te ontbinden is in factoren van de eerste graad.	
f25	B	De grafiek van een tweedegraadsfunctie tekenen gebruik makend van top, as, ...	
f26	B	Het verloop van de tweedegraadsfunctie onderzoeken.	
f27	B	Het voorschrift van een tweedegraadsfunctie opstellen als deze aan bepaalde voorwaarden voldoet.	
f28	B	Gemeenschappelijke snijpunten van twee grafieken (i.c. een rechte en een parabool) bepalen en grafisch interpreteren.	
f29	B	Vraagstukken oplossen die aanleiding geven tot een vergelijking van de tweede graad in één onbekende of waarbij het verband beschreven wordt door een tweedegraadsfunctie.	
f30	B	Vraagstukken oplossen die aanleiding geven tot een ongelijkheid van de tweede graad in één onbekende.	

	Pedagogisch-didactische wenken

19 Het begrip tweedegraadsfunctie kan verklaard worden vanuit een aantal betekenisvolle voorbeelden waarvoor de tweedegraadsfunctie het accurate beschrijvingsmodel is. De relaties tussen de vier elementen die een functie kunnen bepalen (situatie, tabel, grafiek en voorschrift) worden besproken.

De grafiek van de functie kan in deze fase al met een punt voor punt constructie getekend worden. Het gebruik van de grafische mogelijkheden van een rekenmachine of de computer kan de beeldvorming ondersteunen. Bij de punt voor punt constructie moeten leerlingen wel inzien dat tussenliggende punten niet met lineaire interpolatie kunnen bepaald worden.

20 Kan men met de moderne technologie vrij snel de grafiek bekomen van een ‘willekeurige’ tweedegraadsfunctie, het proces waarin de grafiek in een aantal stappen ontwikkeld wordt vanaf de parabool met vergelijking $y = x^2$ met behulp van transformaties (zoals horizontale en verticale verschuiving, uitrekking, inkrimping) geeft een rijk inzicht in de samenhang tussen grafieken onderling en tussen grafieken en hun voorschrift. De grafische rekenmachine of de computer kan ingeschakeld worden om snel en handig voorbeelden voort te brengen die het leerproces kunnen ondersteunen.

Leerlingen hebben in hun vooropleiding het verband gezien tussen de coördinaten van punten die symmetrisch liggen t.o.v. een (spiegel)as (in hoofdzaak x-as en y-as). Dit kan hier gebruikt worden om de naam ‘as’ te verantwoorden. De letters α en β krijgen betekenis in verband met as en top.

Door de verschuiving β kan de grafiek snijpunten hebben met de eerste coördinaatas. De coördinaten van de snijpunten kunnen berekend worden uit $a(x-\alpha)^2+\beta = 0$. Meteen is de basis gelegd om de vergelijking van de tweede graad op te lossen of de nulpunten van de tweedegraadsfuncties te bepalen. Het spreekt vanzelf dat deze leerinhouden hier geïntegreerd aan bod kunnen komen.

21 Het proces waarin de grafiek van de tweedegraadsfunctie ontwikkeld wordt vanaf de parabool met vergelijking $y = x^2$ met behulp van transformaties leidt tot de voorstelling van functies met voorschrift $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$. En daaruit volgt op een natuurlijke wijze de vraag of elke tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2+bx+c$ tot een dergelijke vorm terug te brengen is. Dit leidt tot de berekening van de relaties tussen a, b en c enerzijds en α en β anderzijds en tot het inzicht dat elke tweedegraadsfunctie met voorschrift $f(x) = ax^2+bx+c$ voorgesteld wordt door een parabool.

22 De leerlingen kunnen sommige tweedegraadsvergelijkingen al oplossen door middel van ontbinding in factoren. Voor andere leidt het leerproces opgezet voor de realisatie van doelstellingen f20 en f21 tot een oplossingswijze. Op voorwaarde van een positieve discriminant biedt de opgestelde formule een algemeen algoritme. Naast een zekere automatisering van de werkwijze moet het oplossen van vierkantsvergelijkingen gekoppeld worden aan het oplossen van een aantal vraagstukken.

Men zal de leerlingen wijzen op een niet-verantwoord gebruik van de formule bij ‘eenvoudige’ oefeningen, bijv. onvolledige vierkantsvergelijkingen (bijv. van de vorm $2x^2 - 7x = 0$) of vormen die opvallend geen (reële) nulpunten hebben (bijv. van de vorm $4x^2 + 3 = 0$).

Het algebraïsch algoritme voor tweedegraadsvergelijkingen kan gebruikt worden voor het oplossen van sommige hogere graadsvergelijkingen en bikwadratische vergelijkingen. Het oplossen van deze eerder specifieke vergelijkingen zal later allicht met behulp van andere technieken gebeuren (bijv. numerieke technieken of gebruik van een rekenmachine). Vandaar dat hieraan maar een beperkte tijd moet besteed worden.

Uitbreiding

Het algoritme van de oplossing van tweedegraadsvergelijkingen biedt de mogelijkheid om inzicht te verwerven in het algoritmiseren op zich. Een van de doelstellingen van wiskunde is precies het creëren van algoritmen voor oplossingsprocessen. Dit houdt in een nauwgezette uitwerking van het proces in kleine, opeenvolgende stappen met het oog op een geautomatiseerd verloop ervan, met inbegrip van de controle van de voorwaarden waaronder het algoritme van toepassing is. Het verband met het effectief uitschrijven van een ‘programma’ kan hier gelegd worden.

23 Het bepalen van nulpunten van de tweedegraadsfunctie komt neer op het oplossen van een tweedegraadsvergelijking. De grafische betekenis van nulpunt wordt uitgelegd. In het geval de twee nulpunten gelijk zijn, kan de term ‘nulpunt met multipliciteit twee’ aangebracht worden.

Een mogelijke interpretatie van het bepalen van nulpunten is de doorsnede bepalen van de grafiek met niveaulijn nul. Dit laat een veralgemening toe, naar het bepalen van de snijpunten met andere niveaulijnen (of de doorsnede van een tweedegraadsfunctie en een constante functie).

24 De formule voor het oplossen van de tweedegraadsvergelijking kan toegepast worden bij het ontbinden in factoren van een drieterm van de vorm ax^2+bx+c. De leerlingen kennen nu de voorwaarde waaronder dit al of niet kan. Ze kunnen de ontbinding uitvoeren voor drietermen waar die niet voor de hand ligt. Het kennen van een algemene formule mag niet leiden tot het uitschakelen van de andere ontbindingsvormen, als die voordeliger (sneller) zijn. Ook het gebruik van de som en het product van de wortels en het inzicht in getallen leidt soms tot een snellere werkwijze.

25 In het kader van het realiseren van tekenvaardigheden mag in deze computertijd enige aandacht besteed worden aan het behoorlijk tekenen van een grafiek. Enige kwaliteitseisen aan de grafiek zijn hier op hun plaats.

26 Het onderzoeken van de grafiek van een tweedegraadsfunctie leidt tot inzicht in de tekenverandering, het stijgen en dalen van de grafiek en het herkennen van een extreme waarde bij de top.

In het eerste leerjaar van de tweede graad werd aan het begrip richtingscoëfficiënt van een rechte het begrip differentiequotiënt (de verhouding van de toename van de afhankelijke veranderlijke tot de toename van de afhankelijke veranderlijke) vastgehecht. Dit begrip kan gebruikt worden om het stijgen en dalen te onderbouwen.

27 Het onderzoek van een aantal situaties kan tot het inzicht leiden dat een tweedegraadsfunctie volledig vastgelegd wordt door bepaalde voorwaarden (bijv. top en een punt gegeven, drie punten gegeven) en door andere niet (bijv. twee nulpunten gegeven, as en een punt gegeven). De leerlingen kunnen hier al geconfronteerd worden met een werkwijze met ‘onbepaalde coëfficiënten’. Een verdere toepassing is dat leerlingen op grond van een gegeven grafiek zelf een aantal voorwaarden bepalen waarmee ze het functievoorschrift kunnen opstellen. Hierbij kan nog eens gewezen worden op de wisselwerking tussen de vier mogelijkheden waarmee een functie kan aangeboden worden.

28 In concrete situaties kunnen voorbeelden onderzocht worden waarbij twee gekende grafieken snijden: de doorsnede bepalen van een rechte en een parabool. Daarbij moet zowel de numerieke berekening uitgevoerd worden, als de grafische oplossing onderzocht worden. Het snijden van rechte en parabool kan leiden tot het onderzoeken wanneer een rechte rakend zal zijn aan een parabool. Een verwijzing naar de werkwijze bij de raaklijn aan een cirkel ligt voor de hand.

29 De tweedegraadsfunctie en de tweedegraadsvergelijking hebben een ruim toepassingsgebied. Een aantal concrete situaties kan hier de toepassing van wiskunde in allerlei gebieden illustreren. Hier liggen veel kansen om leerlingen te wijzen op het gebruik van probleemoplossende vaardigheden, zoals het leren een probleem om te zetten naar een wiskundige vorm, het gepast kiezen van onbekenden, het uitvoeren van oplossingstechnieken en het interpreteren van resultaten. Zo leren leerlingen hun wiskundekennis te gebruiken in toepassingen in andere vakken.

Het oplossen van *vraagstukken* op tweedegraadsfuncties komt vaak neer op het oplossen van een vierkantsvergelijking. Daarnaast zouden andere vragen aan bod moeten komen, zoals de vraag naar het stijgen of dalen van de functie of het bereiken van een extremum. Ook hier is het zinvol de vraagstukken niet in geïsoleerde lessen aan te bieden, maar ze te integreren als toepassingen op de leerinhouden.

In toepassingssituaties kunnen eenvoudige stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden, waarvan een van de tweede graad, aan bod komen.

30 Het tekenonderzoek van de tweedegraadsfunctie is een goede onderbouw voor het oplossen van *ongelijkheden* van de vorm $ax^2+bx+c<0$ (of > 0), of afgeleide vormen. Interpretatie op de grafiek van de functie geeft meteen een goede grafische voorstelling van de oplossing.

Het oplossen van ongelijkheden mag niet herleid worden tot een techniek. Daarom verdient het aanbeveling ze te bespreken in het kader van betekenisvolle situaties. Ongelijkheden in breukvorm behoren tot de leerstof van de derde graad.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f31	B	Het maatgetal van een hoek omzetten van zestigdelige graden in radialen en omgekeerd.	
f32	B	De functie $f(x) = \sin x$ in verband brengen met betekenisvolle situaties.	
f33	B	Het verloop onderzoeken van de grafiek van de functie $f(x) = \sin x$.	
f34	B	De grafiek schetsen van een functie van de vorm $f(x) = a\sin\left[b\left(x+c\right)\right]+d$.	
f35	B	Bij een grafiek van een functie van de vorm $f(x) = a\sin\left[b\left(x+c\right)\right]+d$ de invloed uitleggen van de parameters a, b, c en d.	
f36	B	Uit de grafiek van een functie van de vorm $f(x) = a\sin\left[b\left(x+c\right)\right]+d$ het voorschrift afleiden.	
f37	B	Vergelijkingen van de vorm $\sin(ax+b) = c$ oplossen.	
f38	B	Vraagstukken oplossen in verband met periodieke verschijnselen die beschreven worden met een functie van de vorm $f(x) = a\sin\left[b\left(x+c\right)\right]+d$.	

Pedagogisch-didactische wenken

31 Naast het oplossen van vraagstukken in verband met de relaties tussen de hoeken en de zijden van een willekeurige driehoek worden de goniometrische functies bestudeerd. De stap daartoe van hoek naar reëel getal gebeurt door de radiaal als hoekeenheid te kiezen.

In de praktijk worden naast zestigdelige graden en radialen honderddelige graden gebruikt, bijvoorbeeld bij de landmeting. In studierichtingen waarin leerlingen in de praktijk met deze maten kunnen geconfronteerd worden kunnen ze aan bod komen.

32 De leerlingen moeten uiteindelijk in staat zijn de grafiek van een algemene sinusfunctie te onderzoeken. Om de aanbreng niet te ingewikkeld te maken, bijv. om niet te veel begrippen in één keer in te voeren, is het zinvol zich bij de aanvang te beperken tot de functie met voorschrift $f(x) = \sin x$.

Er zijn allerlei betekenisvolle situaties aan te geven waaruit de grafiek van deze functie kan afgeleid worden, bijv. de schroef van een vliegtuig, een draaiend rad, de cirkelbeweging, een harmonische trilling van een veer. Het begrip periodiciteit kan in deze concrete voorbeelden al geïllustreerd worden.

Leerlingen moeten wel tot het inzicht komen dat een *sinusoïde* tekenen op basis van enkele punten een hachelijke onderneming is. Het volstaat niet enkele punten met rechte lijntjes te verbinden. Het inzicht van een golvende lijn kan best aangebracht worden door, waar nodig, telkens de tabel van functiewaarden met enkele tussenliggende waarden uit te breiden. Uiteraard zal het beeld van de grafiek op het scherm van een computer of een rekenmachine tot een volwaardig beeld bij de leerlingen bijdragen.

De leerlingen moeten functiewaarden uit een grafiek leren aflezen. En daarbij moeten ze inzien dat een lineaire interpolatie tussen twee gekende waarden niet noodzakelijk tot exacte resultaten leidt.

33 Het onderzoek van de grafiek van de functie $f(x) = \sin x$ leidt tot het bespreken van het domein, het bereik, de periodiciteit, de nulpunten, de tekenverandering, het stijgen en dalen van de functie en het bereiken van een maximum of een minimum.

34 De voorbeelden die aanleiding hebben gegeven tot de functie $f(x) = \sin x$ leiden meestal tot meer algemene sinusfuncties. Zo kan het vergelijken van de beweging van verschillende punten op een rad of een schroef inzicht geven in begrippen als amplitude, faseverschuiving, ….

Aan de hand van een punt per punt constructie kan de grafiek geschetst worden. Het gebruik van een grafische rekenmachine of computer is hier aangewezen, omdat snel de parameters kunnen veranderd worden.

Het is zinvol de leerlingen te wijzen op het verschil in benaming van de parameters (bijv. in bepaalde technische vakken) al naargelang de interpretatie die men eraan wenst te geven.

35 Een veelheid van grafieken eventueel gerealiseerd met behulp van een computer of een grafische rekenmachine, bijv. van $f(x)=\sin x$, $f(x)=2\sin x$, $f(x)=-\sin x$, $f(x)=\sin 2x$, $f(x)=\sin 3x$, $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, … moet leiden tot de begrippen *amplitude, periode, faseverschuiving*. Het koppelen van een meetkundige betekenis aan deze begrippen moet het inzicht bevorderen (cf. verticale en/of horizontale uitrekking, horizontale verschuiving, de grafiek is volledig gekend als een welbepaald deel ervan gekend is, symmetrie, verbanden tussen de grafieken van functies waarvan de parameters een bepaald verband vertonen). Bij de leerlingen van studierichtingen waarbij elektriciteit in de vorming voorkomt, kunnen een aantal parameters zeker eens geïllustreerd worden op een oscilloscoop of bij geluidsmeting.

37 Het oplossen van *goniometrische vergelijkingen* zal in een eerste fase beperkt worden tot de basisvormen (bijv. $\sin x = c$, $\sin x = \sin\alpha$, $\sin(ax+b)=\sin\alpha$). Het is aangewezen de vergelijkingen eerst op te lossen in een bepaalde periode. Daarna kan de oplossing ruimer geïnterpreteerd worden, bijv. met behulp van de goniometrische cirkel. Ook de grafieken van de bijbehorende functies kunnen als hulpmiddel dienst doen. De grafische oplossing zal de interpretatie van een berekend resultaat merkelijk vereenvoudigen.

Verder verdient het aanbeveling om bij het oplossen van vergelijkingen de rekenmachine in te schakelen, zowel wat betreft de effectieve berekeningen, als het grafisch oplossen, bijv. met behulp van niveaulijnen, de zoom-functie en de volgfunctie (trace-functie). Ook al is het een doelstelling dat de leerlingen de techniek van het oplossen van vergelijkingen effectief verwerven, bij het oplossen van ‘problemen’ kan er geen bezwaar tegen zijn dat de oplosfunctie (solve-functie) van de rekenmachine gebruikt wordt, zeker bij meer ingewikkelde vormen.

38 Allerlei verschijnselen zijn te beschrijven met of te idealiseren naar een ‘sinusfunctie’. Sommige *vraagstukken* kunnen aanleiding geven tot een vergelijking of een ongelijkheid. Bij andere kan de vraag naar een extreme waarde gesteld worden.

Mogelijke bronnen voor toepassingen zijn te vinden bij de baan van een projectiel, in de elektriciteit, de beweging van een trillende veer, de beweging van een zuiger in een motor, het beschrijven van geluidsgolven, het beschrijven van eb en vloed, de variatie van de lengte van de tijdspanne van daglicht, het beschrijven van een bioritme, … .

3 Elementaire begrippen in verband met functies

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f39	B	De grafiek herkennen van de volgende elementaire functies en het verband leggen met het voorschrift $f(x) = x^3$, $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.	
f40	B	De grafiek schetsen van de functies $f(x) = x^3$, $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ uitgaande van een tabel van coördinaten van een aantal van haar punten.	
f41	B	Uit de grafiek van een aantal voornoemde functies met voorschrift f(x) de grafiek van de functies met voorschrift f(x) + k, f(x + k), kf(x) grafisch opbouwen.	
f42	B	Met behulp van de grafiek het verloop van voornoemde functies onderzoeken, o.m. de nulpunten, de tekenverandering, het stijgen en dalen, het voorkomen van een extreme waarde, symmetrie in de grafiek.	

Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen werden doorheen de tweede graad geconfronteerd met een aantal aspecten van functieleer. Het is zinvol deze vast te zetten onder de vorm van een *synthese* over de verschillende aspecten (bijv. het domein, het bereik, de invloed van coëfficiënten, de nulpunten, de tekenverandering, het stijgen en dalen, het voorkomen van extreme waarden, symmetrie in een grafiek). Dit kan door een overzicht te maken in het bijzonder van de eerste en de tweedegraadsfunctie. Dit is meteen het kader waartegen enkele nieuwe functies aan bod kunnen komen en waarin bepaalde aspecten (zoals de invloed van coëfficiënten) nog eens extra benadrukt worden. Deze functies zullen voor een aantal leerlingen in de derde graad een meer algemene gedaante krijgen. In die zin kan dit onderdeel beschouwd worden als een overgang naar de derde graad waar functiecategorieën in hun algemeenheid aan bod kunnen komen en kan het de leerlingen ondersteunen in hun keuzeproces naar het volume wiskunde in hun verdere vorming.

39 Waar mogelijk worden zinvolle situaties aangeboden waar de relaties tussen de vier elementen die een functie kunnen bepalen (situatie, tabel, grafiek en voorschrift) kunnen worden besproken.

De grafiek van de functie wordt met een punt voor punt constructie getekend. In een manueel uitgewerkt voorbeeld zal men er over waken dat een voldoend aantal punten wordt berekend en uitgezet. Leerlingen kunnen hier, door opeenvolgende verfijning van het puntenraster, al meteen geconfronteerd worden met het inzicht dat een grafiek tussen twee uitgezette punten anders kan verlopen, dan ze in een oppervlakkige aanpak vermoedden. Het gebruik van de grafische mogelijkheden van een rekenmachine of de computer zal de beeldvorming ondersteunen. In de praktijk volstaat meestal dat de leerlingen een vlugge schets van de grafiek kunnen maken.

De functies $f(x)=\sqrt{x}$ en $f(x)=\dfrac{1}{x}$ zijn niet bepaald voor elke reële waarde van x. Dit leidt tot het begrip domein. Dit moet hier aan bod komen, als het nog niet eerder besproken werd. Zonder de theorie over asymptoten te behandelen kan aandacht besteed worden aan het gedrag van de functie $f(x)=\dfrac{1}{x}$ voor grote x-waarden (in absolute waarde) en voor waarden naderend naar nul.

41 De bedoeling is elementair kennis te maken met het effect van transformaties op de grafiek van een functie en het verband met coëfficiënten uit het voorschrift.

De leerlingen hebben bij de eerstegraadsfunctie, de tweedegraadsfunctie en de sinusfunctie al kunnen onderzoeken wat de invloed is van coëfficiënten. Deze voorbeelden kunnen nu veralgemeend worden voor de hoger genoemde functies.

42 De nulpunten van de basisfuncties (genoemd onder f39) zijn vrij eenvoudig te bepalen. Voor de functies genoemd onder f41 kan een redenering opgezet worden, gebruik makend van de transformatie die uitgevoerd wordt. (Wat gebeurt er met het nulpunt bij bijv. een verticale verschuiving en omgekeerd? Welke waarde wordt daarbij op nul afgebeeld? En door de asymptoten, die voor de functie $f(x)=\dfrac{1}{x}$ werden gevonden, aan dezelfde transformatie te onderwerpen als de functie, worden asymptoten bepaald voor de functies van de vorm $f(x+k)$, …).

Op dezelfde wijze als voor de nulpunten kunnen andere karakteristieken intuïtief onderzocht worden, bijv. de tekenverandering, het stijgen en dalen, het bereiken van een maximum en/of minimum.

5.3.3 GETALLENLEER EN ALGEBRA

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **getallenleer en algebra** (basisdoelstellingen) worden ca. **24** lestijden besteed

complexe getallen	ca. 14 lestijden
algebraïsch rekenen	ca. 10 lestijden

1 Complexe getallen

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
g43	B	De definitie van een complex getal formuleren.	
g44	B	Een complex getal meetkundig voorstellen.	
g45	B	Complexe getallen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.	
g46	B	Vraagstukken oplossen die aanleiding geven tot een vierkantsvergelijking met reële coëfficiënten en negatieve discriminant.	
g47	B	De goniometrische vorm van een complex getal bepalen.	
g48	B	Twee complexe getallen geschreven in hun goniometrische vorm vermenigvuldigen en delen.	
g49	B	De n-de macht van een complex getal, gegeven in zijn goniometrische vorm, berekenen.	
g50	B	De tweedemachtswortels en de derdemachtswortels uit een complex getal, gegeven in zijn goniometrische vorm, berekenen.	

Pedagogisch-didactische wenken

43 De leerlingen zijn in de loop van de vorige jaren geconfronteerd met opeenvolgende uitbreidingen van het getalbegrip. Schijnbaar was met het invoeren van de reële getallen die uitbreiding afgewerkt. Nu blijkt dat in bepaalde realistische situaties het gebruik van ‘fictieve’ getallen wiskundige voordelen biedt. Zo is historisch gezien het invoeren van ‘complexe’ getallen gekoppeld aan het oplossen van vergelijkingen van de derde graad. Het rekenen met wortelvormen van negatieve getallen gaf zonder inhoudelijke betekenis toch juiste oplossingen. Een eerste kennismaking met complexe getallen kan via die idee van rekentruc. De problematiek van het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen met negatieve discriminant is een voor de hand liggende aanknoping.

De schrijfwijze $\sqrt{-1}$ is niet vol te houden omdat dit tot foutieve interpretaties leidt van de vertrouwde rekenregels. Het symbool i wordt ingevoerd, zodat voor een complex getal de notatie $a + bi$ ontstaat. In wiskunde blijven we liefst de algemeen gebruikelijke notatie gebruiken (i verwijst zinvol naar ‘imaginair’). In bepaalde studierichtingen kan in overleg tussen de verschillende vakgroepen de notatie j (waarbij dan $j^2 = -1$) overwogen worden (afwijkend van i omwille van verwarring met de notatie i voor stroom), die in sommige technische vakken meer gebruikelijk is. Dit kan voor leerlingen het gebruik van complexe getallen in de andere vakken misschien gemakkelijker maken.

44 De notatie $a + bi$ voor een complex getal laat toe op zeer eenvoudige wijze met dat getal een *koppel reële getallen* te associëren en omgekeerd. En deze notatie met koppels reële getallen leidt onmiddellijk tot een voorstelling van complexe getallen in het vlak (voorzien van een Euclidisch assenstelsel).

45 De hoofdbewerkingen met complexe getallen kunnen worden uitgevoerd volgens de rekenregels voor reële getallen, waarbij $i^2 = -1$. De eigenschappen van de optelling en de vermenigvuldiging blijven dezelfde als deze van reële getallen.

Gebruik makend van de meetkundige voorstelling van complexe getallen kan de optelling een meetkundige interpretatie krijgen.

Enkele grootheden uit de elektrotechniek krijgen een complexe notatie (weliswaar met j i.p.v. i) om het rekenen ermee te vereenvoudigen. In technische studierichtingen waarin dit in de vorming voorkomt kunnen hiervan enkele toepassingen aan bod komen.

Uitbreiding

Leerlingen moeten er voor gewaarschuwd worden dat niet alle regels voor reële getallen zomaar kunnen overgedragen worden. Wil men het onderscheid tussen de verzamelingen van reële en van complexe getallen meer expliciteren zal commentaar op ‘ongelijkheden’ moeten toegevoegd worden.

47 Gebruik makend van de voorstelling in het vlak kan een derde schrijfwijze voor een complex getal opgesteld worden. Daarbij moeten, steunend op de associatie met goniometrie en analytische meetkunde (afstandsformule), de begrippen *argument en modulus* ingevoerd worden..

In technische studierichtingen met elektriciteit in de vorming kan hier het belang van de goniometrische vorm van complexe getallen gemotiveerd worden met een paar voorbeelden.

48 Met behulp van de goniometrische vorm blijkt de vermenigvuldiging en de deling van complexe getallen vrij eenvoudig te verlopen. De inverse $(a+bi)^{-1}$ van een complex getal wordt zowel meetkundig geïllustreerd als algebraïsch berekend.

Uitbreiding

Afhankelijk van de beschikbare tijd kan de vermenigvuldiging een meetkundige interpretatie krijgen, gebruik makend van de goniometrische vorm en meetkundige eigenschappen.

49 De *formule van de Moivre* wordt afgeleid. Hiermee kan de n-de macht van een complex getal berekend worden. De punten die bij grafische voorstelling overeenstemmen met opeenvolgende machten van een complex getal liggen op een spiraal.

50 Met behulp van de goniometrische vorm kunnen de *tweede- en de derdemachtswortels* uit een complex getal berekend worden. Uit de berekeningswijze volgt dat een complex getal verschillend van nul steeds twee verschillende tweedemachtswortels en drie verschillende derdemachtswortels heeft.

Uitbreiding

Op dezelfde wijze als voor twee en drie kunnen n-de machtswortels gedefinieerd worden. Let wel, het begrip n-de machtswortel is evenwel nog niet gekend vanuit de reële getallen en moet hier dan kort toegelicht worden. De n verschillende n-de machtswortels zijn de hoekpunten van een regelmatige ingeschreven n-hoek en de raakpunten van een regelmatige omgeschreven n-hoek aan een cirkel.

Met behulp van de n-de machtswortels kunnen binomiaalvergelijkingen opgelost worden.

2 Algebraïsch rekenen

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
g51	B	De Euclidische deling uitvoeren van veeltermen in één veranderlijke.	
g52	B	De reststelling bij deling door $x - a$ bewijzen.	
g53	B	De deling van een veelterm door $x - a$ uitvoeren door middel van de regel van Horner.	
g54	B	De reststelling toepassen in vraagstukken.	
g55	B	Tweetermen van de vorm $a^3 - b^3$ en $a^3 + b^3$ ontbinden in factoren.	

Pedagogisch-didactische wenken

51 Het algebraïsch rekenen werd al aangezet in de eerste graad. Die lijn begon met ‘letters die de plaats innemen van getallen’ tot ‘met die lettervormen kan gerekend worden zoals met getallen’. Als bewerkingen zijn aan bod gekomen: optelling, aftrekking, vermenigvuldiging van tweetermen en drietermen met ten hoogste twee veranderlijken. De deling werd beperkt tot delen van eentermen, vooral gericht op het ontbinden in factoren (het ‘afzonderen’ van een gemeenschappelijke factor). Wat ontbreekt, wordt nu afgewerkt: veeltermen delen door een eenterm en delen door een veelterm.

Waar nodig kan het algebraïsch rekenen *gedifferentieerd herhaald* worden, zonder evenwel een reeks kale rekenvaardigheidsoefeningen te maken (bijv. als proef op de deling kan het quotiënt en de deler vermenigvuldigd worden en met de rest vermeerderd). De tijd hiervoor is wel beperkt!

De hoofdeigenschap van het delen bij natuurlijke getallen, die het verband uitdrukt tussen deeltal, deler, quotiënt en rest, behoort tot de leerinhouden van het eerste leerjaar van de eerste graad. De verklaring van de formule was daar uitbreidingsleerstof. Een korte herhalingsfase lijkt aangewezen indien dit als uitgangspunt van het leerproces bij veeltermen wordt genomen.

53 De regel van Horner wordt hier aangebracht als verkorte vorm voor de deling door $x - a$, zonder te vervallen in overmatig rekenwerk.

54 Mogelijke toepassingen zijn oefeningen met onbepaalde coëfficiënten, bijv. de rest berekenen bij deling door $(x - a)(x - b)$ als de rest gekend is van de delingen door $x - a$ en door $x - b$, het voorschrift van een derdegraadsfunctie waarin een parameter(s) voorkom(en)t bepalen als de rest(en) van de deling door tweetermen van de vorm $x - a$ gegeven zijn.

5.3.4 BESCHRIJVENDE STATISTIEK

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **beschrijvende statistiek** (basisdoelstellingen) worden ca. **15** lestijden besteed.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
s56	B	Verschillende soorten gegevens herkennen.	
s57	B	Aan de hand van voorbeelden het belang uitleggen van de representativiteit van een steekproef voor het formuleren van statistische besluiten over een populatie.	
s58	B	In betekenisvolle situaties de absolute en de relatieve frequenties berekenen bij een reeks individuele of gegroepeerde gegevens.	28
s59	B	Verschillende grafische voorstellingen van statistische gegevens gebruiken en interpreteren.	28
s60	B	Centrummaten, m.n. gemiddelde en mediaan, bij een reeks gegroepeerde gegevens berekenen en interpreteren.	29
s61	B	Spreidingsmaten, m.n. variantie, standaardafwijking en interkwartielafstand, bij een reeks individuele of gegroepeerde gegevens berekenen en interpreteren	29

Pedagogisch-didactische wenken

De hoofdbedoeling van beschrijvende statistiek is het *ordenen, het samenvatten, het overzichtelijk voorstellen en het interpreteren van gegevens* afkomstig van allerlei situaties uit diverse disciplines.

Leerlingen moeten in de eerste plaats leren *aangeboden informatie kritisch* te *analyseren* en te *beoordelen*. Het hoofdaccent van de verwerking van dit onderdeel 'beschrijvende statistiek' zal dus liggen op het interpreteren van gegeven voorstellingen en informatie. Maar daarbij kan wel vermeld worden, dat het zelf verwerken van een reeks gegevens, het berekenen van een aantal parameters en het grafisch voorstellen van de informatie kan leiden tot een beter inzicht in het proces (bijv. de indeling van gegevens in klassen bij een voorstelling op een rekenmachine of computer kan beter begrepen worden als men zelf geconfronteerd wordt met het indelen van een reeks gegevens in zinvolle klassen). Toch zal men zich hierbij dan beperken tot relatief eenvoudig te verwerken reeksen, zodat het omslachtige rekenwerk het inzicht niet in de weg staat. Anderzijds zullen leerlingen een sterkere motivatie ondervinden als ze gegevens moeten verwerken die betrekking hebben op hun leefwereld. Binnen dit hoofdstuk is die aansluiting zeker mogelijk door gebruik te maken van allerlei enquêtes uit jongerentijdschriften.

Het *zelf verwerken van informatie* met behulp van statistische voorstellingsmiddelen en het bespreken van parameters die een maat aangeven over de gegevens en de spreiding ervan komen pas in de tweede plaats aan bod. Het opzetten van een beperkte bevraging in de klas of in de school en de statistische verwerking van de verzamelde gegevens als kunnen een aantal belangrijke vaardigheden en attitudes ontwikkelen zoals samenwerken in groep, communicatie, planning, organisatie, hanteren van de wiskundetaal in alledaagse situaties, kritische analyse van de resultaten en de besluitvorming. Het verwerken van gegevens die ze zelf verzameld hebben, bijv. door middel van een zelf opgestelde of uitgevoerde enquête, kan de motivatie versterken. Het opstellen van een enquête biedt dan weer mogelijkheden om vanuit vakoverschrijdende contacten te werken.

Voor het verwerken en voorstellen van statistische gegevens is heel wat *software* beschikbaar op de rekenmachine en de computer. Een radicale keuze voor het gebruik ervan, die het handmatig rekenwerk tot een minimum beperkt is aangewezen. Zo komt tijd vrij voor interpretatieactiviteiten.

56 De leerlingen moeten geconfronteerd worden met allerlei materiaal dat statistisch verwerkt werd, bijv. uit kranten of tijdschriften, gegevens beschikbaar op informatiedragers zoals Internet, …. Ook de resultaten van labowerk dat door de leerlingen zelf is uitgevoerd (bijv. in elektriciteit, mechanica, enz.) kunnen inte-

ressant materiaal bieden. Aan de hand van goed gekozen voorbeelden moet, uiteraard op een elementair niveau, het onderscheid duidelijk worden tussen *verschillende soorten van data.* Mogelijkheden daarbij zijn: onderscheid tussen kwalitatieve of kwantitatieve gegevenstypes (bijv. er zijn al of niet berekeningen mogelijk), of tussen gegevenstypes al naargelang de gehanteerde (of mogelijk te hanteren) meetschalen (bijv. nominaal (indeling in categorieën), ordinaal (bepalen van rangorde), intervalinvariant (bijv. temperatuur) of verhoudingsinvariant (bijv. lengte)), of tussen gegevenstypes al naargelang ze behoren tot een discreet of continu berekeningstype (al of niet nauwkeurig te bepalen).

57 Bij het onderzoeken van concrete voorbeelden van statistische verwerking (bijv. in kranten- of tijdschriftenartikels) moet voldoende tijd besteed worden aan de omschrijving van de *populatie*, van de *steekproef* en de samenstelling van de steekproef, van de *onderzoeksvraag*.

Voorbeelden:

> Hoe zal men de gemiddelde lengte van de Vlaamse bevolking onderzoeken (zal men dan ‘willekeurige’ metingen kunnen beperken tot deze aan een kleuterschool, of aan het lokaal van de plaatselijke basketploeg)?
>
> Als men wil nagaan wat de partijvoorkeur is van de inwoners van een bepaalde gemeente, doet men dan de waarnemingen in één willekeurige straat, aan een partijlokaal, op de marktdag, …?
>
> Bij een telefonische enquête sluit men personen zonder telefoon uit. Bij een schriftelijke enquête kan men geen rekening houden met enquêteformulieren die niet werden teruggestuurd.
>
> Het werken met een kleine steekproef heeft een invloed op de betrouwbaarheid van de conclusies.

Belangrijk is wel dat leerlingen zelf creatief naar *eigen* voorbeelden zoeken om bepaalde voorwaarden, bij het opstellen van een steekproef, te onderbouwen. Het heeft geen zin hier enkele voorbeelden te laten memoriseren.

Een mogelijke werkwijze is in een eerste fase de verwerking en interpretatie van cijfergegevens te bestuderen op duidelijke voorbeelden (bijv. kleine populaties). Nadat verschillende resultaten en interpretaties over dezelfde onderzoeksvragen bovenkomen, kan in een tweede fase de vraag naar de extrapolatie van de resultaten en de interpretatie vanuit een beperkte groep (steekproef) naar een ruimere populatie aan bod komen. De leerlingen beschikken dan al over voorbeelden om de problematiek van omschrijving van populatie, steekproef en onderzoeksvraag te onderbouwen.

58 Het ordenen van de gegevens gebeurt aan de hand van een frequentietabel. Hiervoor worden de begrippen *absolute frequentie, relatieve frequentie, cumulatieve frequentie en cumulatieve relatieve frequentie* ingevoerd.

Als het aantal gegevens te groot is, worden ze gegroepeerd in klassen. Het zijn niet de frequenties van de individuele gegevens die nu gebruikt worden, maar die van de klassen. Hierbij moeten termen aangebracht worden zoals klassenbreedte, klassenmidden. Om de betekenis van klassenbreedte mee te geven kan men bijv. bij eenzelfde reeks gegevens de klassenbreedte veranderen en de invloed op de voorstelling illustreren. Alleszins moeten de leerlingen ermee geconfronteerd worden dat samenvatten van informatie (bijv. bij het groeperen) verlies aan informatie betekent.

59 In de media worden gegevens vaak grafisch voorgesteld. De leerlingen zijn vanuit de eerste graad vertrouwd met voorstellingen zoals staaf-, strook en schijfdiagram. Het is aangewezen dat de leerlingen deze frequent voorkomende *grafische voorstellingen* leren *lezen en interpreteren*, d.w.z. er vragen over beantwoorden.

Het interpreteren houdt in dat men oog heeft voor de aard van de voorstelling, de schaalverdeling, de keuze van de oorsprong en eenheden, de keuze van de klassenbreedte, …, om daaruit de informatie die achter de gegevens ligt te ontdekken. Daarbij hoort de vraag waarom bepaalde voorstellingen gebruikt worden om bepaalde kenmerken van bepaalde veranderlijken weer te geven. Daarbij kan geïllustreerd worden hoe soms misbruik gemaakt wordt van voorstellingen, met als gevolg een verkeerde besluitvorming. Hierdoor leren de leerlingen kritisch omgaan met aangeboden informatie.

Als nieuwe mogelijke voorstellingen kunnen aan bod komen: stengel- en bladdiagram; histogram, frequentieveelhoek en ogief. (Noot: de laatste drie termen worden bij voorkeur gebruikt voor situaties waarin de gegevens als ‘continu’ verlopend kunnen worden aangezien, bijv. bij gegroepeerde gegevens.) Bij het histogram en de frequentieveelhoek wordt gewezen op de eigenschap dat de oppervlakte ervan gelijk is aan de steekproefgrootte.

Uitbreiding

De leerlingen kunnen aan de hand van een enquête of bevraging in de klas of de school zelf een aantal gegevens verzamelen, die zelf verwerken en zelf een aangepaste voorstelling ervan maken. Er wordt wel over gewaakt dat het leerproces meer te maken heeft met het inzicht in de verwerking van statistische gegevens, dan met het turven van een veelheid van gegevens. In die zin is het gebruik van de statistische functies, met inbegrip van de grafische mogelijkheden, van een rekenmachine of een computer aangewezen.

60 Een verdere stap in het beschrijven van gegevens is het opzoeken van *parameters* die ze samenvatten. Op die manier kunnen onder meer reeksen gegevens met elkaar vergeleken worden. Een eerste reeks parameters zijn de *centrummaten*: gemiddelde en mediaan. Ze zijn voor niet-gegroepeerde gegevens al aan bod gekomen in de eerste graad. Ze geven een waarde die ongeveer het midden van de gegevens aanduidt. Aan de hand van concrete voorbeelden wordt hun betekenis en het praktische gebruik ervan verklaard. Voor gegroepeerde gegevens wordt voor mediaan een eenvoudige oplossing gekozen, bijv. het midden van de mediale klasse. De meer complexe oplossingen kunnen eventueel in de latere vorming van de leerlingen snel geassimileerd worden.

Leerlingen moeten de beperktheid van de door centrummaten verkregen informatie leren relativeren. Zonder een maat voor de spreiding betekenen ze niet veel. Daarom is het zinvol centrum- en spreidingsmaten samen aan te brengen aan de hand van een aantal concrete voorbeelden. Daarna kunnen samenvattend de verschillende begrippen vastgelegd worden.

Omwille van het inzicht in de betekenis en de procedures is het zinvol het principe van de berekening aan te brengen en even in te oefenen. Voor de praktische berekeningen in opgaven en praktische problemen wordt bij voorkeur een rekenmachine of een computer gebruikt.

61 Statistische gegevens met dezelfde centrummaten kunnen van elkaar verschillen door hun spreiding rond deze parameters. Daarover kunnen een tweede reeks parameters, de *spreidingsmaten*, informatie geven: m.n. variantie, standaardafwijking, interkwartielafstand en eventueel percentielen. Variantie en standaardafwijking zijn klassiek veel gebruikte parameters, waarvan de berekening moeilijker kan uitvallen. De rekenmachine is hierbij aangewezen. De *interkwartielafstand* is gemakkelijker te berekenen en laat toe relatief snel een globale indruk van de gegevens te verkrijgen. Aan de hand van concrete voorbeelden wordt hun betekenis en het praktische gebruik ervan verklaard.

Een voorstelling van gegevens die eerder nog niet ter sprake kon komen is de *boxplot*. Ze geeft een interessante indruk van de spreiding van de gegevens, omdat ze opgesteld wordt met gebruik van enkele van de hoger genoemde parameters, m.n. het gemiddelde en de kwartielen.

leerplan b

vier of vijf wekelijkse lestijden wiskunde

TSO-studierichtingen

Bouw- en Houtkunde
Elektriciteit-elektronica
Elektromechanica
Grafische communicatie

5.4 Leerplan b - eerste leerjaar

Dit leerplan is voorzien voor 4 of 5 wekelijkse lestijden wiskunde.

Als vijf wekelijkse lestijden wiskunde worden voorzien (of door het fundamenteel gedeelte, of door een aanvulling vanuit het complementaire gedeelte, cf. de pedagogische aanbevelingen bij de lessentabel), dan worden de doelstellingen van het onderdeel ***5.4.1.4 Vectoren*** *basis*doelstellingen en kan er meer aandacht besteed worden aan uitbreidingsdoelstellingen (bijv. de stelling van Thales).

5.4.1 MEETKUNDE

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **meetkunde** worden ca. **29** lestijden besteed

gelijkvormigheid van vlakke figuren	ca. 12 lestijden
de stelling van Pythagoras en de driehoeksmeting van een rechthoekige driehoek	ca. 17 lestijden

Pedagogisch-didactische wenken

Door de studie van meetkunde moeten de leerlingen methoden verwerven om meetkundige problemen te herkennen en op te lossen, zowel in het vlak als in de ruimte. De nadruk moet liggen op zelf onderzoeken, analyseren, ordenen, verklaren, …, waarbij onder meer congruentie, gelijkvormigheid, toepassing van basisstellingen en coördinaten *middelen* zijn om meetkundige toepassingen en denkproblemen te behandelen.

De leerlingen moeten *zelf exploratief* te werk kunnen gaan in het onderzoeken van eigenschappen en opzoeken van verklaringen en samenhang. Ze moeten door exploratie, met behulp van heuristische methoden, leren de meetkundige probleemstelling in een situatie of opgave te herkennen. (Bijv.: dit probleem is te herleiden tot het aantonen dat twee rechten loodrecht op elkaar staan, of deze vraag is te herleiden tot een berekening of constructie met behulp van een evenredigheid van lengten van lijnstukken.) Dit proces kan vrij moeizaam verlopen, maar heeft een belangrijk effect op de vorming. En de transfer die hiervan uitgaat draagt bij tot het ontwikkelen van ‘zoekstrategieën’ die in andere dan wiskundige probleemstellingen bruikbaar zijn. Zo is het aangewezen dat leerlingen een aantal meer ‘open’ opdrachten aangeboden krijgen, d.w.z. waarbij de theoretische context niet meteen mee gegeven is. Ze moeten dan zelf in een breder verband achterhalen waartoe het gestelde probleem herleidbaar is, d.w.z. in hun kennisbestand op zoek gaan naar welk meetkundig ‘model’ de situatie gemathematiseerd kan worden. Leerlingen zelf exploratief te werk laten gaan betekent evenwel niet, dat dit proces niet kan ondersteund worden met gerichte vragen, zeker in de aanvangsfase, of dat er niet voor kan gekozen worden de leerstappen zo aan te bieden dat leerlingen gemakkelijker zelf tot een oplossing komen.

Leerlingen moeten hun oplossing minimaal kunnen *verklaren*. Dat wil zeggen dat ze argumenten kunnen geven om de oplossing te verantwoorden. Dit is voor hen zeker niet eenvoudig. Daarom is het zinvol hen sterk te betrekken bij het opbouwen van een dergelijke argumentatie. Daarbij is het belangrijker dat leerlingen een opgezette redenering ‘begrijpen’ en in hun eigen onvolmaakte woorden kunnen uitleggen, dan dat ze een gememoriseerd bewijs perfect kunnen reproduceren.

Omdat eigenschappen in een onderzoeksfase (bijv. in oefeningen) en verklaringen in een leerproces met leerlingbetrokken werkvormen worden ontwikkeld zal meer dan voorheen zorg besteed worden aan dit kennisbestand, opdat leerlingen een voldoende duidelijk omschreven ‘referentiekader’ verwerven (zowel wat betreft de kennis zelf, als de mogelijkheden om de samenhang te verklaren). Omdat eigenschappen in een onderzoeksfase en argumenteringsfase vlot moeten kunnen gehanteerd worden, is het zinvol dat leerlingen hun kennis niet alleen logisch organiseren. Die ordening kan ook volgens schema’s die gemakkelijk bruikbaar zijn bij het bewijzen van specifieke, veel voorkomende elementen (bijv. met welke eigenschappen is evenwijdigheid aan te tonen). In het onderdeel redeneervaardigheden bij 5.1 werden een aantal algemene suggesties in verband met het bewijzen opgenomen.

De leerlingen bezitten vanuit de eerste graad een aantal methoden en voorstellingstechnieken om *ruimtelijke situaties* te beschrijven. De eigenschappen, nu nog vaak in de vlakke meetkunde geformuleerd, moeten waar zinvol, in ruimtelijke situaties geïllustreerd worden en toegepast worden bij het oplossen van ruimtelijke problemen.

1 Gelijkvormigheid van vlakke figuren

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	**Et**
m1	B	Gelijkvormige driehoeken definiëren en construeren.	26
m2	B	Gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken afleiden en illustreren op een tekening.	26
m3	B	Gelijkvormigheid van driehoeken toepassen bij constructies en bij het berekenen van de lengte van lijnstukken.	26
m4	B	Gelijkvormigheid van driehoeken gebruiken om een evenredigheid van lengten van lijnstukken of een gelijkheid van hoeken te bewijzen.	
m5	B	Meetkundige problemen oplossen, ook in ruimtelijke situaties, met behulp van eigenschappen steunende op gelijkvormigheid van driehoeken.	26
m6	U	In het vlak de verschillende situaties onderzoeken die zich kunnen voordoen bij de projectie van een lijnstuk en een rechte op een rechte.	
m7	U	De stelling van Thales formuleren.	
m8	U	De stelling van Thales bewijzen.	
m9	U	De stelling van Thales gebruiken om de evenredigheid van lengten van lijnstukken te bewijzen.	

Pedagogisch-didactische wenken

Een aantal meetkundeonderwerpen vertonen raakpunten met onderwerpen die in dit leerplan in andere onderdelen worden vermeld. Dit biedt kansen op een meer *geïntegreerde aanpak*. Een voorbeeld is het koppelen van de stelling van Pythagoras aan de voorstelling van irrationale getallen.

1 De gelijkvormigheid van figuren is al onderzocht in de eerste graad en kan hier kort hernomen worden. Bij de herhaling kan de gelijkvormigheid tussen figuren geïllustreerd worden met figuren die niet in eenzelfde vlak liggen (bijv. bij kubus, balk, grondvlak en bovenvlak prisma, bepaalde evenwijdige snijvlakken in prisma en piramide).

Voor het praktisch gebruik wordt, zoals bij de congruentie, de gelijkvormigheid van driehoeken beter omschreven aan de hand van de overeenkomstige elementen van de driehoeken (gelijkheid van de overeenkomstige hoeken en evenredigheid van overeenkomstige zijden). Hierbij kan het verband tussen gelijkvormigheid en congruentie gelegd worden. De gelijkvormigheidsfactor zal in verband gebracht worden met het begrip schaal dat al in de eerste graad werd aangebracht.

2 Zoals bij de congruentie wordt gezocht naar nodige en voldoende voorwaarden opdat twee driehoeken gelijkvormig zouden zijn. Hierbij kan erop gewezen worden dat dergelijke eigenschappen een economie in het denken met zich mee brengen, m.a.w. slechts een beperkt aantal, maar wel goed gekozen, voorwaarden moet gecontroleerd worden.

Leerlingen kunnen door tekenopdrachten (teken een driehoek gelijkvormig aan een gegeven driehoek) ervaren dat het volstaat te werken met ‘goed gekozen’ informatie. Dit leidt tot het formuleren van kenmerken. Ook hier zijn tegenvoorbeelden belangrijk om de ‘kracht’ van de kenmerken te onderbouwen.

3 Met behulp van de gelijkvormigheid van driehoeken kunnen een aantal eigenschappen en situaties onderzocht worden. Dit kan leiden tot een aantal *constructies en berekeningen* (bijv. een lijnstuk in n gelijke delen verdelen, constructies van de vierde evenredige, verhouding van de lengten van lijnstukken bereke-

nen, het vergroten en verkleinen van afmetingen, het verband opzoeken tussen de omtrekken en de oppervlakten van gelijkvormige figuren).

Gelijkvormigheid van driehoeken kan gehanteerd worden bij het berekenen van afstanden die niet meetbaar zijn, bijvoorbeeld omdat ze ontoegankelijk zijn.

Bij het construeren van gelijkvormige driehoeken en het berekenen van lengten van zijden kunnen enkele intuïtief aangevoelde eigenschappen van driehoeken beter geëxpliciteerd worden, zodat ze door de leerling als controlemaatstaf kunnen gehanteerd worden (bijv. de relatie 'tegenover een grotere hoek ligt een grotere zijde' en de driehoeksongelijkheid).

4 Het toepassen van de gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken kan intuïtief verlopen. De nadruk ligt dan op de meetkundige eigenschap die men onderzoekt en wil formuleren en argumenteren, en minder op het rigoureus aantonen.

Voor een eerste verklaring van de gebruikte kenmerken kan men zich beperken tot het vergelijken van gemeten lengten en hoeken en bijv. het narekenen van de verhoudingen. De meetkundige verantwoording 'vanuit gekende eigenschappen' blijft dan nog op de achtergrond.

Toch moeten de leerlingen de kritische zin ontwikkelen. Dat betekent dat aandacht moet besteed worden aan de kwaliteit van de gegeven argumentatie. Maar leerlingen kunnen vaak dergelijke redeneringen niet zomaar 'van voor af aan' opstarten. Daarom zal aandacht besteed worden aan het zoekproces van het bewijs. Leerlingen moeten in een eerste stap duidelijk de betrokken lijnstukken en/of hoeken 'zien' in de tekening. Ze moeten dan een aantal driehoeken 'zien' waarin deze als 'overeenkomstige elementen' functioneren. Tussen de gevonden figuren moeten ze dan op zoek gaan naar driehoeken die 'gelijkvormig ' zijn. Eerst dan kan gezocht worden welk het te gebruiken kenmerk is, en of dat te argu menteren is met de beschikbare gegevens. Als die argumenten gevonden worden, kan het besluit geformuleerd worden. Dit proces wordt afgesloten met een behoorlijk 'samenvatten' van de gevonden weg.

5 Een aantal eigenschappen kan onderzocht worden op tekeningen, onder meer door meten. Hierbij zal aandacht besteed worden aan tegenvoorbeelden om de 'voorwaarden' in de formulering te verantwoorden. Aan een aantal eigenschappen kan een verklaring gegeven worden gebruik makend van de beschikbare kennis. De zorg voor het leerproces in het opbouwen van verklaringen primeert hier op het aantal eigenschappen. Het is geenszins de bedoeling dat leerlingen bewijzen gaan memoriseren!

Mogelijke eigenschappen die hier kunnen bewezen worden zijn:
- de eigenschappen van een middenparallel van een driehoek,
- de metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek,
- de bissectrice-eigenschap (in een driehoek verdeelt de bissectrice van een hoek de overstaande zijde in stukken die evenredig zijn met de aanliggende zijden),
- de eigenschap in verband met de verhouding van de lijnstukken waarin het zwaartepunt van een driehoek een zwaartelijn verdeelt.

6 *Uitbreiding*

Ontegensprekelijk bestaat er een verwantschap tussen de doelstellingen in verband met de gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Thales. De oplossing van een aantal toepassingen kan vaak verklaard worden vanuit beide onderdelen. Het inzicht wordt versterkt door aandacht te besteden aan de verschillende motiveringen. Daarom is het zinvol hier in meer of mindere mate aandacht te besteden aan de stelling van Thales. De omvang daarvan wordt overgelaten aan de keuze van de leraar (bijv. wel formulering maar geen bewijs, minimale versus uitgebreidere kennis over projectie). Als gekozen wordt om de stelling van Thales te behandelen, wordt het aanbrengen en verwerken ervan best geïntegreerd in het onderdeel gelijkvormigheid van driehoeken. Een mogelijke volgorde waarin de onderwerpen behandeld kunnen worden is: gelijkvormigheid, projectie, stelling van Thales en dan de toepassingen geïntegreerd aanbieden.

Leerlingen hebben in de eerste graad intuïtief gebruik gemaakt van projectie als ze in het vlak de coördinaatgetallen van een punt hebben bepaald en als ze ruimtefiguren hebben voorgesteld met aanzichten. Zo hebben ze ervaren dat bij dergelijke voorstellingen informatie verloren gaat. Vaak wordt de lengte van een lijnstuk niet behouden bij projectie. De projectie van een lijnstuk is zelfs niet altijd een lijnstuk. Deze inzichten worden hier verdiept door een expliciete formulering in het vlak.

Wat de leerlingen in de eerste graad intuïtief in de ruimte hebben ingezien, kan hier met het inzicht in de projectie in een vlak verdiept worden. Mogelijkheden zijn: de projectie onderzoeken van een vlakke figuur of een eenvoudige ruimtefiguur op een vlak (cf. aanzichten); onderzoeken welke informatie verloren gaat bij het projecteren op een vlak; een figuur opbouwen als de projecties op een horizontaal en een verticaal vlak (cf. aanzichten) gegeven zijn.

Opmerking 5 lestijden

Als het aantal wekelijkse lestijden wiskunde wordt uitgebreid tot *5 lestijden*, dan kan meer aandacht besteed worden aan de uitbreidingsdoelstellingen over projectie en de stelling van Thales.

7 *Uitbreiding*

De verhouding van de lengten van lijnstukken wordt bij projectie wel behouden als die lijnstukken evenwijdig zijn. Dit leidt tot de stelling van Thales. De leerlingen kunnen dit op goed gekozen voorbeelden zelf onderzoeken (o.m. met ICT-hulpmiddelen). De stelling van Thales wordt zowel in verband gebracht met de situatie in een driehoek (met een snijlijn evenwijdig aan een zijde) als met de situatie op twee rechten gesneden door een aantal evenwijdigen. Het laatste geval kan aanleiding zijn om het verband te leggen met het beeld van een geijkte rechte door een projectie.

Mits goede voorstellingen aan te reiken kan de stelling van Thales ook in ruimtelijke situaties geïnterpreteerd worden (bijv. schaduw van evenwijdige stokken, het berekenen van de hoogte van een gebouw met behulp van de schaduwbeelden van gebouw en een stok).

9 *Uitbreiding*

Uit de stelling van Thales volgt dat overeenkomstige lijnstukken evenredige lengten hebben. De grootste moeilijkheid voor leerlingen is vaak het herkennen van de toepasbaarheid van de stelling van Thales in figuren of de samenhang tussen figuren.

Ook hier liggen kansen om bij de leerlingen de nodige kritische zin te ontwikkelen. Net zoals bij de gelijkvormigheid moeten ze hier kunnen verklaren hoe ze de stelling van Thales toegepast hebben en mogen ze de evenredigheid van lengten van lijnstukken niet zomaar intuïtief aanvaarden.

2 Stelling van Pythagoras

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	**Et**
m10	B	De stelling van Pythagoras formuleren en de betekenis ervan met figuren illustreren.	26
m11	B	De stelling van Pythagoras bewijzen.	
m12	B	De stelling van Pythagoras gebruiken om de lengte van een lijnstuk te berekenen.	26
m13	B	De afstanden berekenen tussen twee punten in het vlak gegeven met hun coördinaten.	27
m14	B	De afstand berekenen tussen hoekpunten van een balk als de lengten van de ribben gegeven zijn.	27
m15	B	Vraagstukken oplossen die betrekking hebben op de stelling van Pythagoras.	26

Pedagogisch-didactische wenken

10 De stelling van Pythagoras kan onderzocht worden op verschillende situaties. Daarbij is het zinvol gebruik te maken van de interpretatie met oppervlakten van vierkanten (bijv. construeer een vierkant waarvan de oppervlakte de som is van twee gegeven vierkanten). Het gebruik van een simulatieprogramma kan overtuigend werken. Een voorbeeld van dezelfde regel, toegepast op niet-rechthoekige driehoeken, levert een tegenvoorbeeld en verantwoordt in de formulering de wending ‘in een rechthoekige driehoek’. In de praktijk kunnen drietallen van Pythagoras gebruikt worden om een rechte hoek te construeren. De 3-4-5-regel, zoals gekend bijvoorbeeld in de bouw, kan hier ter sprake komen.

De stelling biedt een uitstekende gelegenheid om de leerlingen te wijzen op het bestaan van irrationale getallen. Dit kan een aanwijzing zijn om de exploraties rond de stelling van Pythagoras te laten vooraf gaan aan de behandeling van irrationale getallen in de getallenleer.

De stelling van Pythagoras, het verband met irrationale getallen en de aanverwante problematiek kan een aanleiding zijn om even uit te weiden over een stukje geschiedenis van de wiskunde. Zo ook kan naar aanleiding van constructies van situaties die voldoen aan de stelling van Pythagoras een fractaal, m.n. de boom van Pythagoras, ter sprake gebracht worden.

11 Er zijn vele mogelijkheden om de stelling van Pythagoras te bewijzen. Zo kunnen de metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek gebruikt worden. Een andere mogelijkheid is gebruik maken van de oppervlakten van figuren (bijv. puzzels over het herschikken van de oppervlakten). Het kan verrijkend zijn meerdere bewijzen te geven. Ze kunnen als oefening aangeboden worden.

Meetkundige software biedt de mogelijkheid zowel de verklaring met gelijkvormigheid (o.m. de metrische betrekkingen), als de oppervlakteberekening aanschouwelijk te expliciteren.

12 Met behulp van passer en liniaal kunnen een aantal lijnstukken geconstrueerd worden waarvan de lengte een irrationale vierkantswortel is. En zo kan verklaard worden dat deze irrationale getallen effectief kunnen voorgesteld worden.

14 De stelling van Pythagoras (of de formule voor afstand in een vlak) kan in ruimtelijke situaties toepast worden, bijv. om afstanden tussen de hoekpunten van een balk te berekenen. Het is niet de bedoeling de formule voor de afstand tussen twee punten in de ruimte te gebruiken. Wel wordt gewerkt in verschillende stappen, waarbij telkens gebruik gemaakt wordt van een vlakke situatie. Het is daarbij nodig aandacht te besteden aan het zichtbaar, transparant maken van de vlakke situatie. Het inzicht in de probleemstelling zal versterkt worden als de leerlingen zich een adequate voorstelling kunnen maken van de ruimtelijke situatie en het gebruikte ‘vlak’. Op zich versterkt dit het ruimtelijk inzicht en het ruimtelijk voorstellingsvermogen.

15 Meetkundige vraagstukken zijn voor de leerlingen niet eenvoudig. Vaak hebben ze hiertegen een niet te veronachtzamen tegenstand opgebouwd. Daarom zal ervoor gezorgd worden, dat de besproken problemen gesteld worden in voor leerlingen haalbare situaties en in een taal die hen aanspreekt. Dat betekent ondermeer dat de leraar oog heeft voor een gradatie in moeilijkheidsgraad, bijvoorbeeld van kale, in het oog springende toepassingen, over ingeklede oefeningen, naar wat meer verholen toepassingen. Dat telkens aandacht besteed wordt aan het ‘stellen’ van het probleem, vanuit de situatie, de opgave, …. Dat in een eerste fase een tekening beschikbaar is, dat men een dergelijke tekening leert analyseren en uiteindelijk ook opstellen. En dat betekent dat de leraar de leerlingen wijst op een heuristische methode als die gebruikt wordt of als dat aangewezen is (zie hiervoor het algemeen deel probleemoplossend werken bij 5.1), …. Dat houdt meteen in dat hiervoor voldoende tijd moet uitgetrokken worden. Opdat leerlingen vooruitgang zouden boeken is geduldig werk van de leraar en een voldoend aantal oefeningen nodig. Maar het resultaat loont zeker de moeite.

De stelling van Pythagoras moet gebruikt worden in allerlei *meetkundesituaties*. Daarvoor staan de situaties uit m12, m13 en m14 model, d.w.z. de lengte van een lijnstuk, de afstand tussen twee punten in een vlak of op een ruimtefiguur berekenen.
Zo bijvoorbeeld:
– de diagonaal van een vierkant of een rechthoek;
– de hoogte van een gelijkzijdige driehoek;
– de lengte van de diagonalen van een kubus of een balk.

Merk op, dat de te berekenen zijde niet enkel de schuine zijde hoeft te zijn, bijvoorbeeld:
– bereken de zijde van een vierkant als de lengte van een diagonaal gegeven is;
– bereken de lengte van een rechthoek als de lengte van een diagonaal en de breedte gegeven zijn;
– bereken in een concrete figuur waarvan een aantal afmetingen gegeven zijn, enkele afmetingen;
– controleer of een figuur met bepaalde afmetingen gegeven wel de vereiste kenmerken heeft;
– onderzoek of een driehoek waarvan een aantal afmetingen gegeven zijn gelijkbenig is.

Ook *ruimtelijke situaties* moeten aan bod komen, bijvoorbeeld:
– bereken de hoogte van een piramide;
– bereken de lengte van een ribbe als de zijde en de hoogte van een vierzijdige rechte piramide gegeven zijn;
– bereken de omtrek van de gelijkzijdige driehoek gevormd door drie diagonalen in verschillende zijvlakken van een kubus;
– bereken de lengte van lijnstukken op gegeven ruimtefiguren als bepaalde afmetingen gegeven zijn, bijv. een lijnstuk begrensd door de middens van twee ribben van een kubus.

3 Driehoeksmeting van een rechthoekige driehoek

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m16	B	De sinus, cosinus en tangens van een scherpe hoek in een rechthoekige driehoek definiëren (symbolen : sin, cos, tan).	
m17	B	De goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens gebruiken voor het oplossen van vraagstukken in rechthoekige driehoeken.	27

Pedagogisch-didactische wenken

16 De begrippen *sinus, cosinus en tangens* van een scherpe hoek volgen uit de vaststelling dat alle rechthoekige driehoeken met eenzelfde scherpe hoek α gelijkvormig zijn. Dit zijn de goniometrische getallen ‘van de hoek α’ omdat de kennis van één van deze getallen toelaat de scherpe hoek ondubbelzinnig te bepalen. Als symbool voor de tangens van een hoek wordt gekozen voor ‘tan’, die internationaal wordt aanbevolen en dat op de meeste rekenmachines gebruikt wordt.

Voor de praktische toepassingen wordt het gebruik van de *rekenmachine* aangeleerd voor het opzoeken van enerzijds de sinus, de cosinus en de tangens van een scherpe hoek en anderzijds van het maatgetal van een scherpe hoek als de sinus, de cosinus of de tangens van die hoek gegeven is.

De fundamentele formules $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ en $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ kunnen afgeleid worden met behulp van de stelling van Pythagoras en de gelijkvormigheid van driehoeken.

4 Vectoren

Als het aantal wekelijkse lestijden wiskunde 4 bedraagt, dan wordt dit onderdeel aangezien als uitbreiding. Als het aantal wekelijkse lestijden wiskunde wordt uitgebreid tot *5 lestijden* (cf. pedagogische aanbevelingen bij de lessentabel), dan worden de doelstellingen van dit onderdeel aangezien als *basis*doelstellingen.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m18	U	Het begrip vector definiëren.	
m19	U	Een vector ontbinden volgens de assen van een assenstelsel en associëren met een koppel coördinaatgetallen.	
m20	U	De som van twee vectoren definiëren en construeren met de parallellogramregel.	
m21	U	Eigenschappen van de optelling van vectoren onderzoeken.	
m22	U	Het product van een vector met een getal definiëren en construeren.	
m23	U	Het vectorbegrip gebruiken om meetkundige eigenschappen te formuleren en te verklaren.	

Pedagogisch-didactische wenken

17 Vraagstukken bieden de mogelijkheid de goniometrische verhoudingen te gebruiken bij het oplossen van praktische, concrete problemen. Voor leerlingen is de moeilijkheid vaak het herkennen van de situatie op

een figuur. Daarom wordt in een eerste benadering best gewerkt met gegeven, heldere figuren. Toch blijft het zelf maken van een dergelijke figuur behoren tot de analysevaardigheden die doorheen het oplossingsproces van deze vraagstukken moeten verworven worden.

18 Voortbouwend op het begrip verschuiving dat in de eerste graad werd ingevoerd kan het begrip vector relatief eenvoudig worden aangebracht. Ook een meer realistische benadering vanuit de fysische of technische toepassingen (grootheid met grootte, richting, zin) kan relatief eenvoudig gekoppeld worden aan het begrip verschuiving. (Zie leerplan eerste graad p.61: “verschuiven gebeurt intuïtief over een bepaalde afstand volgens een bepaalde richting en zin”.)

Het belang dat aan het onderdeel vectoren zal gehecht worden is afhankelijk van de gevolgde studierichting. Belangrijk is dat bij de leerlingen een duidelijk vectorbegrip ontstaat dat efficiënt en functioneel kan gebruikt worden in de verschillende toepassingen.

19 Het is zinvol het begrip vector vrij snel te verbinden aan een stellen coördinaatgetallen. Dit verband kan gebruikt worden bij het analytisch beschrijven van rechten.

Als vectoren behandeld worden kan men overwegen de onderdelen vectoren en analytische meetkunde te integreren.

21 De eigenschappen van de optelling worden via voorbeelden onderzocht.

23 Het heeft weinig zin het vectorbegrip in de wiskunde te ontwikkelen zonder er ook effectief gebruik van te maken. Daarom moet het in toepassingen worden verwerkt. Daarin kunnen leerlingen eventueel ervaren welke voor- en/of nadelen het gebruik van vectoren heeft (bijv. elegantie van een modellering, van een verklaring, …).

Als toepassingen kunnen aan bod komen:
- de voorwaarden voor collineariteit;
- de voorwaarde voor het midden van een lijnstuk;
- eigenschappen in een driehoek (bijv. zwaartepunt);
- eigenschappen in een parallellogram (bijv. diagonalen).

5 Toepassingen in de ruimte

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m24	B	Gebruik maken van schetsen en tekeningen bij het oplossen van problemen gesteld in vlakke en beperkte ruimtelijke situaties.	27
m25	B	Gebruik maken van begrippen en elementaire eigenschappen bij het oplossen van problemen in vlakke en ruimtelijke situaties.	27

Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen moeten hun kennis leren gebruiken bij het oplossen van meetkundige problemen, zowel in het vlak als in de ruimte. Het gaat daarbij hoofdzakelijk om berekeningen in praktische en concrete situaties en minder om het opstellen van nieuwe eigenschappen. Bij het oplossingsproces maken ze gebruik van tekeningen om de problemen te analyseren en gekende eigenschappen om de oplossing te argumenteren. Het lezen van en het zichtbaar maken van informatie op een tekening is voor de leerlingen een belangrijke stap in de probleemanalyse. Het is een cruciale stap naar het zelf maken van tekeningen bij een gesteld probleem. Met het argumenteren van hun oplossing hebben de leerlingen vaak moeilijkheden. Het leren argumenteren van een oplossing moet daarom volgens een weg van geleidelijkheid opgebouwd worden.

Het best sluiten deze toepassingen aan bij de behandeling van de eigenschappen zelf. (Zie de doelstellingen m5, m15 en m17.) Toch wil de expliciete formulering van deze doelstellingen het belang ervan aangeven. De tijd voor het verwerken van deze doelstellingen werd evenwel verrekend bij de andere onderdelen.

24 Leerlingen beschikken uit de eerste graad over een aantal voorstellingstechnieken voor ruimtelijke situaties (aanzichten, cavalièreperspectief, eventueel isometrisch perspectief). Bij de behandeling van toepassingen in de ruimte zal aandacht besteed worden aan een adequate voorstelling, waarbij de eerder gemaakte conventies gerespecteerd worden. Omdat bij een ruimtelijke voorstelling soms bepaalde informatie over situaties anders wordt voorgesteld (bijv. een rechte hoek wordt scherp of stomp, kruisende rechten worden snijdend, …) zal veel zorg besteed worden aan de tekeningen en eventueel het zichtbaar maken van de vlakke situatie waarvan men gebruik wil maken. Zo nodig zal men de feitelijke ruimtelijke situatie met didactisch materiaal illustreren om het inzicht van de leerlingen te bevorderen.

25 De leerlingen moeten de gekende meetkundige begrippen en eigenschappen leren gebruiken om meetkundige problemen op te lossen, zowel in het vlak als in de ruimte. Zeker aan bod komen een aantal oefeningen waarbij lengten en hoeken moeten berekend worden.

6 Gereedschapskist meetkunde

Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen moeten na het eerste leerjaar van de tweede graad beschikken over een verzameling meetkundige eigenschappen, die vlot kunnen toegepast worden bij het onderzoeken van meetkundige situaties, het verklaren van eigenschappen, het oplossen van meetkundige problemen. Een vlotte en soepele verwoording ervan en een duidelijke visuele ondersteuning kunnen de toepasbaarheid vergroten. Ze moeten een duidelijk en hanteerbaar kader vormen, waarop de leerling kan terugvallen. Dit betekent niet dat de leerlingen dergelijke overzichten moeten memoriseren. Het overzicht moet wel beschikbaar zijn. Dat kan bijvoorbeeld in de vorm van een *'vademecum'*. Zo'n lijst kan geleidelijk (gespreid over de verschillende leerjaren) en samen met de leerlingen worden opgebouwd (bijv. een synthesetaak na een hoofdstuk). Als voorbeeld worden in het volgend overzicht een aantal eigenschappen opgesomd die kunnen worden opgenomen in zo'n vademecum. (Een aantal van deze eigenschappen zijn al verworven in de eerste graad.)

Eigenschappen over de lengten van de zijden en de grootte van de hoeken van driehoeken en vierhoeken.
Eigenschappen over de diagonalen van vierhoeken.
Eigenschappen over de hoeken bij een snijlijn van evenwijdige rechten.
De eigenschappen van de middelloodlijn van een lijnstuk en van de bissectrice van een hoek en hun omgekeerde.
In een driehoek gaan de zwaartelijnen, de middelloodlijnen, de hoogtelijnen, de bissectrices telkens door één punt.
Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijn in twee stukken die zich verhouden als twee tot één.
De driehoeksongelijkheid tussen de zijden van een driehoek.
- In elke driehoek is elke zijde langer dan het verschil van de twee andere, maar korter dan hun som.

Eigenschappen van de merkwaardige lijnen in een driehoek, in een gelijkbenige driehoek en in een gelijkzijdige driehoek.
Eigenschappen van (invariantie bij) een verschuiving, een puntspiegeling, een spiegeling , een draaiing.
De congruentiekenmerken van driehoeken.
De gelijkvormigheidskenmerken voor driehoeken.
De stelling van Pythagoras en haar omgekeerde.
De eigenschap van een middenparallel van een driehoek.
De metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek.
- In een rechthoekige driehoek is de hoogtelijn middelevenredig tussen de stukken waarin ze de schuine zijde verdeelt.
- In een rechthoekige driehoek is elke rechthoekszijde middelevenredig tussen de schuine zijde en haar loodrechte projectie op de schuine zijde.

Belangrijk is dat deze lijst van eigenschappen geen steriel overzicht is van een aantal geziene en/of bewezen eigenschappen. De lijst moet ook gemakkelijk hanteerbaar zijn in nieuwe situaties. Daarom is een ordening op basis van *bruikbaarheid* een zinvolle ordening.

Voorbeelden

Met welke hulpmiddelen kan verklaard, bewezen worden
- dat twee rechten evenwijdig zijn;

- dat twee hoeken even groot zijn;
- dat de lengten van twee lijnstukken gelijk zijn;
- dat een punt het midden is van een lijnstuk;
- dat een vierhoek een parallellogram is;
- dat drie punten collineair zijn.

Een dergelijke opvatting en ordening van de gekende eigenschappen zal de leerlingen meer hulp bieden bij het zelfstandig exploreren van meetkunde.

5.4.2 GETALLENLEER

	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **getallenleer** worden ca. **35** lestijden besteed

uitbreiding van het getalbegrip	ca. 5 lestijden
toepassingen op bewerkingen met reële getallen	ca. 20 lestijden
algebraïsch rekenen	ca. 10 lestijden

1 Uitbreiding getalbegrip

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
g26	B	Het bestaan van irrationale getallen illustreren.	
g27	B	Reële getallen ordenen en voorstellen op een getallenas.	
g28	B	De vierkantswortel van een positief reëel getal en de derdemachtswortel van een reëel getal definiëren en benaderen met behulp van een rekenmachine.	15 12

	Pedagogisch-didactische wenken

In de getallenleer wordt het getalbegrip verder uitgebreid tot de verzameling van de reële getallen. Daarvoor moeten leerlingen het begrip irrationaal getal verwerven. Zowel de wortelvormen met inbegrip van een meetkundige voorstelling als de decimale vorm moeten aan bod komen. De aanbreng van irrationale getallen kan een aanleiding zijn om elementen uit de geschiedenis van de wiskunde in te brengen, bijv. de problemen met de irrationaliteit voor de Pythagoreïsche school. Wat betreft de ordening en de rekenregels, blijven de gekende eigenschappen geldig. Ook het oplossen van vergelijkingen verandert in wezen niet. De uitbreiding van □ naar □ betreft dus vooral de kennismaking met de irrationale getallen.

Het is evenwel niet realistisch te verwachten dat de leerlingen van het eerste jaar van de tweede graad de begrippen reëel getal en irrationaal getal al kunnen doorgronden in al hun subtiliteit. De behandeling in dit leerjaar kan dus maar zeer beperkt zijn. Waar nodig zullen de reële getallen in de derde graad in de analyse opnieuw aan bod komen.

26 Het bestaan van irrationale getallen is niet vanzelfsprekend. Zoals de andere soorten getallen zouden de reële getallen een brede betekenis moeten krijgen. Voor reële getallen is dit niet zo eenvoudig.

Eerst kan de *periodiciteit* in de decimale voorstelling van rationale getallen geconstateerd worden. Daarna kan van enkele concrete rationale getallen met een eenvoudige repeterende decimale vorm de breukvorm berekend worden. Het bestaan van irrationale getallen kan dan geïllustreerd worden met enkele getallen met een niet-repeterende decimale voorstelling. Ook het getal π is een voorbeeld van een irrationaal getal.

De problematiek van *irrationale lengten* die ontstaat bij de stelling van Pythagoras biedt een voor de hand liggende aanleiding. Getallen die als vierkantswortel geschreven kunnen worden krijgen hier een meetkundige voorstelling. Dit is een aanwijzing om deze meetkundige elementen en irrationale getallen geïntegreerd te behandelen.

Van niet-rationale vierkantswortels (van positieve getallen) zal aangenomen worden dat ze irrationaal zijn. Zo kan intuïtief aanvaard worden dat er geen rationaal getal bestaat met kwadraat 2. De verzameling van de rationale getallen volstaat dus niet om een dergelijk elementair probleem te beschrijven. Dit is een van de weinige mogelijkheden om leerlingen een haalbare motivatie te bieden voor het bestaan en de noodzaak van irrationale getallen.

Het inzicht in de irrationale getallen met zowel de problematiek van de decimale ontwikkeling als die van de vierkantswortels en hun eventuele meetkundige voorstelling, volstaat op dit niveau als inzicht in ‘reële’ getallen.

Er dient verder op gewezen dat, ondermeer bij het rekenen met een rekenmachine, reële getallen zowel wat de interpretatie betreft (bijv. bij plaatsbepaling) als bij bewerkingen (in realistische problemen), vaak benaderd worden door een eindig decimaal getal.

27 De *ordening* van de reële getallen volgt op een natuurlijke wijze uit hun decimale schrijfwijze en komt uiteraard overeen met de ordening van punten op de getallenas.

Door intuïtief de plaats van enkele concrete irrationale getallen te bepalen op de *getallenas* en door omgekeerd van een aantal concrete punten de abscis benaderend te bepalen, groeit het besef dat met elk punt van de getallenas juist één reëel getal overeenstemt en omgekeerd dat met elk reëel getal juist één punt van de getallenas overeenstemt. De irrationaliteit van $\sqrt{2}$ gekoppeld aan de stelling van Pythagoras illustreert dat er wel degelijk irrationale ‘lengten’ of abscissen op de getallenas voorkomen. Het punt met abscis $\sqrt{2}$ kan men precies construeren.

28 Voor de invoering van het begrip vierkantswortel en derdemachtswortel kan uitgegaan worden van het omkeren van de machtsverheffing.

Bij vierkantswortel moet aandacht besteed worden aan de vaststelling dat er voor elk strikt positief getal a twee getallen (b en -b) bestaan waarvan het kwadraat a is. Ofwel b ofwel -b is positief. Er wordt afgesproken de positieve vierkantswortel uit a te noteren met $\sqrt{a}$. Met ‘vierkantswortel a’ wordt de positieve vierkantswortel bedoeld. Verder kan opgemerkt worden dat $\sqrt{a^2} = |a|$. De leerlingen moeten inzien waarom binnen de verzameling van de reële getallen de vierkantswortel uit een negatief reëel getal niet wordt gedefinieerd. Ze moeten hierbij een correct taalgebruik hanteren, niettegenstaande ze de volle draagwijdte ervan (m.n. er is een verzameling waarin voor negatieve getallen toch vierkantswortels kunnen gedefinieerd worden) misschien niet vatten.

Voor omrekeningen van formules (bijv. volume) is het zinvol de derdemachtswortel in te voeren. Het gebruik wordt beperkt tot functionele toepassingen. De veralgemening naar de n-de machtswortel zal later volgen.

Bij het benaderen van een vierkantswortel of een derdemachtswortel met behulp van een rekenmachine moeten de leerlingen leren hun resultaat te controleren bijv. met een schatting van de grootteorde. Verder zal er op gewezen worden dat het getal op het scherm meestal een rationale benadering is. Dit is een gelegenheid om het gebruik van het aantal decimalen te bespreken. In het algemeen is het zinvol leerlingen resultaten te leren aflezen (afronden) in functie van de betekenis of het gebruik ervan (bijv. ‘precies’ resultaat of grootteorde gewenst). Voor sommige doeleinden zal een benadering tot op bijv. 0,1 volstaan, voor andere zal een nauwkeurigheid tot op bijv. 0,0001 gevraagd worden. Dat staat onder meer in verband met de gebruikte nauwkeurigheid bij het invoeren van getallen, met het verdere gebruik van het getal in berekeningen, …. Het is nuttig met het wiskundeteam en met de leraren van de technische vakken af te spreken om volgens eenzelfde principe te werken, zodat de leerling maar één systeem moet verwerven.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
g29	B	Berekeningen uitvoeren met getallen in decimale vorm, in breukvorm en in wetenschappelijke schrijfwijze en daarbij de rekenmachine gebruiken.	12
g30	B	Regels voor het rekenen met machten toepassen bij het rekenen met getallen en met letters.	
g31	B	De rekenregels voor het rekenen met vierkantswortels uitdrukken in woorden en symbolen.	
g32	B	De rekenregels voor het rekenen met vierkantswortels toepassen bij het uitvoeren van bewerkingen.	
g33	B	Bewerkingen met vierkantswortels en derdemachtswortels benaderend uitvoeren met behulp van een rekenmachine.	
g34	U	De rekenregels voor het rekenen met vierkantswortels bewijzen.	
g35	B	Vraagstukken oplossen, en daarbij – in de probleemstelling herkennen welke grootheden aan de orde zijn; – het probleem vertalen in een wiskundige vorm met algebraïsche bewerkingen tussen de grootheden; – verantwoord kiezen tussen schattend rekenen, benaderend rekenen en het gebruik van een rekenmachine; – de oplossing zinvol afronden en interpreteren.	13 14 15 20
g36	B	Vraagstukken oplossen die leiden tot een vergelijking van de eerste graad met één onbekende.	24
g37	B	Vraagstukken oplossen die leiden tot een ongelijkheid van de eerste graad met één onbekende en de oplossing grafisch voorstellen en symbolisch noteren.	24

Pedagogisch-didactische wenken

29 Het rekenen met rationale getallen (zowel in breukvorm, in decimale vorm als in wetenschappelijke schrijfwijze) behoort tot de leerinhouden van de eerste graad (en deels het basisonderwijs). Toch valt het te verwachten dat sommige leerlingen van deze groep nog moeilijkheden hebben met deze ‘rekenvaardigheid’. Hierover kan zo nodig informatie verworven worden met een diagnostische toets. De leerinhouden van dit leerjaar bieden binnen het normale leerproces voldoende gelegenheden om het rekenen met rationale getallen te onderhouden (bijv. bij vraagstukken als toepassing op verscheidene nieuwe leerinhouden en bij meetkundeproblemen over berekeningen van lengten en hoeken). Als de herhaling gebeurt in functionele situaties, zullen de leerlingen dit rekenen allicht als meer zinvol ervaren en kan de motivatie ervoor toenemen.

Waar fundamentele rekenproblemen vastgesteld worden kunnen die uiteraard gericht geremedieerd worden. Een vlotte en inzichtelijke rekenvaardigheid biedt de leerling op lange termijn alleen maar voordelen. Een adequaat gebruik van een rekenmachine kan echter een oplossing bieden voor het gebrek aan rekenvaardigheid. Maar ook los van de remediëringsproblematiek moeten de leerlingen leren verantwoord gebruik maken van een rekenmachine. Dat wil onder meer zeggen dat leerlingen geleerd wordt de bekomen resultaten te toetsen, bijv. door ze te vergelijken met een schatting van de grootteorde.

Bij het gebruik van een rekenmachine worden leerlingen in hoofdzaak geconfronteerd met het rekenen met decimale getallen. Dit zou hen de idee kunnen geven dat resultaten niet exact kunnen berekend worden. Het is zinvol deze problematiek te bespreken naar aanleiding van een gepast voorbeeld. Zonder hierop uiteraard een hele reeks oefeningen uit te voeren zal, waar de gebruikte toestellen het toelaten, het gebruik van het rekenen met de breukvorm machinaal uitgevoerd worden, zodat een ‘exact’ resultaat bekomen wordt. Anderzijds zullen resultaten die evident verwijzen naar breuken als dusdanig geïnterpreteerd worden. Zo kan bijvoorbeeld 0,333… in sommige situaties tot 0,3 afgerond worden, maar men zal niet nalaten dergelijk resultaat ook te noteren als $\frac{1}{3}$.

In overleg met de vakgroep van de technische vakken kan voor de wetenschappelijke schrijfwijze aandacht besteed worden aan de bijzondere notatie van rationale getallen, met machten van tien waarvan de exponent een veelvoud is van drie. Daaraan kunnen de voorvoegsels zoals kilo, mega-, giga-, …, milli, micro, nano-, pica-, … gekoppeld worden.

30 De leerlingen zouden vertrouwd moeten zijn met het rekenen met machten. De leerinhouden van dit leerjaar bieden voldoende gelegenheden om met machten te rekenen. Waar echter nog problemen vastgesteld worden moeten die uiteraard geremedieerd worden, zowel wat betreft het benaderend uitrekenen van een resultaat als het symbolisch rekenen. Het is zinvol extra aandacht te besteden aan het rekenen met machten met letters, waar de rekenregels meer symbolisch moeten toegepast worden.

31 Naast het rekenen met irrationale getallen in decimale vorm moeten leerlingen rekenen met wortelvormen. Ook hier geldt de opmerking dat leerlingen hiervoor allicht sterker gemotiveerd kunnen worden als dit gebeurt in een functionele context.

Het formuleren van rekenregels is noodzakelijk om vlot met wortelvormen te kunnen rekenen, maar de aandacht moet toch vooral gaan naar het toepassen van deze regels.

Voor het rekenen met vierkantswortels wordt de formulering van de regels best voorbereid door te redeneren op voorbeelden. (Voorbeeld: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ is een getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 6, dus is $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ gelijk aan $\sqrt{6}$). Er dient gewezen te worden op de uitdrukkingen die niet leiden tot eigenschappen. (Voorbeeld: $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ is niet gelijk aan $\sqrt{7}$, want het kwadraat van $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ is niet gelijk aan 7). Regels die aan bod kunnen komen zijn het vereenvoudigen van vierkantswortels, som en verschil van gelijksoortige vierkantswortels, product, quotiënt en machten van vierkantswortels.

32 De beschikbare tijd voor de inoefening van dit onderwerp is beperkt. Een beperking tot eenvoudige situaties is aangewezen. De rekenmachine maakt uitgebreide inoefening met veel en ingewikkeld cijferwerk overbodig.

Vooraleer over te stappen op het rekenen met wortelvormen waarin *letters* optreden zal best gerekend worden met wortelvormen van getallen waarop de rekenregels kunnen toegepast worden. Bij de lettervormen zal de moeilijkheidsgraad bewust beperkt gehouden worden. Het gaat er veeleer om het principe van de rekenregels beter te begrijpen. Daarom worden de letters beperkt tot de positieve reële getallen.

Om een vorm met wortelvormen in de noemer te vereenvoudigen kan de mogelijkheid aangebracht worden die noemer rationaal te maken. Het is niet de bedoeling uitgebreid in te gaan op deze techniek, maar wel hem functioneel aan te wenden. Het kan zinvol zijn zich te beperken tot die vormen waarin de noemer een eenterm is bestaande uit een wortelvorm van de tweede graad.

Enige aandacht moet besteed worden aan het rekenen met lettervormen waarbij ook irrationale coëfficiënten optreden.

33 Bij bewerkingen met reële getallen in decimale voorstelling moeten die meestal benaderd worden met een rationaal getal met een eindige decimale vorm. Hetzelfde probleem doet zich voor als berekeningen met vierkantswortels en derdemachtswortels benaderend worden uitgevoerd of bij berekeningen met rationale getallen met een oneindige decimale vorm. En ook bij het rekenen met een rekenmachine worden reële getallen benaderd door rationale getallen met een eindige decimale vorm. De nauwkeurigheid van het decimaal getal dat wordt afgelezen is te bepalen, onder meer in functie van de gebruikte nauwkeurigheid van de ingevoerde getallen of van het gebruik van het afgelezen getal in verdere berekeningen. Werken met decimale getallen die nauwkeurig zijn tot op een verschillend aantal decimalen kan tot onoverzichtelijke onnauwkeurigheden leiden. Dergelijke uitgebreide foutenbespreking moet niet aan bod komen. Wel is het zinvol leerlingen aan te bevelen het afronden uit te stellen tot het eindresultaat. Leerlingen moeten inzien dat een rekenmachine intern met meerdere decimalen werkt en hiervan maximaal gebruik weten te maken.

35 De herhaling en de uitdieping van getallenkennis zal bij de leerlingen nagestreefd worden aan de hand van het oplossen van allerlei problemen uit hun omgeving. Die kunnen onder meer aansluiten bij de technische vakken.

De aandacht voor vraagstukken zal evenwel niet beperkt blijven tot enkele geïsoleerde lessen. Vraagstukken dienen geregeld in allerlei omstandigheden aan bod te komen in de loop van het gehele jaar. Precies de volgehouden aandacht biedt meer kans op het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden. (Voor een algemene situering hiervan zie 5.1).

Belangrijk daarbij is onder meer dat leerlingen een probleem leren stellen in een gegeven situatie. Dat betekent dat ze uit het gevraagde de te berekenen grootheid kunnen afleiden. Dat betekent dat ze in functie daarvan de gegevens en de uit te voeren bewerkingen kunnen selecteren.

De leerlingen kennen al een aantal voorstellingstechnieken van gegevens, zoals diagrammen, grafieken en tabellen. Hiervan kan handig gebruik gemaakt worden om de presentatievorm van de problemen te variëren.

Nadat de leerlingen een accurate wiskundige representatie gekozen hebben moeten ze een aangepaste rekenwijze kiezen. Naargelang de complexiteit van de gegevens en de bewerkingen kan dat zowel het hoofdrekenen als het cijferrekenen of het gebruik van een rekenmachine zijn.

Bij het afronden van berekende getallen, in het bijzonder van het resultaat, moet rekening gehouden worden met de getallen zelf, hun rol eventueel verder in de berekening, de grootteorde van de gegevens en het realiteitsaspect van de situatie. Over de interpretatie van het resultaat in de context van de situatie, zie het onderdeel probleemoplossende vaardigheden bij 5.1.

36 De oplossingstechniek van *verg*elijkingen van de eerste graad met één onbekende in □ zijn dezelfde als die in □ . Deze werden door de leerlingen verworven in de eerste graad. Hierdoor is het oplossen van deze vergelijkingen in □ geen doel op zich meer en dient dit geïntegreerd te worden in het aanbieden van *realiteitsbetrokken vraagstukken*.

Wel moet een verband gelegd worden met het opzoeken van nulpunten van eerstegraadsfuncties. De onderdelen vergelijkingen en eerstegraadsfuncties kunnen daartoe geïntegreerd aangepakt worden.

Voor het oplossen van vergelijkingen van de eerste graad van een eenvoudige vorm en met eenvoudige getallen is de manuele techniek een basisvaardigheid die moet verworven blijven. Dergelijke duidelijke gevallen moeten het inzicht versterken. Voor het oplossen van meer ingewikkelde vormen kunnen ICT-hulpmiddelen ingeschakeld worden. Zo kan men in deze gevallen gebruik maken van de ingebouwde oplosser. Of als het verband gelegd wordt met eerstegraadsfunctie(s), kan de oplossing van de vergelijking grafisch afgelezen worden of als het snijpunt van twee eerstegraadsfuncties (bijv. rechter- en linkerlid) bepaald worden.

37 De eigenschappen van *ongelijkheden* zijn geen doel op zich, maar dienen toegepast te worden bij het oplossen van deze ongelijkheden, om de gelijkwaardigheid van twee ongelijkheden aan te geven. In het bijzonder zal aandacht besteed worden aan de verandering van de zin van de ongelijkheid bij het vermenigvuldigen van beide leden van een ongelijkheid met een negatief getal.

Zoals geldt voor vergelijkingen dient het oplossen van ongelijkheden met één onbekende in □ geïntegreerd te worden in het aanbieden van realiteitsbetrokken *vraagstukken*.

Hier moet een verband gelegd worden met de tekenbespreking van eerstegraadsfuncties. Het verband met het voorstellen van de oplossingen op een geijkte rechte ligt voor de hand (cf. eerste coördinaatas). Ongelijkheden en eerstegraadsfuncties kunnen daartoe geïntegreerd worden.

In verband met het gebruik van ICT-hulpmiddelen geldt voor ongelijkheden een analoge opmerking als voor vergelijkingen. Bij meer ingewikkelde vormen kan een rekenmachine of software ingeschakeld worden. Als het verband gelegd wordt met eerstegraadsfunctie(s), kan de oplossing van de ongelijkheid grafisch afgelezen worden of bepaald worden door het vergelijken van de onderlinge ligging van twee eerstegraadsfuncties (bijv. welk is het gebied waarin de functie bepaald door het rechterlid groter is dan deze bepaald door het linkerlid).

De leerlingen moeten de oplossing symbolisch kunnen noteren. Dit betekent de oplossing schrijven met behulp van een interval of een unie van intervallen. Dit kan ondersteund worden vanuit het grafisch aanduiden van de oplossingsverzameling. Het biedt ook een gelegenheid waarbij leerlingen het voordeel kunnen waarderen van een beknopte wiskundige schrijfwijze.

3 Algebraïsch rekenen

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	**Et**

g38	B	Rekenregels toepassen bij het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen van eentermen en veeltermen in één veranderlijke met graad ten hoogste 3.
g39	B	Een veelterm ontbinden in factoren door gebruik te maken van – de distributieve eigenschap; – merkwaardige producten; – groepering van termen.

Pedagogisch-didactische wenken

38 In de eerste graad hebben de leerlingen een-, twee- en drietermen leren optellen en vermenigvuldigen. Dit rekenen zou door de leerlingen moeten verworven zijn. Toch valt te verwachten dat ze niet over de gestelde algebraïsche rekenvaardigheid beschikken. Voor zover de realisatie van andere doelstellingen hierdoor niet gehypothekeerd wordt, kan hier nog *remediërend* gewerkt worden. Dit betekent bijvoorbeeld dat leerlingen gedifferentieerd en gericht oefeningen kunnen verwerken. Hier ligt een belangrijke kans om de leerlingen gestuurd, maar toch zelfverantwoordelijk aan het werk te laten (bijv. via meerdere, over het gehele schooljaar gespreide, maar korte herhalingstaken), eventueel na een korte herhaling tijdens de lestijden. Wel moet men zich realiseren dat met de mogelijkheden die rekenmachines en computer zullen hebben in verband met het algebraïsch rekenen, de impact van het manueel algebraïsch rekenen kleiner wordt. Hiermee zou een ernstig obstakel voor de leerlingen kunnen weggenomen worden.

39 Een aantal *merkwaardige producten* en het *ontbinden in factoren* zijn behandeld in het tweede leerjaar van de eerste graad. Dit kan zo nodig zeer kort herhaald worden (bijv. na een diagnostische toets, met gespreide, korte herhalingstaken gericht op vaardigheidstraining). Er komen echter geen nieuwe vormen bij. Dus ook de beperkingen uit de eerste graad (ten hoogste twee veranderlijken, eenvoudige vormen) blijven van kracht. Als verantwoording kan aangevoerd worden dat de leerlingen dit in de praktijk maar zullen gebruiken bij het zoeken van nulpunten van veeltermfuncties in één veranderlijke. Te ingewikkelde vormen zullen het inzicht en de vaardigheid eerder bemoeilijken. Er dient dus voorrang gegeven te worden aan het vlot beheersen van de basisvormen. De beschikbare tijd voor dit onderwerp is overigens zeer beperkt!

Nu de wortelvormen gekend zijn kan aandacht besteed worden aan vormen zoals $x^2 - 3$, die in $\mathbb{R}$ wel ontbindbaar zijn en in $\mathbb{Q}$ niet en die vorig jaar niet behandeld werden.

Het invoeren van de formule voor $(a+b)^3$ en aanverwante vormen wordt uitgesteld.

5.4.3 REËLE FUNCTIES EN ANALYTISCHE MEETKUNDE

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **reële functies en analytische meetkunde** worden ca. **35** lestijden besteed

algebraïsche verbanden expliciteren	ca. 10 lestijden
eerstegraadsfuncties	ca. 15 lestijden
stelsels van twee vergelijkingen in twee onbekenden	ca. 10 lestijden

Pedagogisch-didactische wenken

Het onderdeel *Reële functies* zal de volgende jaren studieonderwerp zijn voor de leerlingen. Het verder afliggend doel is het verloop van dergelijke functies te begrijpen, te beschrijven, te beheren, te gebruiken en toe te passen in praktische situaties. In dit leerjaar komen als hoofddoel de eerstegraadsfuncties aan bod. Het opstellen van de algemene vergelijking van een rechte wordt hierin geïntegreerd aangebracht.

Bij het begin van het onderdeel *Reële functies* is het zinvol enkele voorbeelden te onderzoeken van relaties tussen grootheden. Daarbij wordt uitgegaan van situaties die betekenisvol zijn voor de leerlingen en waarin de elementen in een wiskundig verband staan. Dat kunnen situaties uit hun leefwereld zijn, maatschappelijk relevante situaties of elementen uit hun basiskennis wiskunde of wetenschappen. Het verband tussen twee of meer grootheden wordt hierbij wiskundig geëxpliciteerd, bijv. de afgelegde weg bij eenzelfde snelheid is recht evenredig met de tijd; de rente is het product van kapitaal, rentevoet en tijd.

Het is evenwel gebruikelijk die verbanden niet slechts woordelijk te expliciteren. Ze kunnen omschreven worden met een formule (bijv. $I = K \cdot i \cdot t$; $S = \pi r^2$). Of aan de hand van een tabel van overeenkomstige waarden (bijv. de rente van eenzelfde kapitaal bij verschillende rentevoeten, de resultaten van een meting of experiment). Of door een grafische voorstelling ervan (bij een artikel in de krant valt vaak eerst de grafiek op en de legende, dan eventueel een tabel met precieze waarden, daarna volgt het lezen van het verhaal).

Leerlingen moeten in de inleiding op het onderdeel *Reële functies* leren omgaan met deze presentatievormen. De didactische aanpak kan verschillen naargelang de leerlingengroep. Zo kan bijv. in de aanvangsfase aandacht besteed worden aan elke mogelijkheid afzonderlijk, daarna aan de samenhang tussen de verschillende elementen. Het is zinvol de verschillende voorstellingen in een geïntegreerde aanpak ter sprake te brengen, bijv. uitgaande van enkele goed gekozen situaties zowel het tabuleren, het omzetten in een formule of de grafiek bespreken.

De leerlingen zijn uit de eerste graad al vertrouwd met enkele belangrijke elementaire verbanden, zoals die tussen recht evenredige grootheden of omgekeerd evenredige grootheden. Deze kunnen in de aanloop zeker hernomen worden. Andere mogelijkheden zijn een verband van de eerste graad (alhoewel die verderop expliciet aan bod komen) en kwadratische verbanden (bijv. het verband tussen de oppervlakte van een cirkel en de straal). Ook kunnen verbanden aan bod komen met een meervoudig voorschrift of met meer dan twee variabelen. De leerlingen beschikken evenwel nog niet over een uitgebreid algebra- of analysearsenaal om deze verbanden te bestuderen. De tweedegraadsfuncties komen expliciet aan bod in het tweede leerjaar van de tweede graad! In de aanloopfase is het zeker niet de bedoeling onderhands ingewikkelde algebraïsche uitdrukkingen ter sprake te brengen. De bestudeerde verbanden zullen dus relatief eenvoudig blijven. Het inzicht in het begrip functie kan versterkt worden door kort in te gaan op het verschil tussen een willekeurige relatie en een functioneel verband.

Leerlingen moeten bij een aantal situaties, geformuleerd in woorden, de verschillende voorstellingswijzen kunnen gebruiken: een tabel van overeenkomstige waarden maken; een grafiek tekenen en daarbij het gekozen assenstelsel accuraat kiezen; een voorschrift of formule opstellen. Ze moeten vlot van de ene vorm naar de andere overstappen als dat mogelijk en wenselijk is.

Bij de exploratie van grafieken van functies, het bekijken van een bijbehorende tabel functiewaarden kan de grafische rekenmachine of de computer gebruikt worden. Dit is dan een gelegenheid om de doelstellingen in verband met ICT-hulpmiddelen na te streven.

In de wiskunde is het gebruikelijk in de meer geabstraheerde formules de letters x en y te gebruiken. Om te vermijden dat dit een al te stereotiep gebruik zou worden, is het zinvol bij de ontwikkeling van het functiebegrip en bij de inoefening letters te gebruiken die aangepast zijn aan de situatie (bijv. grootheden uit de techniek worden best met hun gebruikelijk symbool geschreven).

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f40	B	Een gegeven tabel interpreteren, o.m. – bepaalde waarden aflezen; – extreme waarden aflezen; – het globale verloop (constant, stijgen, dalen) bespreken.	18
f41	B	Een gegeven grafiek interpreteren, o.m. – bepaalde waarden aflezen; – extreme waarden aflezen; – het globale verloop (constant, stijgen, dalen) bespreken.	18
f42	B	In een gegeven formule – de waarde van één veranderlijke berekenen bij vervanging van de andere veranderlijke(n) door een getal; – het effect aangeven van de verandering van één veranderlijke op de andere.	21 20
f43	B	Het verband tussen twee veranderlijke grootheden weergeven door middel van – een tabel; – een grafiek in een opportuun gekozen assenstelsel; – een formule.	16 17 20
f44	B	De samenhang tussen verwoording, tabel, grafiek en formule uitleggen.	22
f45	B	De onderlinge ligging van twee grafieken vergelijken en interpreteren.	19

Pedagogisch-didactische wenken

40 Het is zinvol bij de aanvang van dit onderdeel enkele concrete voorbeelden te bespreken van tabellen en grafieken over situaties uit de ‘leefwereld’ (bijv. uit kranten of tijdschriften, uit informatiebrochures, uit technische handleidingen). Het lezen en interpreteren ervan is een belangrijke vaardigheid.

Veel informatie, ook binnen technische toepassingen, wordt vergezeld van tabellen bijv. over afmetingen, resultaten van een meetproces, omzetting van verhoudingen, prijsberekeningen, …. Vanuit de eerste graad zijn leerlingen vertrouwd met het aflezen van tabellen van eenvoudige relaties, zoals tussen twee recht evenredige grootheden. Nu kunnen meer algemene verbanden aan bod komen.

Een eerste stap in het begrijpen van de informatie in een tabel is het aflezen van de grootheden, het aflezen van waarden en het opzoeken van bijzondere waarden zoals extreme waarden. Ook over het globale ‘verloop’ van de waarden uit een tabel moeten leerlingen een indruk kunnen geven. Gaat het bijvoorbeeld om een stijgende, een dalende, een constante trend? Is er informatie af te lezen in verband met gelijkmatige toename of is er een maat te bepalen voor de snelheid van toe- of afname?

Belangrijk is dat leerlingen de afgelezen getallen terug in de juiste context kunnen plaatsen, bijv. wat is de betekenis van een extreme waarde of van een stijgende trend in deze situatie.

Leerlingen moeten kritisch leren omgaan met de geboden informatie en de veralgemening ervan. Een tabel biedt maar beperkte informatie over bepaalde waarden. Hieruit een vast verband afleiden is moeilijk. De kennis van bijkomende waarden kan het vermoeden over het beschreven verband wijzigen.

41 Een grafiek biedt heel wat zintuiglijke en overzichtelijke informatie. Meestal vallen belangrijke waarden zoals extreme waarden onmiddellijk op. Nulwaarden kunnen meestal snel afgelezen worden. En toename of afname van de beeldwaarden is verbonden met het stijgen of dalen van de grafiek. Bij het aflezen wordt soms informatie over het hoofd gezien, bijvoorbeeld welke zijn de effectieve grootheden die uitgezet werden en met welke eenheden op de assen. Zo kan de keuze van de eenheid (schaal) een andere indruk geven over dezelfde informatie (bijv. met betrekking tot het stijgen of dalen, de schijnbare helling van de grafiek). Het vergelijken van grafieken van eenzelfde fenomeen uit verschillende kranten is een voor de hand liggende instap, die heel wat inzicht kan bijbrengen.

Anderzijds moeten leerlingen beseffen dat bij grafische informatie vaak aan nauwkeurigheid van de waarden moet ingeboet worden, omdat bij het opmeten van een 'beeldwaarde' onvermijdelijk meetfouten gemaakt worden. Hieruit blijkt dan weer dat een combinatie van zowel tabel als grafiek zinvol is om de informatie te versterken. Het precies omschrijven van het verband met een voorschrift of formule is een andere mogelijkheid om preciezere informatie te geven.

Ook ten aanzien van de informatie in een grafiek moeten leerlingen leren kritisch staan. Ook een grafiek kan maar gegeven zijn voor een bepaald deel. Het verloop kan buiten het beschikbare deel totaal anders zijn. Extrapolatie is mogelijk, maar kan helemaal niet beantwoorden aan de rest van het verloop of aan het reële verloop.

42 Uit het voorgaande onderzoek van tabellen en grafieken blijkt dat ze zeer zinvolle informatie kunnen geven. Om een verband tussen grootheden precies te beschrijven zal een formule of een voorschrift nochtans de meeste informatie bieden. Op grond daarvan kunnen overeenkomstige waarden berekend worden en kan een grafiek getekend worden.

Voor het praktisch gebruik in de wiskunde en in andere vakken (wetenschappen, technische vakken zoals mechanica, elektriciteit) moeten de leerlingen beschikken over de techniek om formules te gebruiken om waarden te berekenen of om bepaalde veranderlijken te expliciteren. Als een veranderlijke geschreven is in functie van andere veranderlijken, kan die berekend worden als aan de andere een waarde wordt toegekend. Het gaat om het berekenen van de 'getalwaarde', zoals leerlingen dat voor veeltermen hebben gedaan in het tweede leerjaar. Als daarentegen een veranderlijke in een formule niet geëxpliciteerd is, dan kan op verschillende wijzen gewerkt worden. Enerzijds kan men de 'gevraagde' veranderlijke door het omvormen van formules toch nog expliciet schrijven in functie van de andere en de getalwaarde berekenen. Met de andere veranderlijken wordt dan gerekend zoals met letters. Toch is deze vorm van letterrekenen voor veel leerlingen moeilijk. Vandaar dat dit best wordt ingeschakeld in betekenisvolle situaties, o.m. bij het oplossen van problemen. Het omwerken van zomaar een uitdrukking met letters wordt hierbij vermeden. De context kan hier een signaalfunctie hebben voor flagrante fouten. In wetenschappen en de technische vakken zullen leerlingen ook nog moeten leren met de juiste eenheden te rekenen. Een andere mogelijkheid is de gekende waarden invullen en de overgebleven veranderlijke oplossen, bijv. met technieken van het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen (overbrengen van een term, overbrengen van een factor), die de leerlingen kennen vanuit de eerste graad.

Het uitdrukken van een verband in een formule is een gelegenheid om de leerlingen te laten inzien dat de ene veranderlijke in functie van de andere verandert. Dit leidt tot begrippen zoals onafhankelijke en afhankelijke veranderlijke. Als het verband tussen twee grootheden geëxpliciteerd is in een formule, dan kan onderzocht worden welk effect er is op een van de veranderlijken als de andere gewijzigd wordt, bijv. wat is het effect van een vermenigvuldiging met 5 (bijv. ook een vermenigvuldiging met factor 5, met factor $\frac{1}{5}$, met factor 25, …).

Ook hier worden de uitdrukkingen vrij eenvoudig gehouden, bijv. vormen zoals $y = a$, $y = ax$, $y = ax + b$, $ax + by = c$, $y = ax^2$, $y^2 = x$, $x \cdot y = a$. Voor praktische toepassingen kunnen voorschriften ook algemeen genoteerd worden in hun impliciete vorm bijv. $f(x, y) = 0$, met $f(x, y)$ een algebraïsche uitdrukking in x en y.

43 De leerlingen moeten zelf een tabel kunnen opstellen, een grafiek tekenen, een verband in een formule vertolken. Om dit zinvol te maken wordt best aangesloten bij situaties die de leerlingen kennen, bijv. uit de technische toepassingen.

De leerlingen moeten eigenhandig een tabel kunnen opstellen en een grafiek kunnen tekenen. Dit vraagt enige inoefening. Bij de grafische voorstelling zal aandacht besteed worden aan de keuze van het assenstelsel en de eenheden op de assen, bijv. in functie van het aangeven van extreme waarden, nulwaarden enz. Mogelijke oefeningen zijn het uitvergroten van een deel van een grafiek of het kiezen van de eenheden om een bepaald deel van een grafiek te manipuleren (bijv. het benadrukken van een helling in functie van het effect dat men met de grafiek wil bereiken). Dit zijn vaardigheden die nodig zijn bij het gebruik van het scherm op een grafische rekenmachine of een computer. Naast het manueel opmaken van een tabel of een grafiek kan aandacht besteed worden aan het gebruik van een rekenmachine of software. De routine die ze kunnen verwerven in deze relatief eenvoudige situaties kan hen ondersteunen bij meer ingewikkelde functies.

Bij het zelf tekenen van een grafiek zullen de leerlingen voldoende zorg besteden aan het 'vloeiend verloop' van de grafiek.

44 Het is te verwachten dat leerlingen een beter inzicht in de samenhang tussen tabel, grafiek, voorschrift en situatie zullen verwerven als ze een aantal oefeningen gemaakt hebben op het overbrengen van de informatie van de ene voorstelling naar een andere. Het doel is vlot te kunnen overgaan van een vorm van voorstelling naar een andere. Leerlingen moeten voorstellingen van eenzelfde situatie met elkaar kunnen associëren.

De overgang van 'tabel' of 'grafiek' naar 'voorschrift' is een gelegenheid om de leerlingen kritisch te leren omgaan met de besluitvorming (bijv. een tabel biedt maar informatie over een beperkt aantal koppels van de functie). Het omzetten van een situatie (verhaal, tekst) naar een formeel wiskundig voorschrift sluit nauw aan bij het doel van mathematiseren en/of modelleren van de leefwereld. Uiteindelijk zullen de leerlingen aan de vergelijking (of het voorschrift) de grafiek van een functie herkennen.

45 Bij het interpreteren van grafieken zal aandacht besteed worden aan het vergelijken van verschillende grafieken van eenzelfde verband. Daaruit zou een kritische houding moeten volgen ten aanzien van de keuze van assen, eenheden, kijkvenster, …. Anderzijds moeten leerlingen grafieken van verschillende verbanden met elkaar kunnen vergelijken (bijv. welk systeem van betalen kost het meest?). Zo kan de vraag naar de gelijkheid van twee functiewaarden voor een bepaalde x-waarde leiden tot het algebraïsch berekenen van de coördinaat van het snijpunt van de twee bijbehorende grafieken (bijv. met gelijkstelling van de voorschriften), tot het grafisch interpreteren ervan en tot het oplossen van een stelsel.

Bijzondere aandacht kan besteed worden aan de ligging van een grafiek ten opzichte van bepaalde 'niveaulijnen', in het bijzonder de nullijn.

2 Eerstegraadsfuncties

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f46	B	De definitie van een eerstegraadsfunctie geven.	
f47	B	De grafiek van een eerstegraadsfunctie tekenen.	23
f48	B	Het nulpunt van een eerstegraadsfunctie bepalen en grafisch interpreteren.	24
f49	B	De grafische betekenis van de coëfficiënten m en q in het voorschrift $f(x) = mx + q$ van de functie uitleggen.	24
f50	B	Het verband leggen tussen de algemene vergelijking van een rechte $ax + by + c = 0$ (met $a \neq 0$ en $b \neq 0$) en de verwante eerstegraadsfunctie.	25
f51	B	Een vergelijking opstellen van een rechte als ze gegeven wordt door – een punt en de richtingscoëfficiënt; – twee punten.	25
f52	B	Uit de grafiek van een eerstegraadsfunctie het voorschrift bepalen.	
f53	B	De tekenverandering van een eerstegraadsfunctie onderzoeken en interpreteren op de grafiek.	24
f54	U	Een ongelijkheid van de eerste graad met één onbekende oplossen en het verband leggen tussen die oplossing en een passende grafische voorstelling.	
f55	B	Vraagstukken oplossen waarbij – het verband beschreven wordt door een eerstegraadsfunctie; – de vergelijking van een rechte moet opgesteld worden.	

Pedagogisch-didactische wenken

46 Bij de voorbeelden in de inleiding op reële functies worden de leerlingen geconfronteerd met de vier mogelijkheden waarmee een functie kan bepaald worden. Daaruit blijkt dat het voorschrift het middel is om een functie te bepalen. De grafiek, voor zover er vanuit gegaan wordt dat ze volledig gekend is op grond

van het getekende deel, vervult die rol ook. Een tabel van functiewaarden kan daartoe ook gebruikt worden, al geeft die relatief beperkte informatie over het geheel van de functie.

Leerlingen moeten inzien dat een verband wordt beschreven met een functievoorschrift van de eerste graad, als de grafiek ervan een rechte is. Omgekeerd is de grafiek van een functie met een voorschrift van de eerste graad een rechte. Dit proces moet leiden tot een hanteerbare definitie van eerstegraadsfunctie met behulp van het functievoorschrift.

Er moet gelet worden op een correct taalgebruik: een punt ligt op een rechte, terwijl een coördinaat een oplossing is van een vergelijking van de rechte; een functie f met voorschrift $f(x) = mx + q$ heeft een grafiek, die grafiek heeft in een coördinatenstelsel een vergelijking $y = mx + q$.

47 De leerlingen hebben in de eerste graad kennis gemaakt met een grafische voorstelling van het verband tussen recht evenredige grootheden. De gevonden coördinatenkoppels liggen op een ‘rechte’. Nu de reële getallen gekend zijn, kan deze voorkennis een zinvol uitgangspunt zijn om de grafiek van eerstegraadsfuncties op te bouwen.

Deze doelstelling moet ruim geïnterpreteerd worden. Leerlingen moeten een idee hebben van de punt voor punt constructie van een grafiek. Zo kunnen ze bijv. een tabel van functiewaarden opstellen, de bijbehorende punten tekenen, nog tussenliggende koppels berekenen, om uiteindelijk vast te stellen dat de grafiek een rechte is. De grafische mogelijkheden van rekenmachine en computer kunnen hier het beeld van een effectieve punt voor punt constructie versterken.

Vanuit de meetkunde weten leerlingen dat een rechte kan bepaald worden met een *minimum* aan gegevens, bijv. twee punten of een punt en een rechte waaraan ze evenwijdig is. Analytisch vertaalt zich dat in een meer praktische werkwijze om het functievoorschrift op te stellen, met name op grond van de coördinaten van twee punten of van de coördinaat van een punt en de richtingscoëfficiënt van de rechte. Weliswaar kan dit maar, omdat men ‘weet’ dat de grafiek van een eerstegraadsfunctie een rechte is. De verantwoording daarvan komt aan bod bij de verwerving van doelstelling f49. De behandeling daarvan kan uiteraard hier geïntegreerd worden. Verwijzend naar enkele meer algemene voorbeelden uit de inleiding op functies moeten ze kunnen inzien dat slechts eerstegraadsfuncties een rechte als grafiek hebben.

De grafiek van een eerstegraadsfunctie is een rechte. Het voorschrift van de functie kan gekoppeld worden aan de algemene vergelijking van die rechte (zie f50). Bij de ontwikkeling van de eerstegraadsfuncties kan dus meteen een deel van de ‘analytische meetkunde’ opgebouwd worden.

48 De gekende techniek van het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen kan hier gekoppeld worden aan het bepalen van het nulpunt van de overeenkomstige functie of aan het bepalen van het snijpunt van de rechte met de eerste coördinaatas (of de grafische interpretatie).

De leerlingen worden op deze wijze geconfronteerd met een eerste vorm van benadering van een nulpunt. Ze kunnen hier een voordeel ervaren van het werken met functievoorschriften en een algebraïsch algoritme voor het ‘exact’ oplossen van vergelijkingen. Verder in hun studieloopbaan zullen ze misschien geconfronteerd worden met situaties waarin een dergelijke werkwijze niet beschikbaar is en zullen ze hiervoor andere benaderingsmethoden gebruiken. Het grafisch benaderen van een oplossing is een eerste stap.

49 Op basis van voorbeelden over recht evenredige grootheden kan het verband geëxpliciteerd worden tussen formule, grafiek en de functie met voorschrift $f(x) = mx$. Dat de grafiek een rechte is kan o.m. afgeleid worden met gelijkvormigheid van driehoeken (cf. hoek met de eerste coördinaatas).

Snel blijkt dat m een idee geeft over de *helling* van de rechte en bijgevolg over de richting van de rechte. De betekenis van de term richtingscoëfficiënt wordt hierdoor duidelijk. Hier kan al een verband gelegd worden met het begrip *differentiequotiënt* (quotiënt van de toename van de afhankelijke veranderlijke en de toename van de onafhankelijke veranderlijke). De richtingscoëfficiënt kan in verband gebracht worden met het stijgen of dalen van de grafiek.

Bij de functie met voorschrift $f(x) = mx + q$ gaat de evenredigheid tussen x-waarden en de bijbehorende functiewaarden verloren. Evenredigheid is er wel tussen de toenamen van x en de bijbehorende toenamen van de functiewaarden (cf. differentiequotiënt). De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = mx + q$ is de grafiek van $f(x) = mx$, die onderworpen werd aan een *verschuiving* volgens de tweede coördinaatas waarvan de grootte en de zin bepaald worden door q. Hieruit kan meteen volgen dat evenwijdige rechten eenzelfde richtingscoëfficiënt hebben.

50 De grafiek van een eerstegraadsfunctie is een rechte. De vergelijking is van de vorm $y = mx + q$. Die expliciete vorm kan omgewerkt worden tot de meer algemene vergelijking $ax + by + c = 0$. De relatie tussen de coëfficiënten van de verschillende vormen van de vergelijking kan gelegd worden. Omgekeerd kan de algemene vorm van de vergelijking van de eerste graad in 2 onbekenden omgewerkt worden tot de expliciete vorm, op voorwaarde dat b ≠ 0. De vergelijking $ax + by + c = 0$ kan dan omgevormd worden tot $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Hieruit is af te leiden dat $-\frac{a}{b}$ de richtingscoëfficiënt van deze rechte is. Met deze vorm kan een functie van de eerste graad bepaald worden. Veeleer dan dit als zoveelste formule te laten memoriseren, kan dit als werkwijze aangeleerd worden. Als in de algemene vergelijking b wel nul is (en a ≠ 0), dan stelt ze een rechte voor evenwijdig aan de y-as. Deze vorm is niet herleidbaar tot een functievoorschrift en kan als tegenvoorbeeld aan bod komen.

51 De leerlingen hebben dit verband tussen de coördinaatgetallen (x, y) van de punten van een rechte al onderzocht bij de grafiek van een eerstegraadsfunctie. Hier worden basisformules opgesteld voor rechten die aan bepaalde voorwaarden voldoen, enerzijds door een gegeven punt en met gegeven richtingscoëfficiënt en anderzijds door twee gegeven punten. Formules die aan bod kunnen komen zijn: $y - y_0 = m(x - x_0)$ en $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Voor de tweede vorm bestaat het alternatief van het berekenen van de richtingscoëfficiënt van de rechte met behulp van de coördinaten van de twee gegeven punten met gebruik van de formule $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, waarna de eerste formule wordt toegepast.

Het opstellen van vergelijkingen van rechten moet ingeoefend worden met vele concrete voorbeelden en toepassingen. Zo kan bij het opstellen van een vergelijking van een rechte die aan bepaalde voorwaarden voldoet, al gewerkt worden met de methode van onbepaalde coëfficiënten. Ook het probleem van evenwijdige rechten kan aan bod komen. Als de twee gegeven punten op een rechte liggen evenwijdig aan één van de coördinaatassen wordt spontaan het probleem van de richtingscoëfficiënt gesteld.

52 Een eenvoudige instap zou kunnen zijn het associëren van gegeven grafieken aan een reeks gegeven voorschriften. Daarbij komt het eerder aan op het verifiëren, dan op het zelf opzoeken van de elementen.

Als de grafiek van een eerstegraadsfunctie gegeven is, kan men soms de waarden van m en q van het functievoorschrift grafisch aflezen (de toename van f(x) bij een toename van x met 1 of de verhouding van de toename van f(x) tot de toename van x voor de richtingscoëfficiënt m, de grootte van de afsnijding op de y-as voor q).

Een andere mogelijkheid om het functievoorschrift te bepalen is het aflezen van twee stellen coördinaatgetallen zodat de vergelijking van de rechte door die twee punten kan opgesteld worden. Explicitering van de afhankelijke veranderlijke geeft het functievoorschrift. Voor het opstellen van de vergelijking kan gekozen worden voor een werkwijze met behulp van onbepaalde coëfficiënten.

Leerlingen moeten in beide gevallen bij het aflezen van coördinaatgetallen oog leren hebben voor ‘nauwkeurigheid’. Zo zullen ze uitkijken naar punten met een stel gehele coördinaten of met eenvoudige coördinaten zoals die van het nulpunt. Dit is niet altijd mogelijk, wat de beperktheid van de procedure aangeeft.

Als toepassingen kunnen hier oefeningen aangeboden worden op het opzoeken van het voorschrift van constante functies en van functies met een meervoudig voorschrift.

54 *Uitbreiding*

Het oplossen van *ongelijkheden* van de eerste graad met één onbekende kan hier verbonden worden met de tekenverandering van de bijbehorende eerstegraadsfunctie.

Een verdere toepassing is het oplossen van een stelsel van ongelijkheden van de eerste graad.

In beide gevallen wordt het leerproces best omkaderd vanuit realistische situaties. Interpretatie van de oplossing is dan wel noodzakelijk.

55 Als toepassing worden enkele vraagstukken behandeld die aanleiding geven tot een beschrijving met een functie van de eerste graad met twee onbekenden. Hierbij komt het omzetten in wiskundige vorm (het mathematiseren) door geschikte keuze van de onbekenden expliciet aan bod.

In deze toepassingssituaties kunnen voor de berekeningen van de karakteristieken van de eerstegraadsfuncties ICT-hulpmiddelen gebruikt worden, bijv. de ingebouwde oplosser voor nulpunten, het grafisch aflezen van nulpunten (cf. vergelijkingen), teken (cf. ongelijkheden), snijpunten of onderlinge ligging van twee functies (cf. rechter- en linkerlid van gelijkheid of ongelijkheid). Het is evident dat in eenvoudige situaties het manueel rekenen zinvol blijft.

Met behulp van vergelijkingen kunnen een aantal meetkundige problemen opgelost worden. Daartoe kan men een aantal gekende meetkundige situaties beschrijven met behulp van coördinaten of vergelijkingen, bijv. de vergelijking van een zwaartelijn in een driehoek opstellen.

3 Stelsels van vergelijkingen

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f56	B	Bij een gegeven verbale situatie een stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden opstellen.	25
f57	B	Een stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden algebraïsch oplossen.	25
f58	B	Vraagstukken oplossen door gebruik te maken van stelsels van vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.	25

Pedagogisch-didactische wenken

56 De leerlingen beschikken al over het model vergelijking om bepaalde situaties tussen twee veranderlijke grootheden te mathematiseren. Een aantal probleemsituaties leidt tot een systeem van twee (of meer) dergelijke vergelijkingen. Het aanpakken van stelsels vanuit voldoende vraagstukken moet waarborgen dat leerlingen vertrouwd geraken met deze nieuwe vorm van modellering.

Stelsels van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden kunnen geassocieerd worden met het bepalen van het snijpunt van twee rechten. Dit leidt tot het grafisch aflezen van de coördinaat van het snijpunt en tot algebraïsche methoden om dit nauwkeuriger te bepalen. In de praktijk komen stelsels voor in allerlei situaties waar het verband met de meetkundige situatie minder duidelijk is. De moeilijkheid voor leerlingen is daarbij niet zozeer de oplossingstechniek zelf, dan wel het kiezen van de onbekenden, het opstellen van de vergelijkingen aan de hand van de beschreven situatie. Daarom is het zinvol hierop enkele afzonderlijke oefeningen te voorzien, zonder dat noodzakelijk onmiddellijk de oplossing wordt berekend.

57 De vergelijkingen van een stelsel kunnen in een assenstelsel voorgesteld worden als rechten (bijv. met ICT-hulpmiddelen). De oplossing van het stelsel kan grafisch afgelezen worden. Zo nodig kan een nauwkeurige oplossing berekend worden door gebruik van de daartoe geëigende middelen van de grafische rekenmachine of computer (bijv. met intersect).

Soms is het zinvol de oplossing van een stelsel zo exact mogelijk te bepalen. Daartoe kunnen als algebraische oplossingsmethoden de gelijkstellingsmethode, de combinatie- en de substitutiemethode aangeleerd worden. Als basis kan men zich eventueel tot één methode beperken. De inoefening kan dus beperkt worden. Als geopteerd wordt voor het aanbrengen van slechts één enkele algebraïsche methode kan gekozen worden voor de gelijkstellingsmethode, omdat ze het meest aangepast is voor het werken met functievoorschriften. Daartegenover staat dat de combinatiemethode interessant is voor sommige toepassingen en gemakkelijk veralgemeenbaar is (onder meer bij ICT-gebruik).

Als men wil dat de leerlingen zelf een adequate keuze kunnen maken tussen de verschillende methoden is een brede inoefening wel noodzakelijk. Toch moet dit afgewogen worden tegen de beschikbare lestijden.

Met ICT-hulpmiddelen kan deze grafische oplossingswijze eventueel als controlemiddel gehanteerd worden bij andere oplossingsmethoden.

58 Bij het oplossen van vraagstukken op stelsels krijgen de leerlingen weer kansen om probleemoplossende

vaardigheden te verwerven. Ze moeten leren een beschreven situatie te mathematiseren. Bij het analytisch oplossen van een probleem ondervinden de leerlingen daarbij 'nieuwe' moeilijkheden. Ze moeten het verband tussen gegevens en tussen gegevens en gevraagde leren analytisch te omschrijven, bijv. het kiezen van de onbekenden en het opstellen van de verschillende vergelijkingen. De leerlingen hebben hiermee vaak meer problemen dan met het uitvoeren van rekentechnieken voor het berekenen van de oplossing van het stelsel. Het gebruik van ICT-hulpmiddelen voor het effectieve rekenwerk kan hier meer tijd vrij maken voor aandacht aan dit mathematiseringsproces.

5.5 Leerplan b - tweede leerjaar

Dit leerplan is voorzien voor 4 of 5 wekelijkse lestijden wiskunde.

Als vijf wekelijkse lestijden wiskunde worden voorzien (of door het fundamenteel gedeelte, of door een aanvulling vanuit het complementaire gedeelte, cf. de pedagogische aanbevelingen bij de lessentabel), dan worden de doelstellingen van de onderdelen ***5.5.2.2 De functie met voorschrift $f(x) = a \sin[b(x + c)] + d$*** en ***5.5.3.1 Complexe getallen*** *basis*doelstellingen.

5.5.1 MEETKUNDE

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **meetkunde** worden ca. **28** lestijden besteed

de cirkel	ca. 14 lestijden
driehoeksmeting	ca. 14 lestijden

1 De cirkel

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m1	B	Eigenschappen in verband met straal, koorde en apothema onderzoeken, bewijzen en gebruiken.	26
m2	B	De onderlinge ligging van een cirkel en een rechte onderzoeken en de definitie van raaklijn formuleren.	
m3	B	Eigenschappen in verband met middelpuntshoeken en omtrekshoeken onderzoeken, bewijzen en gebruiken.	
m4	B	Meetkundige constructies uitvoeren en verklaren, zoals: – de raaklijn in een punt van een cirkel; – raaklijnen uit een punt aan een cirkel; – de ingeschreven cirkel van een driehoek; – de omgeschreven cirkel van een driehoek.	26
m5	U	Eigenschappen van regelmatige veelhoeken onderzoeken.	
m6	B	Een vergelijking opstellen van een cirkel met gegeven middelpunt en straal.	
m7	B	Het middelpunt en de straal bepalen van een cirkel waarvan de vergelijking gegeven is.	

Pedagogisch-didactische wenken

In dit deel meetkunde blijft de essentie het *onderzoeken van meetkundige figuren en hun eigenschappen*. Het gebruik van een grafische rekenmachine of software, die de analyse van dergelijke figuren toelaat, is daarbij aangewezen. De vraag daarbij is: waarom gebeurt, wat we zien op het scherm, op deze wijze.

Met het onderdeel cirkel wordt voor de meeste leerlingen het onderdeel (vlakke) meetkunde afgerond. Uiteraard zal de meetkundekennis van de vorige jaren, bijv. congruentie, gelijkvormigheid, Pythagoras, betrokken worden bij de verwerking en integratie van dit onderdeel. Voor het toepassen van de eigenschappen moet zowel gezocht worden in het vlak als in de ruimte.

1 Leerlingen zijn vanuit hun vooropleiding vertrouwd met het *zelf onderzoeken* van eigenschappen. De eigenschappen die hier bedoeld worden zijn relatief eenvoudig en kunnen door middel van een goede didactische aanpak hoofdzakelijk via zelf onderzoeken gevonden en verklaard worden.

Eigenschappen die in aanmerking komen zijn o.m.: de middelloodlijn van een koorde en omgekeerd, het verband tussen de lengten van apothema's en koorden, de symmetrie bepaald door een middellijn.

2 Het vergelijken van de afstand van het middelpunt van de cirkel tot een rechte en de straal van de cirkel leidt tot informatie over de onderlinge ligging van een rechte en een cirkel. Dat onderzoek leidt tot het begrip raaklijn aan de cirkel. Het begrip 'raken' komt hier voor het eerst specifiek aan bod. Omdat dit een belangrijk wiskundig begrip is, waarmee de leerlingen nog meermaals geconfronteerd zullen worden, moeten de 'kenmerkende eigenschappen' onderzocht en geformuleerd worden.

3 De relatie tussen middelpuntshoek en omtrekshoek op eenzelfde koorde (of boog) kan onderzocht en verklaard worden. De toepassingen zullen in de eerste plaats gericht zijn op een praktisch gebruik van de eigenschappen in berekeningen van hoeken (bijv. omtrekshoek op een middellijn).

Uitbreiding

Als toepassing kunnen omtrekshoeken bepaald worden, waarbij een been raaklijn is aan de cirkel.

Een andere toepassing is de bespreking van de begrippen binnen- en buitenomtrekshoek en de berekening van hun grootte in functie van middelpuntshoeken.

4 De constructies van cirkels die aan gegeven voorwaarden voldoen en van raaklijnen aan cirkels moeten *teken- en denkproblemen* zijn. De leerlingen moeten een verklaring kunnen geven over de gebruikte technieken en procedures en waarom die een antwoord bieden op de gestelde problematiek.

De constructie van de ingeschreven cirkel en de omgeschreven cirkel van een driehoek is een aanleiding om de eigenschap van het snijden in één punt van respectievelijk de bissectrices en de middelloodlijnen van een driehoek aan te tonen.

Uitbreiding

Als redeneerproblemen kunnen de constructies van de gemeenschappelijke raaklijnen aan twee cirkels gegeven worden.

5 *Uitbreiding*

Met behulp van eigenschappen in een cirkel, het verband tussen middelpuntshoeken en koorden, de stelling van Pythagoras, vierkantswortels en de driehoeksmeting worden enkele voorbeelden behandeld van regelmatige veelhoeken, met o.m. de berekening van de zijde in functie van de straal van de omgeschreven cirkel.

Als toepassing kan de omtrek en de oppervlakte van een regelmatige veelhoek berekend worden. Uit de vergelijking met de omtrek of de oppervlakte van de cirkel kan een benadering afgeleid worden voor het reëel getal π (cf. het gebruik van tabellen op een rekenmachine).

6 De problematiek van de vergelijking van de cirkel kan als algemeen probleem gesteld worden. De leerlingen kennen de definitie van de cirkel en beschikken met de formule voor de afstand tussen twee punten over voldoende algebraïsche kennis om dit zelf te kunnen afleiden.

Een mogelijkheid is zich in een eerste stap te beperken tot cirkels met de oorsprong als middelpunt. Daarna kan een verschuiving volgens de richting(en) van de coördinaatassen uitgevoerd worden. Dit biedt de mogelijkheid de relatie tussen verschuiving en coördinaten te gebruiken, die in de eerste graad als toepassing aan bod is gekomen.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m8	B	De sinus, de cosinus en de tangens van een hoek definiëren in een goniometrische cirkel.	
m9	B	De verbanden tussen de goniometrische getallen van verwante hoeken (d.w.z. complementaire, supplementaire en tegengestelde hoeken) onderzoeken, formuleren en verklaren met behulp van de goniometrische cirkel.	
m10	U	De som- en verschilformules gebruiken.	
m11	B	Het verband onderzoeken tussen de begrippen hellingshoek en richtingscoëfficiënt van een rechte.	
m12	B	De sinusregel en cosinusregel toepassen bij het oplossen van vraagstukken.	

Pedagogisch-didactische wenken

8 De definities van de *sinus en de cosinus* van een georiënteerde hoek worden vastgelegd met behulp van de coördinaatgetallen van zijn beeldpunt op de goniometrische cirkel. Met behulp van gelijkvormige driehoeken krijgt de tangens een meetkundige interpretatie.

Het aflezen en het interpreteren van de uitlezing bij het gebruik van een *rekenmachine* moet voldoende aandacht krijgen.

Op basis van de definities en eigenschappen (bijv. Pythagoras, gelijkvormige driehoeken) kunnen de betrekkingen tussen de goniometrische getallen van eenzelfde hoek, die in het eerste leerjaar van de tweede graad werden afgeleid voor scherpe hoeken, veralgemeend worden en/of uitgebreid.

9 Uitgaande van de betekenis van de goniometrische getallen op de goniometrische cirkel en op basis van meetkundige eigenschappen (bijv. van spiegelingen t.o.v. van de coördinaatassen en hun invloed op de coördinaten) kunnen de relaties tussen de goniometrische getallen van verwante hoeken (i.c. complementaire, supplementaire en tegengestelde hoeken) afgeleid worden. Belangrijk hierbij is dat de goniometrische cirkel als hulpmiddel voor het terugvinden van de betrekkingen functioneert. Deze formules en de interpretatie op de goniometrische cirkel kunnen ondersteunend werken bij het terugzoeken met een rekenmachine van een hoek uitgaande van een van zijn goniometrische getallen. De relaties tussen de goniometrische getallen van een hoek onderling en tussen die van verwante hoeken kunnen gebruikt worden om goniometrische uitdrukkingen te herleiden naar een eenvoudige gedaante. Bij het ‘bewijzen van goniometrische identiteiten’ zal dit eenvoudiger maken voorop staan. De moeilijkheidsgraad van de oefeningen wordt bewust niet te complex gemaakt.

10 *Uitbreiding*

Als het onderdeel Complexe getallen wordt aangebracht, zijn de som- en verschilformules nodig. De leerlingen kunnen ontdekken dat de meest voor de hand liggende formules, waarbij bijvoorbeeld $\sin(a+b)$ verbonden wordt met $\sin a + \sin b$, niet geldig zijn. De rekenmachine en de grafiek van $f(x) = \sin x$ kunnen ondersteunend werken. Daarna zal voor een van de gevallen best de juiste formule gegeven worden en gecontroleerd voor een aantal waarden. De andere formules kunnen uit deze eerste basisformule afgeleid worden. Als de beschikbare tijd het toelaat kunnen de formules bewezen worden.

Het is aangewezen voor deze formules een formularium te laten gebruiken in de plaats van ze te laten memoriseren. Het verwerken van deze formules moet gericht zijn op het praktisch gebruik en niet op het verwerken van moeilijke oefeningen (op identiteiten).

11 Let wel. Het verband tussen de tangens van de hellingshoek en de richtingscoëfficiënt geldt ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel. Leerlingen gebruiken deze regel wel eens verkeerd in situaties die daaraan niet voldoen.

12 Bij het oplossen van *vraagstukken in willekeurige driehoeken* ligt de kennis van de *sinusregel* en de *cosinusregel* voor de hand. De regels zullen voor de leerlingen plausibel gemaakt worden met voorbeelden. Het bewijs behoort niet tot de basiskennis. Omwille van een mogelijk onderscheid in de verschillende

vakken zal voor de leerlingen de toepassing van de cosinusregel in mechanica en elektriciteit uitgelegd worden.

Het oplossen van driehoeken wordt best gesitueerd in het oplossen van problemen. Leerlingen moeten dan aandacht besteden aan de interpretatie van de resultaten. Bovendien worden zo al te extreme berekeningen vermeden. Het gebruik van ICT-hulpmiddelen voor het effectieve rekenwerk kan hier meer tijd vrij maken voor aandacht aan het mathematiseringsproces.

Men kan aandacht besteden aan het berekenen van allerlei elementen van de driehoek, zoals hoogtelijn, zwaartelijn, oppervlakte van de driehoek, …. Zo komen een aantal problemen uit de synthetische meetkunde nog eens op een andere wijze aan bod. Bij het oplossen van driehoeken zal aandacht besteed worden aan ruimtelijk gesitueerde problemen.

Bij de exploratie van grafieken van functies, het bekijken van een bijbehorende tabel functiewaarden kan een rekenmachine, een grafische rekenmachine of een computer gebruikt worden. Dit is dan een gelegenheid om de doelstellingen in verband met ICT-hulpmiddelen na te streven.

In de wiskunde is het gebruikelijk in de meer geabstraheerde formules de letters x en y te gebruiken. Om te vermijden dat dit een al te stereotiep gebruik zou worden, is het zinvol bij de ontwikkeling van het functiebegrip en bij de inoefening letters te gebruiken die aangepast zijn aan de situatie (bijv. grootheden uit de techniek worden best met hun gebruikelijk symbool geschreven).

3 Toepassingen in het vlak en de ruimte

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	**Et**
m13	B	Gebruik maken van schetsen en tekeningen bij het oplossen van problemen gesteld in vlakke en beperkte ruimtelijke situaties.	26
m14	B	Gebruik maken van begrippen en elementaire eigenschappen bij het oplossen van problemen in vlakke en ruimtelijke situaties.	26

Pedagogisch-didactische wenken

13 Leerlingen moeten bij het onderzoeken, het oplossen van allerlei problemen ook in *ruimtelijke situaties* behoorlijke voorstellingen hanteren die hun redenering duidelijk maken. Zeker als tekeningen gebruikt worden om een redenering te onderbouwen (te verklaren), zal voldoende nauwkeurigheid aan de dag gelegd worden. Overigens is de onnauwkeurigheid een argument om meer aandacht te besteden aan het opbouwen van een verklaring gesteund op ‘zekere’ eigenschappen.

14 De leerlingen moeten de gekende meetkundige begrippen en eigenschappen leren gebruiken om meetkundige problemen op te lossen, zowel in het vlak als in de ruimte. Oefeningen waarbij lengten en hoeken berekend worden, moeten zeker aan bod komen. Daarna kan men beperkt aandacht besteden aan het afleiden en verklaren van nieuwe eigenschappen.

Het best worden deze toepassingen niet opgenomen in een afzonderlijk deeltje, maar aangesloten bij de behandeling van de eigenschappen zelf.

Pedagogisch-didactische wenken

Zoals in het eerste leerjaar van de tweede graad kan ook hier gewerkt worden aan het samenstellen van een hanteerbare gereedschapskist meetkunde. Dat wil zeggen: het aanleggen van een verzameling meetkundige eigenschappen, die vlot kunnen toegepast worden bij het onderzoeken van meetkundige situaties, het verklaren van eigenschappen, het oplossen van meetkundige problemen. Een vlotte en soepele verwoording ervan en een duidelijke visuele ondersteuning kunnen de toepasbaarheid vergroten. Ze moeten een duidelijk en hanteerbaar kader vormen, waarop de leerling kan terugvallen. Dit betekent niet dat de leerlingen dergelijke overzichten moeten memoriseren. Het overzicht moet wel beschikbaar zijn. Dat kan bijvoorbeeld in de vorm van een *'vademecum'*. Zo'n lijst kan geleidelijk (gespreid over de verschillende leerjaren) en samen met de leerlingen worden opgebouwd (bijv. een synthesetaak na een hoofdstuk).

Mogelijke *aanvullingen* voor de vlakke meetkunde:

- Eigenschappen over de relaties in een cirkel tussen koorden, hun middelloodlijn, apothema's en straal.
- Eigenschappen over de raaklijnen (aan een cirkel) uit een punt buiten de cirkel.
- Eigenschappen van middelpunts- en omtrekshoeken, en hun onderlinge relaties.

In functie van hetgeen men wil bereiken in de ruimtemeetkunde kunnen eventueel ook enkele eigenschappen in de gereedschapskist worden opgenomen.

5.5.2 REËLE FUNCTIES

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **reële functies** worden ca. **35** lestijden besteed

	functies van de tweede graad in één veranderlijke	ca. 25 lestijden
	(functies met voorschrift f(x) = a sin[b(x + c)] + d	*ca. 10 lestijden uitbreiding)*
	elementaire begrippen in verband met functies	ca. 10 lestijden

1 Functie van de tweede graad in één veranderlijke

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f15	B	De definitie geven van een functie van de tweede graad in één veranderlijke.	
f16	B	De grafiek van $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ (grafisch) opbouwen vanuit de parabool met vergelijking $y = x^2$ en daarbij – de top en de as van de grafiek bepalen, – de coördinaat van de snijpunten met de x-as bepalen.	
f17	B	Aantonen dat de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ kan worden omgevormd tot de vorm $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$.	
f18	B	De formule voor het algebraïsch oplossen van een tweedegraadsvergelijking bewijzen en toepassen.	
f19	B	De nulpunten van een tweedegraadsfunctie bepalen en grafisch interpreteren.	
f20	B	Onderzoeken of een drieterm van de tweede graad te ontbinden is in factoren van de eerste graad.	
f21	B	De grafiek van een tweedegraadsfunctie tekenen gebruik makend van top, as, ...	
f22	B	Het verloop van de tweedegraadsfunctie onderzoeken.	
f23	B	Het voorschrift van een tweedegraadsfunctie opstellen als de top en een punt van de grafiek gegeven zijn.	
f24	B	Gemeenschappelijke snijpunten van twee grafieken algebraïsch interpreteren.	
f25	B	Vraagstukken oplossen die aanleiding geven tot een vergelijking van de tweede graad in één onbekende of waarbij het verband beschreven wordt door een tweedegraadsfunctie.	
f26	U	Vraagstukken oplossen die aanleiding geven tot een ongelijkheid van de tweede graad in één onbekende.	

Pedagogisch-didactische wenken

15 Het begrip tweedegraadsfunctie kan verklaard worden vanuit een aantal betekenisvolle voorbeelden waarvoor de tweedegraadsfunctie het accurate beschrijvingsmodel is. De relaties tussen de vier elementen die een functie kunnen bepalen (situatie, tabel, grafiek en voorschrift) worden besproken.

De grafiek van de functie kan in deze fase al met een punt voor punt constructie getekend worden. Het gebruik van de grafische mogelijkheden van een rekenmachine of de computer kan de beeldvorming ondersteunen. Bij de punt voor punt constructie moeten leerlingen wel inzien dat tussenliggende punten niet met lineaire interpolatie kunnen bepaald worden.

16 Kan men met de moderne technologie vrij snel de grafiek bekomen van een ‘willekeurige’ tweedegraads-

functie, het proces waarin de grafiek in een aantal stappen ontwikkeld wordt vanaf de parabool met vergelijking $y = x^2$ met behulp van transformaties (zoals horizontale en verticale verschuiving, uitrekking, inkrimping) geeft een rijk inzicht in de samenhang tussen de grafieken onderling en tussen de grafieken en hun voorschrift. Uiteraard kan de grafische rekenmachine of de computer ingeschakeld worden om snel en handig voorbeelden voort te brengen die het leerproces kunnen ondersteunen.

Leerlingen hebben in hun vooropleiding het verband gezien tussen de coördinaten van punten die symmetrisch liggen t.o.v. een (spiegel)as (in hoofdzaak x-as en y-as). Dit kan hier gebruikt worden om de naam 'as' te verantwoorden. De letters α en β krijgen betekenis in verband met as en top.

Door de verschuiving β kan de grafiek snijpunten hebben met de eerste coördinaatas. De coördinaten van de snijpunten kunnen berekend worden uit $a(x-\alpha)^2+\beta = 0$. Meteen is de basis gelegd om de vergelijking van de tweede graad op te lossen of de nulpunten van de tweedegraadsfuncties te bepalen. Het spreekt vanzelf dat deze leerinhouden hier geïntegreerd aan bod kunnen komen.

17 Het proces, waarin de grafiek van de tweedegraadsfunctie ontwikkeld wordt vanaf de parabool met vergelijking $y = x^2$ met behulp van transformaties, leidt tot de voorstelling van functies met voorschrift $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$. En daaruit volgt op een natuurlijke wijze de vraag of elke tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2+bx+c$ tot dergelijke vorm terug te brengen is. Dit leidt tot de berekening van de relaties tussen a, b en c enerzijds en α en β anderzijds, en tot het inzicht dat elke tweedegraadsfunctie met voorschrift $f(x) = ax^2+bx+c$ voorgesteld wordt door een parabool.

18 De leerlingen kunnen sommige tweedegraadsvergelijkingen al oplossen door middel van ontbinding in factoren. Voor andere leidt het leerproces opgezet voor de realisatie van doelstellingen f16 en f17 tot een oplossingswijze. Op voorwaarde van een positieve discriminant biedt de opgestelde formule een algemeen algoritme. Naast een zekere automatisering van de werkwijze moet het oplossen van vierkantsvergelijkingen gekoppeld worden aan het oplossen van een aantal vraagstukken.

Men zal de leerlingen wijzen op een niet-verantwoord gebruik van de formule bij 'eenvoudige' oefeningen, bijv. onvolledige vierkantsvergelijkingen (bijv. van de vorm $2x^2 - 7x = 0$) of vormen die opvallend geen nulpunten hebben (bijv. van de vorm $4x^2 + 3 = 0$).

19 Het bepalen van nulpunten van de tweedegraadsfunctie komt neer op het oplossen van een tweedegraadsvergelijking. De grafische betekenis van nulpunt wordt uitgelegd.

Een mogelijke interpretatie van het bepalen van nulpunten is de doorsnede bepalen van de grafiek met niveaulijn nul. Dit laat een veralgemening toe naar het bepalen van de snijpunten met andere niveaulijnen (of de doorsnede van een tweedegraadsfunctie en een constante functie).

20 De formule voor het oplossen van de tweedegraadsvergelijking kan toegepast worden bij het ontbinden in factoren van een drieterm van de vorm ax^2+bx+c. De leerlingen kennen nu de voorwaarde waaronder dit al of niet kan. Ze kunnen de ontbinding uitvoeren voor drietermen, waar die niet voor de hand ligt. Het kennen van een algemene formule mag niet leiden tot het uitschakelen van de andere ontbindingsvormen als die voordeliger (sneller) zijn. Het gebruik van de som en het product van de wortels en het inzicht in getallen leiden soms tot een snellere werkwijze.

21 In het kader van het realiseren van tekenvaardigheden mag in deze computertijd aandacht besteed worden aan het behoorlijk tekenen van een grafiek.

22 Het onderzoeken van een grafiek van een tweedegraadsfunctie leidt tot de gebruikelijke inzichten in de tekenverandering, het stijgen en dalen van de grafiek en het herkennen van de extreme waarde bij de top.

23 Het onderzoek van een aantal situaties kan tot het inzicht leiden dat een tweedegraadsfunctie volledig vastgelegd wordt door bepaalde voorwaarden (bijv. top en een punt gegeven, drie punten gegeven) en door andere niet (bijv. twee nulpunten gegeven, as en een punt gegeven). De leerlingen kunnen hier al geconfronteerd worden met een werkwijze met 'onbepaalde coëfficiënten'.

Een verdere toepassing is dat leerlingen op grond van een gegeven grafiek zelf een aantal voorwaarden bepalen waarmee ze het functievoorschrift kunnen opstellen. Hierbij kan nog eens gewezen worden op de wisselwerking tussen de vier mogelijkheden waarmee een functie kan aangeboden worden.

24 In concrete situaties kunnen situaties onderzocht worden waarbij twee gekende grafieken snijden: de doorsnede bepalen van een rechte en een parabool. Daarbij moet zowel de numerieke berekening uitgevoerd worden, als de grafische oplossing onderzocht worden. Het snijden van rechte en parabool kan

leiden tot het onderzoeken wanneer een rechte rakend zal zijn aan een parabool. Een verwijzing naar de werkwijze bij de raaklijn aan een cirkel ligt voor de hand.

25 De tweedegraadsfunctie en de tweedegraadsvergelijking hebben een ruim toepassingsgebied. Een aantal concrete situaties kan hier de toepassing van wiskunde in allerlei gebieden illustreren. Hier liggen veel kansen om leerlingen te wijzen op het gebruik van probleemoplossende vaardigheden, zoals het leren een probleem om te zetten naar een wiskundige vorm, het gepast kiezen van onbekenden, het uitvoeren van oplossingstechnieken en het interpreteren van resultaten. Zo leren leerlingen hun wiskundekennis te gebruiken in toepassingen in andere vakken.

Het oplossen van vraagstukken op tweedegraadsfuncties komt vaak neer op het oplossen van een vierkantsvergelijking. Daarnaast zouden andere vragen aan bod moeten komen, zoals de vraag naar het stijgen of dalen van de functie of het bereiken van een extremum. Ook hier is het zinvol de vraagstukken niet in geïsoleerde lessen aan te bieden, maar ze te integreren als toepassingen op de leerinhouden.

In toepassingssituaties kunnen eenvoudige stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden, waarvan een van de tweede graad, aan bod komen.

26 *Uitbreiding*

Het tekenonderzoek van de tweedegraadsfunctie is een goede onderbouw voor het oplossen van *ongelijkheden* van de vorm $ax^2+bx+c < 0$ (of > 0) of afgeleide vormen. Interpretatie op de grafiek van de functie geeft meteen een goede grafische voorstelling van de oplossing.

Het oplossen van ongelijkheden mag niet herleid worden tot een techniek. Daarom verdient het aanbeveling ze te bespreken in het kader van betekenisvolle situaties. Ongelijkheden in breukvorm behoren tot de leerstof van de derde graad.

2 De functie met voorschrift f(x) = a sin[b(x + c)] + d

Als het aantal wekelijkse lestijden wiskunde vier bedraagt, dan wordt dit onderdeel aangezien als uitbreiding. Als het aantal wekelijkse lestijden wiskunde wordt uitgebreid tot *vijf* (cf. pedagogische aanbevelingen bij de lessentabel), dan worden de doelstellingen van dit onderdeel aangezien als *basis*doelstellingen.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f27	U	Het maatgetal van een hoek omzetten van zestigdelige graden in radialen en omgekeerd.	
f28	U	De functie $f(x)=\sin x$ in verband brengen met betekenisvolle situaties.	
f29	U	Het verloop onderzoeken van de grafiek van de functie $f(x)=\sin x$.	
f30	U	De grafiek schetsen van een functie van de vorm $f(x)=a\sin[b(x+c)]+d$.	
f31	U	Bij een grafiek van een functie van de vorm $f(x)=a\sin[b(x+c)]+d$ de invloed uitleggen van de parameters a, b, c en d.	
f32	U	Uit de grafiek van een functie van de vorm $f(x)=a\sin[b(x+c)]+d$ het voorschrift afleiden.	
f33	U	Een vergelijkingen van de vorm $\sin(ax+b)=c$ oplossen.	
f34	U	Vraagstukken oplossen in verband met periodieke verschijnselen die beschreven worden met een functie van de vorm $f(x)=a\sin[b(x+c)]+d$.	

Pedagogisch-didactische wenken

27 Naast het oplossen van vraagstukken in verband met de relaties tussen de hoeken en de zijden van een willekeurige driehoek worden de goniometrische functies bestudeerd. De stap daartoe van hoek naar reëel

getal gebeurt door de radiaal als hoekeenheid te kiezen.

In de praktijk worden naast zestigdelige graden en radialen honderddelige graden gebruikt, bijvoorbeeld bij de landmeting. In studierichtingen waarin leerlingen in de praktijk met deze maten kunnen geconfronteerd worden, kunnen ze hier aan bod komen.

28 De leerlingen moeten uiteindelijk in staat zijn de grafiek van een algemene sinusfunctie te onderzoeken. Om de aanbreng niet te ingewikkeld te maken, bijv. om niet te veel begrippen in één keer in te voeren, is het zinvol zich bij de aanvang te beperken tot de functie met voorschrift $f(x) = \sin x$.

Er zijn allerlei betekenisvolle situaties aan te geven waaruit de grafiek van deze functie kan afgeleid worden, bijv. de schroef van een vliegtuig, een draaiend rad, de cirkelbeweging, een harmonische trilling van een veer. Het begrip periodiciteit kan in deze concrete voorbeelden al geïllustreerd worden.

Leerlingen moeten wel tot het inzicht komen dat een sinusoïde tekenen op basis van enkele punten een hachelijke onderneming is. Het volstaat niet enkele punten met rechte lijntjes te verbinden. Het inzicht van een golvende lijn kan best aangebracht worden door, waar nodig, telkens de tabel van functiewaarden met enkele tussenliggende waarden uit te breiden. Uiteraard zal het beeld van de grafiek op het scherm van een computer of een rekenmachine tot een volwaardig beeld bij de leerlingen bijdragen.

De leerlingen moeten functiewaarden uit een grafiek leren aflezen. En daarbij moeten ze inzien dat een lineaire interpolatie tussen twee gekende waarden niet noodzakelijk tot exacte resultaten leidt.

29 Het onderzoek van de grafiek van de functie $f(x) = \sin x$ leidt tot het bespreken van het domein, het bereik, de periodiciteit, de nulpunten, de tekenverandering, het stijgen en dalen van de functie en het bereiken van een maximum of een minimum.

30 De voorbeelden die aanleiding hebben gegeven tot de functie $f(x) = \sin x$ leiden meestal ook tot meer algemene sinusfuncties. Zo kan het vergelijken van de beweging van verschillende punten op een rad of een schroef inzicht geven in begrippen als amplitude, faseverschuiving, ….

Aan de hand van een punt per punt constructie kan de grafiek geschetst worden. Het gebruik van een grafische rekenmachine of een computer is hier aangewezen, omdat de verandering (en dus de betekenis) van de parameters snel kan geïllustreerd worden.

Het is zinvol de leerlingen te wijzen op het verschil in benaming van de parameters (bijv. in bepaalde technische vakken) al naargelang de interpretatie die men eraan wenst te geven.

31 Een veelheid van grafieken, al of niet gerealiseerd met een computer of een grafische rekenmachine, bijv. van $f(x) = \sin x$, $f(x) = 2\sin x$, $f(x) = -\sin x$, $f(x) = \sin 2x$, $f(x) = \sin 3x$, $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, moet leiden tot de begrippen amplitude, periode en faseverschuiving. Het koppelen van een meetkundige betekenis aan deze begrippen moet het inzicht bevorderen (cf. verticale en/of horizontale uitrekking, horizontale verschuiving, de grafiek is volledig gekend als een welbepaald deel ervan gekend is, symmetrie, verbanden tussen de grafieken van functies waarvan de parameters een bepaald verband vertonen). Bij de leerlingen van deze studierichtingen kunnen een aantal parameters zeker eens geïllustreerd worden op een oscilloscoop of bij geluidsmeting.

33 Het oplossen van goniometrische vergelijkingen zal in een eerste fase beperkt worden tot de basisvormen (bijv. $\sin x = c$, $\sin x = \sin\alpha$, $\sin(ax+b) = \sin\alpha$). Het is aangewezen de vergelijkingen eerst op te lossen in een bepaalde periode. Daarna kan de oplossing ruimer geïnterpreteerd worden, bijv. met behulp van de goniometrische cirkel. Ook de grafieken van de bijbehorende functies kunnen als hulpmiddel dienst doen. De grafische oplossing zal de interpretatie van een berekend resultaat merkelijk vereenvoudigen.

Verder verdient het aanbeveling om bij het oplossen van vergelijkingen de rekenmachine in te schakelen, zowel wat betreft de effectieve berekeningen, als het grafisch oplossen, bijv. met behulp van niveaulijnen, de zoom-functie en de volgfunctie (trace-functie). Ook al is het een doelstelling dat de leerlingen de techniek van het oplossen van vergelijkingen effectief verwerven, bij het oplossen van ‘problemen’ kan er geen bezwaar tegen zijn dat de oplosfunctie (solve-functie) van de rekenmachine gebruikt wordt, zeker bij meer ingewikkelde vormen.

34 De sinusfunctie kan gebruikt worden om allerlei verschijnselen te beschrijven. Sommige vraagstukken kunnen aanleiding geven tot een vergelijking of een ongelijkheid. Bij andere kan de vraag naar een extreme waarde gesteld worden.

Mogelijke bronnen voor toepassingen zijn te vinden bij de baan van een projectiel, in de elektriciteit, de beweging van een trillende veer, de beweging van een zuiger in een motor, het beschrijven van geluidsgolven, het beschrijven van eb en vloed, de variatie van de lengte van de tijdspanne van daglicht, het beschrijven van een bioritme, … .

3 Elementaire begrippen in verband met functies

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f35	B	De grafiek herkennen van de volgende elementaire functies en het verband leggen met het voorschrift $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.	
f36	B	De grafiek schetsen van de functies $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ uitgaande van een tabel van coördinaten van een aantal van haar punten.	
f37	U	Uit de grafiek van een aantal voornoemde functies met voorschrift f(x) de grafiek van de functies met voorschrift f(x) + k, f(x + k), kf(x) grafisch opbouwen.	
f38	B	Met behulp van de grafiek het verloop van voornoemde functies onderzoeken, o.m. de nulpunten, de tekenverandering, het stijgen en dalen, het voorkomen van een extreme waarde, symmetrie in de grafiek.	

Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen werden doorheen de tweede graad geconfronteerd met een aantal aspecten van de functieleer. Het is zinvol deze vast te zetten onder de vorm van een *synthese* over de verschillende aspecten (bijv. het domein, het bereik, de invloed van coëfficiënten, de nulpunten, de tekenverandering, het stijgen en dalen, het voorkomen van extreme waarden, symmetrie in een grafiek). Dit kan door een overzicht te maken in het bijzonder van de eerste en de tweedegraadsfunctie.

Dit is meteen het kader waartegen enkele nieuwe functies aan bod kunnen komen en waarin bepaalde aspecten (zoals de invloed van coëfficiënten) nog eens extra benadrukt worden. Een aantal van deze functies zal voor een aantal leerlingen in de derde graad een algemenere gedaante krijgen (bijv. homografische functies, rationale functies). In die zin kan dit onderdeel beschouwd worden als een overgang naar de derde graad waar functiecategorieën in hun algemeenheid aan bod kunnen komen.

35 Waar mogelijk worden zinvolle situaties aangeboden waar de relaties tussen de vier elementen die een functie kunnen bepalen (situatie, tabel, grafiek en voorschrift), kunnen worden besproken.

De grafiek van de functie wordt met een punt voor punt constructie getekend. In een manueel uitgewerkt voorbeeld zal men er over waken dat een voldoend aantal punten wordt berekend en uitgezet. Leerlingen kunnen hier, door opeenvolgende verfijning van het puntenraster, al meteen geconfronteerd worden met het inzicht dat een grafiek tussen twee uitgezette punten anders kan verlopen, dan ze in een oppervlakkige aanpak vermoedden. Het gebruik van de grafische mogelijkheden van een rekenmachine of de computer zal de beeldvorming ondersteunen. In de praktijk volstaat meestal dat de leerlingen een vlugge schets van de grafiek kunnen maken.

De functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $f(x) = \frac{1}{x}$ zijn niet bepaald voor elke reële waarde van x. Dit leidt tot het begrip domein. Dit moet hier aan bod komen, als het nog niet eerder besproken werd. Zonder de theorie over asymptoten te behandelen kan aandacht besteed worden aan het gedrag van de functie $f(x)=\frac{1}{x}$ voor grote x-waarden (in absolute waarde) en voor waarden naderend naar nul.

37 *Uitbreiding*

De bedoeling is elementair kennis te maken met het effect van transformaties op de grafiek van een functie en het verband met coëfficiënten uit het voorschrift.

De leerlingen hebben bij de eerstegraadsfunctie, de tweedegraadsfunctie en eventueel de sinusfunctie al kunnen onderzoeken wat de invloed is van coëfficiënten. Deze voorbeelden kunnen nu veralgemeend worden voor de hoger genoemde functies.

38 De nulpunten van de basisfuncties (genoemd onder f35) zijn vrij eenvoudig te bepalen. Eveneens aan bod kunnen komen: de tekenverandering, het stijgen en dalen, het bereiken van een maximum en/of minimum, het vertonen van symmetrie (bijv. t.o.v. assen).

Uitbreiding

Voor de functies genoemd onder f37 kan een redenering opgezet worden, gebruik makend van de transformatie die uitgevoerd wordt. Wat gebeurt er met het nulpunt bij bijv. een verticale verschuiving en omgekeerd? Welke waarde wordt daarbij op nul afgebeeld? (En eventueel door de asymptoten, die voor de functie $f(x)=\frac{1}{x}$ werden gevonden, aan dezelfde transformatie te onderwerpen als de functie, worden asymptoten bepaald voor de functies van de vorm f(x + k), ….).

5.5.3 GETALLENLEER EN ALGEBRA

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **getallenleer en algebra** worden ca. **14** lestijden besteed

(complexe getallen	*ca. 14 lestijden uitbreiding)*
algebraïsch rekenen	ca. 14 lestijden

1 Complexe getallen

Als het aantal wekelijkse lestijden wiskunde vier bedraagt, dan wordt dit onderdeel aangezien als uitbreiding. Als het aantal wekelijkse lestijden wiskunde wordt uitgebreid tot *vijf* (cf. pedagogische aanbevelingen bij de lessentabel), dan worden de doelstellingen van dit onderdeel aangezien als *basis*doelstellingen.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	**Et**
g39	U	De definitie van een complex getal formuleren.	
g40	U	Een complex getal meetkundig voorstellen.	
g41	U	Complexe getallen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.	
g42	U	Vraagstukken oplossen die aanleiding geven tot een vierkantsvergelijking met reële coëfficiënten en een negatieve discriminant.	
g43	U	De goniometrische vorm van een complex getal bepalen.	
g44	U	Twee complexe getallen geschreven in hun goniometrische vorm vermenigvuldigen en delen.	
g45	U	De n-de macht berekenen van een complex getal, gegeven in zijn goniometrische vorm.	
g46	U	De tweedemachtswortels en de derdemachtswortels uit een complex getal, gegeven in zijn goniometrische vorm, berekenen.	

Pedagogisch-didactische wenken

39 De leerlingen zijn de vorige jaren geconfronteerd met opeenvolgende uitbreidingen van het getalbegrip. Schijnbaar was met het invoeren van de reële getallen die uitbreiding afgewerkt. Nu blijkt dat in bepaalde situaties het gebruik van ‘fictieve’ getallen wiskundige voordelen biedt. Zo is historisch gezien het invoeren van ‘complexe’ getallen gekoppeld aan het oplossen van vergelijkingen van de derde graad. Het rekenen met wortelvormen van negatieve getallen gaf zonder inhoudelijke betekenis toch juiste oplossingen. Een kennismaking met complexe getallen kan via die idee van rekentruc. De problematiek van het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen met negatieve discriminant is een voor de hand liggende aanknoping.

De schrijfwijze $\sqrt{-1}$ is niet vol te houden omdat dit tot foutieve interpretaties leidt van de vertrouwde rekenregels. Het symbool i wordt ingevoerd, zodat voor een complex getal de notatie a + bi ontstaat. In wiskunde blijven we liefst de algemeen gebruikelijke notatie gebruiken (i verwijst zinvol naar ‘imaginair’). In bepaalde studierichtingen kan in overleg tussen de verschillende vakgroepen de notatie j (waarbij dan $j^2 = -1$) overwogen worden (afwijkend van i omwille van verwarring met de notatie i voor stroom), die in sommige technische vakken meer gebruikelijk is. Dit kan voor leerlingen het gebruik van complexe getallen in de andere vakken misschien gemakkelijker maken.

40 De notatie a + bi voor een complex getal laat toe op zeer eenvoudige wijze met dat getal een *koppel reële getallen* te associëren en omgekeerd. Deze notatie met koppels reële getallen leidt onmiddellijk tot een voorstelling van complexe getallen in het vlak (voorzien van een Euclidisch assenstelsel).

41 De hoofdbewerkingen met complexe getallen worden uitgevoerd volgens de rekenregels voor reële getallen. De eigenschappen van de optelling en de vermenigvuldiging blijven dezelfde als deze van reële getallen. Gebruik makend van de meetkundige voorstelling van complexe getallen kan de optelling een meetkundige interpretatie krijgen.

Enkele grootheden uit de elektrotechniek krijgen een complexe notatie (weliswaar met j i.p.v. i) om het rekenen ermee te vereenvoudigen. Enkele voorbeelden hiervan kunnen de motivatie verhogen.

Afhankelijk van de beschikbare tijd kan geïllustreerd worden dat niet alle regels voor reële getallen zomaar worden overgedragen. Wil men het onderscheid tussen de verzamelingen van reële en van complexe getallen meer expliciteren zal commentaar op ‘ongelijkheden’ moeten toegevoegd worden.

43 Gebruik makend van de voorstelling in het vlak kan een derde schrijfwijze voor een complex getal opgesteld worden. Daarbij worden, steunend op de associatie met goniometrie en analytische meetkunde (afstandsformule), de begrippen *argument en modulus* ingevoerd.

Het belang van de goniometrische vorm van complexe getallen in het vakgebied elektriciteit kan met een paar voorbeelden gemotiveerd worden.

44 Met behulp van de goniometrische vorm blijkt de vermenigvuldiging en de deling van complexe getallen vrij eenvoudig te verlopen. De inverse $(a + bi)^{-1}$ van een complex getal wordt zowel meetkundig geïllustreerd als algebraïsch berekend.

Afhankelijk van de beschikbare tijd kan een meetkundige interpretatie gegeven worden aan de vermenigvuldiging, gebruik makend van de goniometrische vorm en meetkundige eigenschappen.

45 De *formule van de Moivre* wordt afgeleid. Hiermee kan de n-de macht van een complex getal berekend worden. De punten die bij grafische voorstelling overeenstemmen met opeenvolgende machten van een complex getal liggen op een spiraal.

46 Met behulp van de goniometrische vorm kunnen de tweede- en de derdemachtswortels uit een complex getal berekend worden. Uit de berekeningswijze volgt dat een complex getal verschillend van nul altijd twee verschillende tweedemachtswortels en drie verschillende derdemachtswortels heeft.

2 Algebraïsch rekenen

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
g47	B	De Euclidische deling uitvoeren van veeltermen in één veranderlijke.	
g48	B	De reststelling bij deling door $x - a$ bewijzen.	
g49	B	De deling van een veelterm door $x - a$ uitvoeren door middel van de regel van Horner.	
g50	B	De reststelling toepassen in vraagstukken.	
g51	B	Tweetermen van de vorm $a^3 - b^3$ en $a^3 + b^3$ ontbinden in factoren.	

Pedagogisch-didactische wenken

47 Het algebraïsch rekenen werd al aangezet in de eerste graad. Die lijn begon met ‘letters die de plaats innemen van getallen’ tot ‘met die lettervormen kan gerekend worden zoals met getallen’. Als bewerkingen zijn aan bod gekomen: optelling, aftrekking, vermenigvuldiging van tweetermen en drietermen met ten hoogste twee veranderlijken. De deling werd beperkt tot delen van eentermen, vooral gericht op het ontbinden in factoren (het ‘afzonderen’ van een gemeenschappelijke factor). Wat ontbreekt, wordt nu afgewerkt: veeltermen delen door een eenterm en delen door een veelterm.

Waar nodig kan het algebraïsch rekenen *gedifferentieerd herhaald* worden, zonder evenwel een reeks kale rekenvaardigheidsoefeningen te maken (bijv. als proef op de deling kan het quotiënt en de deler vermenigvuldigd worden en met de rest vermeerderd). De tijd hiervoor is wel beperkt!

De hoofdeigenschap van het delen bij natuurlijke getallen, die het verband uitdrukt tussen deeltal, deler, quotiënt en rest, behoort tot de leerinhouden van het eerste leerjaar van de eerste graad. De verklaring van de formule was daar uitbreidingsleerstof. Een korte herhalingsfase lijkt aangewezen indien dit als uitgangspunt van het leerproces bij veeltermen wordt genomen.

49 De regel van Horner wordt hier aangebracht als verkorte vorm voor de deling door $x - a$, zonder te vervallen in overmatig rekenwerk.

50 Mogelijke toepassingen zijn oefeningen met onbepaalde coëfficiënten, bijv. de rest berekenen bij deling door $(x-a)(x-b)$ als de rest gekend is van de delingen door $x-a$ en door $x-b$, het voorschrift van een derdegraadsfunctie waarin een parameter(s) voorkom(en)t bepalen als de rest(en) van de deling door tweetermen van de vorm $x-a$ gegeven zijn.

5.5.4 BESCHRIJVENDE STATISTIEK

	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **beschrijvende statistiek** worden ca. **15** lestijden besteed.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
s52	B	Verschillende soorten gegevens herkennen.	
s53	B	Aan de hand van voorbeelden het belang uitleggen van de representativiteit van een steekproef voor het formuleren van statistische besluiten over een populatie.	
s54	B	Vragen beantwoorden in verband met de betekenis van de frequenties van gegevens in een frequentietabel en ze interpreteren.	28
s55	B	Vragen beantwoorden in verband met verschillende grafische voorstellingen van statistische gegevens.	28
s56	B	Gemiddelde en mediaan, bij een reeks gegroepeerde gegevens berekenen en interpreteren.	29
s57	B	Variantie, standaardafwijking en interkwartielafstand, bij een reeks individuele of gegroepeerde gegevens berekenen en interpreteren.	29

	Pedagogisch-didactische wenken

De hoofdbedoeling van beschrijvende statistiek is *het ordenen, het samenvatten, het overzichtelijk voorstellen en het interpreteren* van gegevens afkomstig van allerlei situaties uit diverse disciplines.

Leerlingen moeten in de eerste plaats leren *aangeboden informatie kritisch te analyseren en te beoordelen*. Het hoofdaccent van de verwerking van dit onderdeel 'beschrijvende statistiek' ligt dus op het *interpreteren* van gegeven voorstellingen en informatie. Maar daarbij kan wel vermeld worden, dat het zelf verwerken van een reeks gegevens, het berekenen van een aantal parameters en het grafisch voorstellen van de informatie kan leiden tot een beter inzicht in het proces (bijv. de indeling van gegevens in klassen bij een voorstelling op een rekenmachine of een computer kan beter begrepen worden als men zelf geconfronteerd wordt met het indelen van een reeks gegevens in zinvolle klassen). Toch zal men zich hierbij dan beperken tot relatief eenvoudig te verwerken reeksen, zodat het omslachtige rekenwerk het inzicht niet in de weg staat. Anderzijds zullen leerlingen een sterkere motivatie ondervinden als ze gegevens moeten verwerken die betrekking hebben op hun leefwereld. Binnen dit hoofdstuk is die aansluiting zeker mogelijk door gebruik te maken van allerlei enquêtes uit jongerentijdschriften.

Het zelf verwerken van informatie met behulp van statistische voorstellingsmiddelen en het bespreken van parameters die een maat aangeven over de gegevens en de spreiding ervan komen pas in de tweede plaats aan bod. Het opzetten van een beperkte bevraging in de klas of in de school en de statistische verwerking van de verzamelde gegevens als synthese kunnen een aantal belangrijke vaardigheden en attitudes ontwikkelen zoals samenwerken in groep, communicatie, planning, organisatie, hanteren van de wiskundetaal in alledaagse situaties, kritische analyse van de resultaten en de besluitvorming. Het verwerken van gegevens die ze zelf verzameld hebben, bijv. door middel van een zelf opgestelde of uitgevoerde enquête, kan de motivatie versterken. Het opstellen van een enquête biedt mogelijkheden om vanuit vakoverschrijdende contacten te werken.

Voor het verwerken en voorstellen van statistische gegevens is heel wat *software* beschikbaar op de rekenmachine en de computer. Een radicale keuze voor het gebruik ervan, die het handmatig rekenwerk tot een minimum beperkt, is aangewezen. Zo komt tijd vrij voor interpretatieactiviteiten.

52 De leerlingen moeten geconfronteerd worden met allerlei materiaal dat statistisch verwerkt werd, bijv. uit kranten of tijdschriften, gegevens beschikbaar op informatiedragers zoals Internet, …. Ook resultaten van labowerk, dat door leerlingen zelf is uitgevoerd (bijv. in elektriciteit, mechanica, …), kunnen interessant

materiaal bieden. Aan de hand van goed gekozen voorbeelden moet, uiteraard op een elementair niveau, het onderscheid duidelijk worden tussen verschillende soorten van data. Mogelijkheden daarbij zijn: onderscheid tussen kwalitatieve of kwantitatieve gegevenstypes (bijv. er zijn al of niet berekeningen mogelijk), of tussen gegevenstypes al naargelang de gehanteerde (of mogelijk te hanteren) meetschalen (bijv. nominaal (indeling in categorieën), ordinaal (bepalen van rangorde), intervalinvariant (bijv. temperatuur) of verhoudingsinvariant (bijv. lengte)), of tussen gegevenstypes al naargelang ze behoren tot een discreet of continu berekeningstype (al of niet nauwkeurig te bepalen).

53 Bij het onderzoeken van concrete voorbeelden van statistische verwerking (bijv. in kranten- of tijdschriftenartikels) moet voldoende tijd besteed worden aan de omschrijving van de populatie, van de steekproef en de samenstelling van de steekproef, van de onderzoeksvraag.

Voorbeelden:

> Hoe zal men de gemiddelde lengte van de Vlaamse bevolking onderzoeken (zal men dan 'willekeurige' metingen kunnen beperken tot deze aan een kleuterschool, of aan het lokaal van de plaatselijke basketploeg)?
> Als men wil nagaan wat de partijvoorkeur is van de inwoners van een bepaalde gemeente, doet men dan de waarnemingen in één willekeurige straat, aan een partijlokaal, op de marktdag, …?
> Bij een telefonische enquête sluit men personen zonder telefoon uit. Bij een schriftelijke enquête kan men geen rekening houden met enquêteformulieren die niet werden teruggestuurd.
> Het werken met een kleine steekproef heeft een invloed op de betrouwbaarheid van de conclusies.

Belangrijk is wel dat leerlingen zelf creatief naar eigen voorbeelden zoeken om bepaalde voorwaarden, bij het opstellen van een steekproef, te onderbouwen. Het heeft geen zin hier enkele voorbeelden te laten memoriseren.

Een mogelijke werkwijze is in een eerste fase de verwerking en interpretatie van cijfergegevens te bestuderen op duidelijke voorbeelden (bijv. kleine populaties). Nadat verschillende onderzoeken en interpretaties over dezelfde onderzoeksvragen bovenkomen, kan in een tweede fase de vraag naar de extrapolatie van de resultaten en de interpretatie vanuit een beperkte groep (steekproef) naar een ruimere populatie aan bod komen. De leerlingen beschikken dan al over voorbeelden om de problematiek van omschrijving van populatie, steekproef en onderzoeksvraag te onderbouwen.

54 Het ordenen van de gegevens gebeurt aan de hand van een frequentietabel. Hiervoor worden de begrippen *absolute frequentie, relatieve frequentie, cumulatieve frequentie en cumulatieve relatieve frequentie* ingevoerd.

Als het aantal gegevens te groot is, worden ze gegroepeerd in klassen. Het zijn niet de frequenties van de individuele gegevens die nu gebruikt worden, maar die van de klassen. Hierbij moeten termen aangebracht worden zoals klassenbreedte en klassenmidden. Om de betekenis van klassenbreedte aan te brengen kan men bijv. bij eenzelfde reeks gegevens de klassenbreedte veranderen en de invloed op de voorstelling illustreren. Alleszins moeten de leerlingen ermee geconfronteerd worden dat het samenvatten van informatie (bijv. bij het groeperen) verlies aan informatie betekent.

55 In de media worden gegevens vaak grafisch voorgesteld. De leerlingen zijn vanuit de eerste graad vertrouwd met voorstellingen zoals staaf-, strook en schijfdiagram. Het is aangewezen dat de leerlingen deze frequent voorkomende *grafische voorstellingen* leren lezen en interpreteren, d.w.z. er vragen over beantwoorden.

Het interpreteren houdt in dat men oog heeft voor de aard van de voorstelling, de schaalverdeling, de keuze van de oorsprong en eenheden, de keuze van de klassenbreedte, …, om daaruit de informatie die achter de gegevens ligt te ontdekken. Daarbij hoort de vraag waarom bepaalde voorstellingen gebruikt worden om bepaalde kenmerken van bepaalde veranderlijken weer te geven. Daarbij kan geïllustreerd worden hoe soms misbruik gemaakt wordt van voorstellingen, met als gevolg een verkeerde besluitvorming. Hierdoor leren de leerlingen kritisch omgaan met aangeboden informatie.

Als nieuwe mogelijke voorstellingen kunnen aan bod komen: stengel- en bladdiagram; histogram, frequentieveelhoek en ogief. (Noot: de laatste drie termen worden bij voorkeur gebruikt voor situaties waarin de gegevens als 'continu' verlopend kunnen worden aangezien, bijv. bij gegroepeerde gegevens.) Bij het histogram en de frequentieveelhoek wordt gewezen op de eigenschap dat de oppervlakte ervan gelijk is aan de steekproefgrootte.

Uitbreiding

De leerlingen kunnen aan de hand van een enquête of bevraging in de klas of de school zelf een aantal gegevens verzamelen, die zelf verwerken en zelf een aangepaste voorstelling ervan maken. Er wordt wel over gewaakt dat, het leerproces meer te maken heeft met het inzicht in de verwerking van statistische gegevens, dan met het turven van een veelheid van gegevens. In die zin is het gebruik van de statistische functies, met inbegrip van de grafische mogelijkheden, van een rekenmachine of een computer aangewezen.

56 Een verdere stap in het beschrijven van gegevens is het opzoeken van parameters die ze samenvatten. Op die manier kunnen onder meer reeksen gegevens met elkaar vergeleken worden. Een eerste reeks parameters zijn de *centrummaten*: gemiddelde en mediaan. Ze zijn voor niet-gegroepeerde gegevens al aan bod gekomen in de eerste graad. Ze geven een waarde die ongeveer het midden van de gegevens aanduidt. Aan de hand van concrete voorbeelden wordt hun betekenis en het praktische gebruik ervan verklaard. Voor gegroepeerde gegevens wordt voor mediaan een eenvoudige oplossing gekozen, bijv. het midden van de mediale klasse. De meer complexe oplossingen kunnen eventueel in de latere vorming van de leerlingen snel geassimileerd worden.

Leerlingen moeten de beperktheid van de door centrummaten verkregen informatie leren relativeren. Zonder een maat voor de spreiding betekenen ze niet veel. Daarom is het zinvol centrum- en spreidingsmaten samen aan te brengen aan de hand van een aantal concrete voorbeelden. Daarna kunnen samenvattend de verschillende begrippen vastgelegd worden.

Omwille van het inzicht in de betekenis en de procedures is het zinvol het principe van de berekening aan te brengen en even in te oefenen. Voor de praktische berekeningen in opgaven en praktische problemen wordt bij voorkeur een rekenmachine of een computer gebruikt.

57 Statistische gegevens met dezelfde centrummaten kunnen van elkaar verschillen door hun spreiding rond deze parameters. Daarover kunnen een tweede reeks parameters, de *spreidingsmaten*, informatie geven: m.n. variantie, standaardafwijking, interkwartielafstand en eventueel percentielen. Variantie en standaardafwijking zijn klassiek veel gebruikte parameters, waarvan de berekening moeilijker kan uitvallen. De rekenmachine is hierbij aangewezen. De *interkwartielafstand* is gemakkelijker te berekenen en laat toe relatief snel een globale indruk van de gegevens te verkrijgen. Aan de hand van concrete voorbeelden wordt hun betekenis en het praktische gebruik ervan verklaard.

Een voorstelling van gegevens die eerder nog niet ter sprake kon komen is de *boxplot*. Ze geeft een interessante indruk van de spreiding van de gegevens, omdat ze opgesteld wordt met gebruik van enkele van de hoger genoemde parameters, m.n. de mediaan en de kwartielen.

leerplan c

vier of vijf wekelijkse lestijden wiskunde

TSO-studierichting

Handel

5.6 Leerplan c - eerste leerjaar

Dit leerplan is voorzien voor 4 wekelijkse lestijden wiskunde. Als het aantal wekelijkse lestijden wiskunde wordt uitgebreid tot *5 lestijden*, dan worden de doelstellingen van het onderdeel ***5.6.3.4 Lineair programmeren*** *basis*doelstellingen.

5.6.1 MEETKUNDE

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **meetkunde** worden ca. **29** lestijden besteed

gelijkvormigheid van vlakke figuren	ca. 12 lestijden
de stelling van Pythagoras en de driehoeksmeting van een rechthoekige driehoek	ca. 17 lestijden

Pedagogisch-didactische wenken

Door de studie van meetkunde moeten de leerlingen methoden verwerven om meetkundige problemen te herkennen en op te lossen, zowel in het vlak als in de ruimte. De nadruk moet liggen op zelf onderzoeken, analyseren, ordenen, verklaren, …, waarbij onder meer congruentie, gelijkvormigheid, toepassing van basisstellingen en coördinaten *middelen* zijn om meetkundige toepassingen en denkproblemen te behandelen.

De leerlingen moeten *zelf exploratief* te werk kunnen gaan in het onderzoeken van eigenschappen en opzoeken van verklaringen en samenhang. Ze moeten door exploratie, met behulp van heuristische methoden, leren de meetkundige probleemstelling in een situatie of opgave te herkennen. (Bijv.: dit probleem is te herleiden tot het aantonen dat twee rechten loodrecht op elkaar staan, of deze vraag is te herleiden tot een berekening of constructie met behulp van een evenredigheid van lengten van lijnstukken.) Dit proces kan vrij moeizaam verlopen, maar heeft een belangrijk effect op de vorming. En de transfer die hiervan uitgaat draagt bij tot het *ontwikkelen van zoekstrategieën* die ook in andere dan wiskundige probleemstellingen bruikbaar zijn. Zo is het aangewezen dat leerlingen een aantal meer ‘open’ opdrachten aangeboden krijgen, d.w.z. waarbij de theoretische context niet meteen mee gegeven is. Ze moeten dan zelf in een breder verband achterhalen waartoe het gestelde probleem herleidbaar is, d.w.z. in hun kennisbestand op zoek gaan naar welk meetkundig ‘model’ de situatie gemathematiseerd kan worden. Leerlingen zelf exploratief te werk laten gaan, betekent evenwel niet dat dit proces niet kan ondersteund worden met gerichte vragen, zeker in de aanvangsfase, of dat er niet voor kan gekozen worden de leerstappen zo aan te bieden dat leerlingen gemakkelijker zelf op een oplossing komen.

Leerlingen moeten hun oplossing minimaal kunnen *verklaren*. Dit wil zeggen dat ze argumenten kunnen geven om de oplossing te verantwoorden. Dit is voor hen zeker niet eenvoudig. Daarom is het zinvol hen sterk te betrekken bij het opbouwen van een dergelijke argumentatie. Daarbij is het belangrijker dat leerlingen een opgezette redenering ‘begrijpen’ en in hun eigen onvolmaakte woorden kunnen uitleggen, dan dat ze een gememoriseerd bewijs perfect kunnen reproduceren.

Omdat eigenschappen in een onderzoeksfase (bijv. in oefeningen) en verklaringen in een leerproces met leerling betrokken werkvormen worden ontwikkeld, zal meer dan voorheen zorg besteed worden aan dit kennisbestand, opdat leerlingen een voldoende duidelijk omschreven ‘referentiekader’ verwerven (zowel wat betreft de kennis zelf, als de mogelijkheden om de samenhang te verklaren). Omdat eigenschappen in een onderzoeksfase en argumenteringsfase vlot moeten kunnen gehanteerd worden, is het zinvol dat leerlingen hun kennis niet alleen logisch organiseren. Die ordening kan ook volgens schema’s die gemakkelijk bruikbaar zijn bij het bewijzen van specifieke, veel voorkomende elementen (bijv. met welke eigenschappen is evenwijdigheid aan te tonen). In het onderdeel redeneervaardigheden bij 5.1 werden een aantal algemene suggesties in verband met het bewijzen opgenomen.

De leerlingen bezitten vanuit de eerste graad een aantal methoden en voorstellingstechnieken om *ruimtelijke situaties* te beschrijven. De eigenschappen, nu nog vaak in de vlakke meetkunde geformuleerd, moeten waar zinvol, ook in ruimtelijke situaties geïllustreerd worden en toegepast worden bij het oplossen van ruimtelijke problemen.

1 Gelijkvormigheid van vlakke figuren

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m1	B	Gelijkvormige driehoeken definiëren en construeren.	26
m2	B	Gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken afleiden en illustreren op een tekening.	
m3	B	Gelijkvormigheid van driehoeken toepassen bij constructies en bij het berekenen van de lengte van lijnstukken.	26
m4	B	Gelijkvormigheid van driehoeken gebruiken om een evenredigheid van lengten van lijnstukken of een gelijkheid van hoeken te bewijzen.	
m5	B	Meetkundige problemen oplossen, ook in ruimtelijke situaties, met behulp van eigenschappen steunende op gelijkvormigheid van driehoeken.	26
m6	U	De stelling van Thales formuleren.	
m7	U	De stelling van Thales bewijzen.	
m8	U	De stelling van Thales gebruiken om de evenredigheid van lengten van lijnstukken te bewijzen.	

Pedagogisch-didactische wenken

Een aantal meetkundeonderwerpen vertonen raakpunten met onderwerpen die in dit leerplan in andere onderdelen worden vermeld. Dit biedt kansen op een meer *geïntegreerde aanpak*. Een voorbeeld is het koppelen van de stelling van Pythagoras aan de voorstelling van irrationale getallen.

1 De gelijkvormigheid van figuren is al onderzocht in de eerste graad en kan hier kort hernomen worden. Bij de herhaling kan de gelijkvormigheid tussen figuren geïllustreerd worden met figuren die niet in eenzelfde vlak liggen (bijv. bij kubus, balk, grondvlak en bovenvlak prisma, bepaalde evenwijdige snijvlakken in prisma en piramide).

Voor het praktisch gebruik wordt, zoals bij de congruentie, de gelijkvormigheid van driehoeken beter omschreven aan de hand van de overeenkomstige elementen van de driehoeken (gelijkheid van de overeenkomstige hoeken en evenredigheid van overeenkomstige zijden). Hierbij kan het verband tussen gelijkvormigheid en congruentie gelegd worden. De gelijkvormigheidsfactor zal in verband gebracht worden met het begrip schaal dat al in de eerste graad werd aangebracht.

Bij het construeren van gelijkvormige driehoeken stellen de leerlingen vast dat de gevraagde figuur gelijkvormig is met een gegeven figuur als ze er een schaalmodel van is. Uit de opdracht een gelijkvormige figuur te tekenen waarbij de gelijkvormigheidsfactor gelijk is aan 1 kunnen ze vaststellen dat de getekende figuren congruent zijn.

2 Zoals bij de congruentie wordt gezocht naar nodige en voldoende voorwaarden opdat twee driehoeken gelijkvormig zouden zijn. Hierbij kan erop gewezen worden dat dergelijke eigenschappen een economie in het denken met zich mee brengen, m.a.w. slechts een beperkt aantal, maar wel goed gekozen, voorwaarden moet gecontroleerd worden.

Leerlingen kunnen door tekenopdrachten (teken een driehoek gelijkvormig met een gegeven driehoek) ervaren dat het volstaat te werken met ‘goed gekozen’ informatie. Dit leidt tot het formuleren van ‘kenmerken’. Tegenvoorbeelden zijn belangrijk om de ‘kracht’ van de kenmerken te onderbouwen.

3 Met behulp van de gelijkvormigheid van driehoeken kunnen een aantal eigenschappen en situaties onderzocht worden. Dit kan leiden tot een aantal *constructies en berekeningen* (bijv. een lijnstuk in n gelijke delen verdelen, constructies van de vierde evenredige, verhouding van de lengten van lijnstukken berekenen, het vergroten en verkleinen van afmetingen, het verband opzoeken tussen de omtrekken en de oppervlakten van gelijkvormige figuren).

Gelijkvormigheid van driehoeken kan gehanteerd worden bij het berekenen van afstanden die niet meetbaar zijn, bijvoorbeeld omdat ze ontoegankelijk zijn.

Bij het construeren van gelijkvormige driehoeken en het berekenen van lengten van zijden kunnen enkele intuïtief aangevoelde eigenschappen van driehoeken beter geëxpliciteerd worden, zodat ze door de leerling als controlemaatstaf kunnen gehanteerd worden (bijv. de relatie 'tegenover een grotere hoek ligt een grotere zijde' en de driehoeksongelijkheid).

Het ontwikkelen van de kenmerken op basis van veel tekenwerk moet het later zoekproces in figuren ondersteunen. Het is zinvol eerst enkele situaties te onderzoeken waarbij gelijkvormigheid tussen driehoeken kan getoond worden zonder dat dit al onmiddellijk in functie staat van aan te tonen eigenschappen. De moeilijkheid voor veel leerlingen is het doorzien van situaties in gegeven figuren. Dit mag enige extra oefening krijgen. Daarom zal gewerkt worden met eenvoudige figuren (bijv. waarbij bedekkingen in een eerste fase vermeden worden). Zo kan met behulp van kleur 'reliëf' aangebracht worden in de figuren en de gebruikte overeenkomstige elementen. Argumenten voor de gelijkvormigheid kunnen de evenredigheid van concreet gegeven lengten en gelijkheid van concreet gegeven hoeken zijn.

4 Het toepassen van de gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken kan intuïtief verlopen. De nadruk ligt dan op de meetkundige eigenschap die men onderzoekt en wil formuleren en argumenteren, en minder op het rigoureus aantonen.

Voor een eerste verklaring van de gebruikte kenmerken kan men zich beperken tot het vergelijken van gemeten lengten en hoeken en bijv. het narekenen van de verhoudingen. De meetkundige verantwoording 'vanuit gekende eigenschappen' blijft dan nog op de achtergrond.

Toch moeten de leerlingen de nodige kritische zin ontwikkelen. Dat betekent dat aandacht moet besteed worden aan de kwaliteit van de gegeven argumentatie. Maar leerlingen kunnen vaak dergelijke redeneringen niet zomaar 'van voor af aan' opstarten. Daarom zal aandacht besteed worden aan het zoekproces van het bewijs. Leerlingen moeten in een eerste stap duidelijk de betrokken lijnstukken en/of hoeken 'zien' in de tekening. Ze moeten dan een aantal driehoeken zien waarin deze als 'overeenkomstige elementen' functioneren. Tussen deze gevonden figuren moeten ze dan op zoek gaan naar driehoeken die 'gelijkvormig' zijn. Eerst dan kan opgezocht worden welk het te gebruiken kenmerk is en of dat te argumenteren is met de beschikbare gegevens. Als die argumenten gevonden worden, kan het besluit geformuleerd worden. Dit proces kan afgesloten worden met een behoorlijk 'samenvatten' van de gevonden weg.

5 Een aantal eigenschappen kunnen onderzocht worden op tekeningen, onder meer door meten. Hierbij zal aandacht besteed worden aan tegenvoorbeelden om de 'voorwaarden' in de formulering te verantwoorden. Aan een aantal eigenschappen kan een verklaring gegeven worden gebruik makend van de beschikbare kennis. De zorg voor het leerproces in het opbouwen van verklaringen primeert hier op het aantal eigenschappen. Het is geenszins de bedoeling dat leerlingen bewijzen gaan memoriseren.

Mogelijke eigenschappen die hier kunnen bewezen worden zijn:
- de eigenschappen van een middenparallel van een driehoek,
- de metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek,
- de bissectrice-eigenschap (in een driehoek verdeelt de bissectrice van een hoek de overstaande zijde in stukken die evenredig zijn met de aanliggende zijden),
- de eigenschap in verband met de verhouding van de lijnstukken waarin het zwaartepunt van een driehoek een zwaartelijn verdeelt.

6 *Uitbreiding*

Ontegensprekelijk bestaat er een verwantschap tussen de doelstellingen in verband met de gelijkvormigheid van driehoeken en de stelling van Thales. De oplossing van een aantal toepassingen kan vaak verklaard worden vanuit beide onderdelen. Het inzicht wordt versterkt door aandacht te besteden aan de verschillende motiveringen. Daarom is het zinvol hier in meer of mindere mate aandacht te besteden aan de stelling van Thales. De omvang daarvan wordt overgelaten aan de keuze van de leraar (bijv. wel formulering maar geen bewijs).

Als gekozen wordt om de stelling van Thales te behandelen, dan is een minimale kennis van het begrip projectie vereist. Het aanbrengen en verwerken van de stelling van Thales wordt geïntegreerd in het onderdeel gelijkvormigheid van driehoeken. Een mogelijke volgorde daarvoor is: gelijkvormigheid, projectie, stelling van Thales en dan de toepassingen geïntegreerd aanbieden.

Leerlingen hebben in de eerste graad intuïtief gebruik gemaakt van projectie als ze in het vlak de coördinaatgetallen van een punt hebben bepaald en als ze ruimtefiguren hebben voorgesteld met aanzichten. Zo hebben ze ervaren dat bij dergelijke voorstellingen informatie verloren gaat. Vaak wordt de lengte van een lijnstuk niet behouden bij projectie. De projectie van een lijnstuk is zelfs niet altijd een lijnstuk.

De verhouding van de lengten van lijnstukken wordt bij projectie wel behouden als die lijnstukken evenwijdig zijn. Dit leidt tot de stelling van Thales. De leerlingen kunnen dit op goed gekozen voorbeelden zelf onderzoeken (o.m. met behulp van ICT-hulpmiddelen). De stelling van Thales wordt zowel in verband gebracht met de situatie in een driehoek (met een snijlijn evenwijdig aan een zijde) als met de situatie op twee rechten gesneden door een aantal evenwijdigen.

Mits goede voorstellingen aan te reiken kan de stelling van Thales ook in ruimtelijke situaties geïnterpreteerd worden (bijv. schaduw van evenwijdige stokken, het berekenen van de hoogte van een gebouw met behulp van de schaduwbeelden van gebouw en een stok).

8 *Uitbreiding*

Uit de stelling van Thales volgt dat overeenkomstige lijnstukken evenredige lengten hebben. De grootste moeilijkheid voor leerlingen is vaak het herkennen van de toepasbaarheid van de stelling van Thales in figuren of de samenhang tussen figuren.

Ook hier liggen kansen om bij de leerlingen de nodige kritische zin te ontwikkelen. Net zoals bij de gelijkvormigheid moeten ze hier kunnen verklaren hoe ze de stelling van Thales toegepast hebben en mogen ze de evenredigheid van lengten van lijnstukken niet zomaar intuïtief aanvaarden.

2 Stelling van Pythagoras

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m9	B	De stelling van Pythagoras formuleren en de betekenis ervan met figuren illustreren.	26
m10	B	De stelling van Pythagoras bewijzen.	
m11	B	De stelling van Pythagoras gebruiken om de lengte van een lijnstuk te berekenen.	26
m12	B	De afstanden berekenen tussen twee punten in het vlak gegeven met hun coördinaten.	27
m13	B	De afstand berekenen tussen de hoekpunten van een balk als de lengten van de ribben gegeven zijn.	27
m14	B	Vraagstukken oplossen die betrekking hebben op de stelling van Pythagoras.	26

Pedagogisch-didactische wenken

9 De stelling van Pythagoras kan onderzocht worden op verschillende situaties. Daarbij is het zinvol gebruik te maken van de interpretatie met oppervlakten van vierkanten (bijv. construeer een vierkant waarvan de oppervlakte de som is van twee gegeven vierkanten). Het gebruik van een simulatieprogramma voor meetkunde kan overtuigend werken. Een voorbeeld van dezelfde regel toegepast op niet-rechthoekige driehoeken levert een tegenvoorbeeld en verantwoordt in de formulering de wending ‘in een rechthoekige driehoek’. In de praktijk kunnen drietallen van Pythagoras gebruikt worden om een rechte hoek te construeren. De 3-4-5-regel, zoals gekend bijvoorbeeld in de bouw, kan hier ter sprake komen.

De stelling biedt een uitstekende gelegenheid om de leerlingen te wijzen op het bestaan van irrationale getallen. Dit kan een aanwijzing zijn om de exploraties rond de stelling van Pythagoras te laten vooraf gaan aan de behandeling van irrationale getallen in de getallenleer.

De stelling van Pythagoras, het verband met irrationale getallen en de aanverwante problematiek kan een aanleiding zijn om even uit te weiden over een stukje geschiedenis van de wiskunde. Zo kan naar aanleiding van constructies van situaties die voldoen aan de stelling van Pythagoras een fractaal, m.n. de boom van Pythagoras, ter sprake gebracht worden.

10 Er zijn vele mogelijkheden om de stelling van Pythagoras te bewijzen. Zo kunnen de metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek gebruikt worden. Een andere mogelijkheid is gebruik maken van de oppervlakten van figuren (bijv. puzzels over het herschikken van de oppervlakten). Het kan verrijkend zijn meerdere bewijzen te geven. Ze kunnen als oefening aangeboden worden.

Meetkundige software biedt de mogelijkheid zowel de verklaring met gelijkvormigheid (o.m. de metrische betrekkingen), als de oppervlakteberekening aanschouwelijk te expliciteren.

11 Met behulp van passer en liniaal kunnen een aantal lijnstukken geconstrueerd worden waarvan de lengte een irrationale vierkantswortel is. En zo kan verklaard worden dat deze irrationale getallen effectief kunnen voorgesteld worden.

13 De stelling van Pythagoras (of de formule voor afstand in een vlak) kan in ruimtelijke situaties toepast worden, bijv. om afstanden tussen de hoekpunten van een balk te berekenen. Het is niet de bedoeling de formule voor de afstand tussen twee punten in de ruimte te gebruiken. Wel wordt gewerkt in verschillende stappen, waarbij telkens gebruik gemaakt wordt van een vlakke situatie. Het is daarbij nodig aandacht te besteden aan het zichtbaar, transparant maken van de vlakke situatie. Het inzicht in de probleemstelling zal versterkt worden als de leerlingen zich een adequate voorstelling kunnen maken van de ruimtelijke situatie en het gebruikte ‘vlak’. Op zich versterkt dit het ruimtelijk inzicht en het ruimtelijk voorstellingsvermogen.

14 Meetkundige vraagstukken zijn voor de leerlingen niet eenvoudig. Vaak hebben ze hiertegen een niet te veronachtzamen tegenstand opgebouwd. Daarom zal ervoor gezorgd worden, dat de besproken problemen gesteld worden in voor leerlingen haalbare situaties en in een taal die hen aanspreekt. Dat betekent ondermeer dat de leraar oog heeft voor een gradatie in moeilijkheidsgraad, bijvoorbeeld van kale, in het oog springende toepassingen, over ingeklede oefeningen, naar wat meer verholen toepassingen. Dat telkens aandacht besteed wordt aan het ‘stellen’ van het probleem, vanuit de situatie, de opgave, …. Dat in een eerste fase een tekening beschikbaar is, dat men een dergelijke tekening leert analyseren en uiteindelijk ook opstellen. En dat betekent dat de leraar de leerlingen wijst op een heuristische methode als die gebruikt wordt of als dat aangewezen is (zie hiervoor het algemeen deel probleemoplossend werken bij 5.1), …. Dat houdt meteen in dat hiervoor voldoende tijd moet uitgetrokken worden. Opdat leerlingen vooruitgang zouden boeken is geduldig werk van de leraar en een voldoend aantal oefeningen nodig. Maar het resultaat loont zeker de moeite.

De stelling van Pythagoras moet gebruikt worden in allerlei *meetkundesituaties*. Daarvoor staan de situaties uit m11, m12 en m13 model, d.w.z. de lengte van een lijnstuk, de afstand tussen twee punten in een vlak of op een ruimtefiguur berekenen.
Zo bijvoorbeeld:

- de diagonaal van een vierkant of een rechthoek;
- de hoogte van een gelijkzijdige driehoek;
- de lengte van de diagonalen van een kubus of een balk.

Merk op, dat de te berekenen zijde niet enkel de schuine zijde hoeft te zijn, bijvoorbeeld:

- bereken de zijde van een vierkant als de lengte van een diagonaal gegeven is;
- bereken de lengte van een rechthoek als de lengte van een diagonaal en de breedte gegeven zijn;
- bereken in een concrete figuur waarvan een aantal afmetingen gegeven zijn, enkele afmetingen;
- controleer of een figuur met bepaalde afmetingen gegeven wel de vereiste kenmerken heeft;
- onderzoek of een driehoek waarvan een aantal afmetingen gegeven zijn gelijkbenig is.

Ook *ruimtelijke situaties* moeten aan bod komen, bijvoorbeeld:

- bereken de hoogte van een piramide;
- bereken de lengte van een ribbe als de zijde en de hoogte van een vierzijdige rechte piramide gegeven zijn;
- bereken de omtrek van de gelijkzijdige driehoek gevormd door drie diagonalen in verschillende zijvlakken van een kubus;
- bereken de lengte van lijnstukken op gegeven ruimtefiguren als bepaalde afmetingen gegeven zijn, bijv. een lijnstuk begrensd door de middens van twee ribben van een kubus.

3 Driehoeksmeting van een rechthoekige driehoek

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m15	B	De sinus, cosinus en tangens van een scherpe hoek in een rechthoekige driehoek definiëren (symbolen : sin, cos, tan).	26
m1	B	De goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens gebruiken voor het oplossen van vraagstukken in rechthoekige driehoeken.	26

Pedagogisch-didactische wenken

15 De begrippen *sinus, cosinus en tangens* van een scherpe hoek volgen uit de vaststelling dat alle rechthoekige driehoeken met eenzelfde scherpe hoek α gelijkvormig zijn. Dit zijn de goniometrische getallen 'van de hoek α' omdat de kennis van één van deze getallen toelaat de scherpe hoek ondubbelzinnig te bepalen. Als symbool voor de tangens van een hoek wordt gekozen voor 'tan', die internationaal wordt aanbevolen en die op de meeste rekenmachines gebruikt wordt.

Voor de praktische toepassingen wordt het gebruik van de *rekenmachine* aangeleerd voor het opzoeken van enerzijds de sinus, de cosinus en de tangens van een scherpe hoek, en anderzijds van het maatgetal van een scherpe hoek als de sinus, de cosinus of de tangens van die hoek gegeven is.

De fundamentele formules $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ en $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ kunnen afgeleid worden met behulp van de stelling van Pythagoras en de gelijkvormigheid van driehoeken.

16 Vraagstukken bieden de mogelijkheid de goniometrische verhoudingen te gebruiken bij het oplossen van praktische, concrete problemen. Voor leerlingen is de moeilijkheid vaak het herkennen van de situatie op een figuur. Daarom wordt in een eerste benadering best gewerkt met gegeven, heldere figuren. Toch blijft het zelf maken van een dergelijke figuur behoren tot de analysevaardigheden die doorheen het oplossingsproces van deze vraagstukken moeten verworven worden.

4 Toepassingen in de ruimte

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m17	B	Gebruik maken van schetsen en tekeningen bij het oplossen van problemen gesteld in vlakke en beperkte ruimtelijke situaties.	26
m18	B	Gebruik maken van begrippen en elementaire eigenschappen bij het oplossen van problemen in vlakke en ruimtelijke situaties.	26

Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen moeten hun kennis leren gebruiken bij het oplossen van meetkundige problemen, zowel in het vlak als in de ruimte. Het gaat daarbij hoofdzakelijk om berekeningen in praktische en concrete situaties en minder om het opstellen van nieuwe eigenschappen. Bij het oplossingsproces maken ze gebruik van tekeningen om de problemen te analyseren en gekende eigenschappen om de oplossing te argumenteren. Het lezen van en het zichtbaar maken van informatie op een tekening is voor de leerlingen een belangrijke stap in de probleemanalyse. Het is een cruciale stap naar het zelf maken van tekeningen bij een gesteld probleem. Met het argumenteren van hun oplossing hebben de leerlingen vaak moeilijkheden. Het leren argumenteren van een oplossing moet daarom volgens een weg van geleidelijkheid opgebouwd worden.

Het best sluiten deze toepassingen aan bij de behandeling van de eigenschappen zelf. (Zie de doelstellingen m5, m14 en m16.) Toch wil de expliciete formulering van deze doelstellingen het belang ervan aangeven. De tijd voor het verwerken van deze doelstellingen werd evenwel verrekend bij de andere onderdelen.

17 Leerlingen beschikken uit de eerste graad over een aantal voorstellingstechnieken voor ruimtelijke situaties (aanzichten, cavalièreperspectief, eventueel isometrisch perspectief). Bij de behandeling van toepassingen in de ruimte zal aandacht besteed worden aan een adequate voorstelling, waarbij de eerder gemaakte conventies gerespecteerd worden. Omdat bij een ruimtelijke voorstelling soms bepaalde informatie over situaties anders wordt voorgesteld (bijv. een rechte hoek wordt scherp of stomp, kruisende rechten worden snijdend, …) zal veel zorg besteed worden aan de tekeningen en eventueel het zichtbaar maken van de vlakke situatie waarvan men gebruik wil maken. Zo nodig zal men de feitelijke ruimtelijke situatie met didactisch materiaal illustreren om het inzicht van de leerlingen te bevorderen.

18 De leerlingen moeten de gekende meetkundige begrippen en eigenschappen leren gebruiken om meetkundige problemen op te lossen, zowel in het vlak als in de ruimte. Zeker aan bod komen een aantal oefeningen waarbij lengten en hoeken moeten berekend worden.

5 Gereedschapskist meetkunde

Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen moeten na het eerste leerjaar van de tweede graad beschikken over een verzameling meetkundige eigenschappen, die vlot kunnen toegepast worden bij het onderzoeken van meetkundige situaties, het verklaren van eigenschappen, het oplossen van meetkundige problemen. Een vlotte en soepele verwoording ervan en een duidelijke visuele ondersteuning kunnen de toepasbaarheid vergroten. Ze moeten een duidelijk en hanteerbaar kader vormen, waarop de leerling kan terugvallen. Dit betekent niet dat de leerlingen dergelijke overzichten moeten memoriseren. Het overzicht moet wel beschikbaar zijn. Dat kan bijvoorbeeld in de vorm van een *'vademecum'*. Zo'n lijst kan geleidelijk (gespreid over de verschillende leerjaren) en samen met de leerlingen worden opgebouwd (bijv. een synthesetaak na een hoofdstuk). Als voorbeeld worden in het volgend overzicht een aantal eigenschappen opgesomd die kunnen worden opgenomen in zo'n vademecum. (Een aantal van deze eigenschappen zijn al verworven in de eerste graad.)

Eigenschappen over de lengten van de zijden en de grootte van de hoeken van driehoeken en vierhoeken.
Eigenschappen over de diagonalen van vierhoeken.
Eigenschappen over de hoeken bij een snijlijn van evenwijdige rechten.
De eigenschappen van de middelloodlijn van een lijnstuk en van de bissectrice van een hoek en hun omgekeerde.
In een driehoek gaan de zwaartelijnen, de middelloodlijnen, de hoogtelijnen, de bissectrices telkens door één punt.
Het zwaartepunt verdeelt de zwaartelijn in twee stukken die zich verhouden als twee tot één.
De driehoeksongelijkheid tussen de zijden van een driehoek.
– In elke driehoek is elke zijde langer dan het verschil van de twee andere, maar korter dan hun som.
Eigenschappen van de merkwaardige lijnen in een driehoek, in een gelijkbenige driehoek en in een gelijkzijdige driehoek.
Eigenschappen van (invariantie bij) een verschuiving, een puntspiegeling, een spiegeling , een draaiing.
De congruentiekenmerken van driehoeken.
De gelijkvormigheidskenmerken voor driehoeken.
De stelling van Pythagoras en haar omgekeerde.
De eigenschap van een middenparallel van een driehoek.
De metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek.
– In een rechthoekige driehoek is de hoogtelijn middelevenredig tussen de stukken waarin ze de schuine zijde verdeelt.
– In een rechthoekige driehoek is elke rechthoekszijde middelevenredig tussen de schuine zijde en haar loodrechte projectie op de schuine zijde.

Belangrijk is dat deze lijst van eigenschappen geen steriel overzicht is van een aantal geziene en/of bewezen eigenschappen. De lijst moet ook gemakkelijk hanteerbaar zijn in nieuwe situaties. Daarom is een ordening op basis van *bruikbaarheid* een zinvolle ordening.

Voorbeelden

Met welke hulpmiddelen kan verklaard, bewezen worden

- dat twee rechten evenwijdig zijn;
- dat twee hoeken even groot zijn;
- dat de lengten van twee lijnstukken gelijk zijn;
- dat een punt het midden is van een lijnstuk;
- dat een vierhoek een parallellogram is;
- dat drie punten collineair zijn.

Een dergelijke opvatting en ordening van de gekende eigenschappen zal de leerlingen meer hulp bieden bij het zelfstandig exploreren van meetkunde.

5.6.2 GETALLENLEER

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **getallenleer** worden ca. **35** lestijden besteed

uitbreiding van het getalbegrip	ca. 5 lestijden
toepassingen op bewerkingen met reële getallen	ca. 20 lestijden
algebraïsch rekenen	ca. 10 lestijden

1 Uitbreiding getalbegrip

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
g19	B	Het bestaan van irrationale getallen illustreren.	
g20	B	Reële getallen ordenen en voorstellen op een getallenas.	
g21	B	De vierkantswortel van een positief reëel getal en de derdemachtswortel van een reëel getal definiëren en benaderen met behulp van een rekenmachine.	15 12

Pedagogisch-didactische wenken

In de getallenleer wordt het getalbegrip verder uitgebreid tot de verzameling van de reële getallen. Daarvoor moeten leerlingen het begrip irrationaal getal verwerven. Zowel de wortelvormen met inbegrip van een meetkundige voorstelling als de decimale vorm moeten aan bod komen. De aanbreng van irrationale getallen kan een aanleiding zijn om elementen uit de geschiedenis van de wiskunde in te brengen, bijv. de problemen met de irrationaliteit voor de Pythagoreïsche school. Wat betreft de ordening en de rekenregels, blijven de gekende eigenschappen geldig. Ook het oplossen van vergelijkingen verandert in wezen niet. . De uitbreiding van □ naar □ betreft dus vooral de kennismaking met de irrationale getallen.

Het is niet realistisch te verwachten dat de leerlingen van het eerste jaar van de tweede graad de begrippen reëel getal en irrationaal getal al kunnen doorgronden in al hun subtiliteit. De behandeling in dit leerjaar kan dus maar zeer beperkt zijn. Waar nodig zullen de reële getallen in de derde graad in de analyse opnieuw aan bod komen.

In de getallenleer wordt het getalbegrip verder uitgebreid tot de verzameling van de reële getallen. Daarvoor moeten leerlingen het begrip irrationaal getal verwerven. Zowel de wortelvormen met inbegrip van een meetkundige voorstelling als de decimale vorm moeten aan bod komen. De aanbreng van irrationale getallen kan een aanleiding zijn om elementen uit de geschiedenis van de wiskunde in te brengen, bijv. de problemen met de irrationaliteit voor de Pythagoreïsche school. Wat betreft de ordening en de rekenregels, blijven de gekende eigenschappen geldig. Ook het oplossen van vergelijkingen verandert in wezen niet. De uitbreiding van $\mathbb{Q}$ naar $\mathbb{R}$ betreft dus vooral de kennismaking met de irrationale getallen.

Het is evenwel niet realistisch te verwachten dat de leerlingen van het eerste jaar van de tweede graad de begrippen reëel getal en irrationaal getal al kunnen doorgronden in al hun subtiliteit. Waar nodig zullen daarom de reële getallen in de derde graad in de analyse opnieuw aan bod komen.

19 Het bestaan van irrationale getallen is niet vanzelfsprekend. Zoals de andere soorten getallen zouden de reële getallen een brede betekenis moeten krijgen. Voor reële getallen is dit niet zo eenvoudig.

Eerst kan de *periodiciteit* in de decimale voorstelling van rationale getallen geconstateerd worden. Daarna kan van enkele concrete rationale getallen met een eenvoudige repeterende decimale vorm de breukvorm berekend worden. Het bestaan van irrationale getallen kan dan geïllustreerd worden met enkele getallen met een niet-repeterende decimale voorstelling. Ook het getal π is een voorbeeld van een irrationaal getal.

De problematiek van *irrationale lengten* die ontstaat bij de stelling van Pythagoras biedt een voor de hand liggende aanleiding. Getallen die als vierkantswortel geschreven kunnen worden krijgen hier een meetkundige voorstelling. Dit is een aanwijzing om deze meetkundige elementen en irrationale getallen geïntegreerd te behandelen.

Van niet-rationale vierkantswortels (van positieve getallen) zal aangenomen worden dat ze irrationaal zijn. Zo kan intuïtief aanvaard worden dat er geen rationaal getal bestaat met kwadraat 2. De verzameling van de rationale getallen volstaat dus niet om een dergelijk elementair probleem te beschrijven. Dit is een van de weinige mogelijkheden om leerlingen een haalbare motivatie te bieden voor het bestaan en de noodzaak van irrationale getallen.

Het inzicht in de irrationale getallen met zowel de problematiek van de decimale ontwikkeling als die van de vierkantswortels en hun eventuele meetkundige voorstelling, volstaat op dit niveau als inzicht in ‘reële’ getallen.

Er dient verder op gewezen dat, ondermeer bij het rekenen met een rekenmachine, reële getallen zowel wat de interpretatie betreft (bijv. bij plaatsbepaling) als bij bewerkingen (in realistische problemen), vaak benaderd worden door een eindig decimaal getal.

20 De *ordening* van de reële getallen volgt op een natuurlijke wijze uit hun decimale schrijfwijze en komt uiteraard overeen met de ordening van punten op de getallenas.

Door intuïtief de plaats van enkele concrete irrationale getallen te bepalen op de *getallenas* en door omgekeerd van een aantal concrete punten de abscis benaderend te bepalen, groeit het besef dat met elk punt van de getallenas juist één reëel getal overeenstemt en omgekeerd dat met elk reëel getal juist één punt van de getallenas overeenstemt. De irrationaliteit van $\sqrt{2}$ gekoppeld aan de stelling van Pythagoras illustreert dat er wel degelijk irrationale “lengten“ of abscissen op de getallenas voorkomen. Het punt met abscis $\sqrt{2}$ kan men precies construeren.

21 Voor de invoering van het begrip vierkantswortel en derdemachtswortel kan uitgegaan worden van het omkeren van de machtsverheffing.

Bij vierkantswortel moet aandacht besteed worden aan de vaststelling dat er voor elk strikt positief getal a twee getallen (b en -b) bestaan waarvan het kwadraat a is. Ofwel b ofwel -b is positief. Er wordt afgesproken de positieve vierkantswortel uit a te noteren met $\sqrt{a}$. Met ‘vierkantswortel a’ wordt de positieve vierkantswortel bedoeld. Verder kan opgemerkt worden dat $\sqrt{a^2} = |a|$. De leerlingen moeten inzien waarom binnen de verzameling van de reële getallen de vierkantswortel uit een negatief reëel getal niet wordt gedefinieerd. Ze moeten hierbij een correct taalgebruik hanteren, niettegenstaande ze de volle draagwijdte ervan (er is een verzameling waarin voor negatieve getallen toch vierkantswortels kunnen gedefinieerd worden) misschien niet vatten.

Voor enkele omrekeningen van formules (bijv. volume) is het zinvol de derdemachtswortel in te voeren. Het gebruik wordt beperkt tot functionele toepassingen. De veralgemening naar de n-de machtswortel zal later volgen.

Bij het benaderen van een vierkantswortel of een derdemachtswortel met behulp van een rekenmachine moeten de leerlingen leren hun resultaat te controleren bijv. met een schatting van de grootteorde. Verder zal er op gewezen worden dat het getal op het scherm meestal een rationale benadering is. Dit is een gelegenheid om het gebruik van het aantal decimalen te bespreken. In het algemeen is het zinvol leerlingen resultaten te leren aflezen (afronden) in functie van de betekenis of het gebruik ervan (bijv. ‘precies’ resultaat of grootteorde gewenst). Voor sommige doeleinden zal een benadering tot op bijv. 0,1 volstaan, voor andere zal een nauwkeurigheid tot op bijv. 0,0001 gevraagd worden. Dat staat onder meer in verband met de gebruikte nauwkeurigheid bij het invoeren van getallen, met het verdere gebruik van het getal in berekeningen, …. De leerlingen zullen hiermee in hun studie- en beroepsloopbaan nog vaak geconfronteerd worden. Het is een techniek die ze voldoende moeten beheersen. Het is nuttig met het wiskundeteam af te spreken om volgens eenzelfde principe te werken, zodat de leerling maar één systeem moet verwerven.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
g22	B	Berekeningen uitvoeren met getallen in decimale vorm, in breukvorm en in wetenschappelijke schrijfwijze en daarbij de rekenmachine gebruiken.	12
g23	B	Regels voor het rekenen met machten toepassen bij het rekenen met getallen en met letters.	
g24	B	De rekenregels voor het rekenen met vierkantswortels uitdrukken in woorden en symbolen.	
g25	B	De rekenregels voor het rekenen met vierkantswortels toepassen bij het uitvoeren van bewerkingen.	
g26	B	Bewerkingen met vierkantswortels en derdemachtswortels benaderend uitvoeren met behulp van een rekenmachine.	
g27	U	De rekenregels voor het rekenen met vierkantswortels bewijzen.	
g28	B	Vraagstukken oplossen, en daarbij – in de probleemstelling herkennen welke grootheden aan de orde zijn; – het probleem vertalen in een wiskundige vorm met algebraïsche bewerkingen tussen de grootheden; – verantwoord kiezen tussen schattend rekenen, benaderend rekenen en het gebruik van een rekenmachine; – de oplossing zinvol afronden en interpreteren.	13 14 15 20
g29	B	Vraagstukken oplossen die leiden tot een vergelijking van de eerste graad met één onbekende.	24

Pedagogisch-didactische wenken

22 Het rekenen met rationale getallen (zowel in breukvorm, in decimale vorm als in wetenschappelijke schrijfwijze) behoort tot de leerinhouden van de eerste graad (en deels het basisonderwijs). Toch is het te verwachten dat een aantal leerlingen van deze groep nog moeilijkheden heeft met deze ‘rekenvaardigheid’. Hierover kan zo nodig informatie verworven worden met een diagnostische toets. De leerinhouden van dit leerjaar bieden *binnen het normale leerproces* voldoende gelegenheden om het rekenen met rationale getallen te onderhouden (bijv. bij vraagstukken als toepassing op verscheidene nieuwe leerinhouden en bij meetkundeproblemen over berekeningen van lengten en hoeken). Als de herhaling gebeurt in *functionele* situaties, zullen de leerlingen dit rekenen allicht als meer zinvol ervaren en kan de motivatie ervoor toenemen.

Waar fundamentele rekenproblemen vastgesteld worden volstaat een herhaling binnen het normale leerproces waarschijnlijk niet. De leerlingen zullen voor hun toekomstig beroep allicht over voldoende rekenvaardigheid moeten beschikken, zowel bij het hoofdrekenen, het cijferrekenen en het gebruik van een rekenmachine. Een inspanning om hieraan te verhelpen is verantwoord. Een aantal *gerichte opdrachten* kunnen hieraan misschien nog verhelpen. Toch blijft de vraag of deze rekenvaardigheid op deze leeftijd nog kan verworven worden, als dat nog niet eerder het geval was. Misschien is het zinvoller de inspanningen te richten op een adequaat gebruik van een *rekenmachine*, daar waar dit sneller gaat (gezien vanuit leerlingenstandpunt) en op goed werkende *controlevaardigheden* om resultaten te toetsen. Het schatten van de grootteorde van een resultaat is hiervan een belangrijk onderdeel. Dat steunt dan weer vooral op goed afronden, snel hoofdrekenen en inzicht in getallen. Gericht oefenen op deze onderdelen geeft misschien meer resultaat dan willekeurige oefenreeksen op bewerkingen.

Onafhankelijk van de remediëringsproblematiek moeten de leerlingen leren verantwoord gebruik maken van een *rekenmachine*. Dat wil onder meer zeggen dat leerlingen geleerd wordt de bekomen resultaten te toetsen, bijv. door ze te vergelijken met een schatting van de grootteorde.

Bij het gebruik van een rekenmachine worden leerlingen in hoofdzaak geconfronteerd met het rekenen met decimale getallen. Dit zou hen de idee kunnen geven dat resultaten niet exact kunnen berekend worden. Het is zinvol deze problematiek te bespreken naar aanleiding van een gepast voorbeeld. Zonder hierop uiteraard een hele reeks oefeningen uit te voeren zal, waar de gebruikte toestellen het toelaten, het gebruik van het rekenen met de breukvorm machinaal uitgevoerd worden, zodat een 'exact' resultaat bekomen wordt. Anderzijds zullen resultaten die evident verwijzen naar breuken als dusdanig geïnterpreteerd worden. Zo kan bijvoorbeeld 0,333… in sommige situaties tot 0,3 afgerond worden, maar men zal niet nalaten dergelijk resultaat te noteren als $\frac{1}{3}$.

23 De leerlingen zouden vertrouwd moeten zijn met het *rekenen met machten*. De leerinhouden van dit leerjaar bieden voldoende gelegenheden om met machten te rekenen. Waar echter nog problemen vastgesteld worden moeten die uiteraard geremedieerd worden, zowel wat betreft het benaderend uitrekenen van een resultaat als het symbolisch rekenen. Het is zinvol extra aandacht te besteden aan het rekenen met machten met letters, waar de rekenregels meer symbolisch moeten toegepast worden.

24 Naast het rekenen met irrationale getallen in decimale vorm moeten leerlingen rekenen met wortelvormen. Ook hier geldt de opmerking dat leerlingen hiervoor allicht sterker gemotiveerd kunnen worden als dit gebeurt in een functionele context.

Het formuleren van rekenregels is noodzakelijk om vlot met wortelvormen te kunnen rekenen, maar de aandacht moet toch vooral gaan naar het toepassen van deze regels.

Voor het rekenen met vierkantswortels wordt de formulering van de regels best voorbereid door te redeneren op voorbeelden. (Voorbeeld: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ is een getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 6, dus is $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ gelijk aan $\sqrt{6}$). Er dient gewezen te worden op de uitdrukkingen die niet leiden tot eigenschappen. (Voorbeeld: $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ is niet gelijk aan $\sqrt{7}$, want het kwadraat van $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ is niet gelijk aan 7). Regels die aan bod kunnen komen zijn het vereenvoudigen van vierkantswortels, som en verschil van gelijksoortige vierkantswortels, product, quotiënt en machten van vierkantswortels.

25 De beschikbare tijd voor de inoefening van dit onderwerp is beperkt. Een beperking tot eenvoudige situaties is aangewezen. De rekenmachine maakt uitgebreide inoefening met veel en ingewikkeld cijferwerk overbodig.

Vooraleer over te stappen op het rekenen met wortelvormen waarin letters optreden zal best gerekend worden met wortelvormen van getallen waarop de rekenregels kunnen toegepast worden. Bij de lettervormen zal de moeilijkheidsgraad bewust beperkt gehouden worden. Het gaat er veeleer om het principe van de rekenregels beter te begrijpen. Daarom worden de letters beperkt tot de positieve reële getallen.

Om een vorm met wortelvormen in de noemer te vereenvoudigen kan de mogelijkheid aangebracht worden die noemer rationaal te maken. Het is niet de bedoeling uitgebreid in te gaan op deze techniek, maar wel hem functioneel aan te wenden. Het kan zinvol zijn zich te beperken tot die vormen waarin de noemer een eenterm is bestaande uit een wortelvorm van de tweede graad.

Enige aandacht moet besteed worden aan het rekenen met lettervormen waarbij ook irrationale coëfficiënten optreden.

26 Bij bewerkingen met reële getallen in decimale voorstelling moeten die meestal benaderd worden met een rationaal getal met een eindige decimale vorm. Hetzelfde probleem doet zich voor als berekeningen met vierkantswortels en derdemachtswortels benaderend worden uitgevoerd of bij berekeningen met rationale getallen met een oneindige decimale vorm. En ook bij het rekenen met een rekenmachine worden reële getallen benaderd door rationale getallen met een eindige decimale vorm. De nauwkeurigheid van het decimaal getal dat wordt afgelezen is te bepalen, onder meer in functie van de gebruikte nauwkeurigheid van de ingevoerde getallen of van het gebruik van het afgelezen getal in verdere berekeningen.

Werken met decimale getallen die nauwkeurig zijn tot op een verschillend aantal decimalen kan tot onoverzichtelijke onnauwkeurigheden leiden. Dergelijke uitgebreide foutenbespreking moet niet aan bod komen. Wel is het zinvol leerlingen aan te bevelen het afronden uit te stellen tot het eindresultaat. Leerlingen moeten inzien dat een rekenmachine intern met meerdere decimalen werkt en hiervan maximaal gebruik weten te maken.

28 De herhaling en de uitdieping van getallenkennis zal bij de leerlingen nagestreefd worden aan de hand van het oplossen van problemen uit hun omgeving. Die kunnen aansluiten bij de technische vakken.

De aandacht voor vraagstukken zal evenwel niet beperkt blijven tot enkele geïsoleerde lessen. Vraagstukken dienen geregeld in allerlei omstandigheden aan bod te komen in de loop van het gehele jaar. Precies de volgehouden aandacht biedt meer kans op het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden.

(Voor een algemene situering hiervan zie 5.1).

Belangrijk daarbij is onder meer dat leerlingen een probleem leren stellen in een gegeven situatie. Dat betekent dat ze uit het gevraagde de te berekenen grootheid kunnen afleiden. Dat betekent dat ze in functie daarvan de gegevens en de uit te voeren bewerkingen kunnen selecteren.

De leerlingen kennen al een aantal voorstellingstechnieken van gegevens, zoals diagrammen, grafieken en tabellen. Hiervan kan handig gebruik gemaakt worden om de presentatievorm van de problemen te variëren. Meteen wordt een zinvolle herhaling ingebouwd van het gebruik van verschillende soorten diagrammen. In hun studie- en beroepsloopbaan zullen de leerlingen hiermee nog meermaals geconfronteerd worden. Het gebruik van tabellen en grafieken is een zinvolle overgang naar het onderdeel *Reële functies*

Nadat de leerlingen een accurate wiskundige representatie gekozen hebben moeten ze een aangepaste rekenwijze kiezen. Naargelang de complexiteit van de gegevens en de bewerkingen kan dat zowel het hoofdrekenen als het cijferrekenen of het gebruik van een rekenmachine zijn.

Bij het afronden van berekende getallen, in het bijzonder van het resultaat, moet rekening gehouden worden met de getallen zelf, hun rol eventueel verder in de berekening, de grootteorde van de gegevens en het realiteitsaspect van de situatie.

29 De oplossingstechniek van *vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende* in □ zijn dezelfde als die in □ . Deze werden door de leerlingen verworven in de eerste graad. Hierdoor is het oplossen van deze vergelijkingen in □ geen doel op zich meer en dient dit geïntegreerd te worden in het aanbieden van *realiteitsbetrokken vraagstukken*.

Wel moet een verband gelegd worden met het opzoeken van nulpunten van eerstegraadsfuncties. De onderdelen vergelijkingen en eerstegraadsfuncties kunnen daartoe geïntegreerd aangepakt worden.

Voor het oplossen van vergelijkingen van de eerste graad van een eenvoudige vorm en met eenvoudige getallen is de manuele techniek een basisvaardigheid die moet verworven blijven. Dergelijke duidelijke gevallen moeten het inzicht versterken. Voor het oplossen van meer ingewikkelde vormen kunnen ICT-hulpmiddelen ingeschakeld worden. Zo kan men in deze gevallen gebruik maken van de ingebouwde oplosser. Of als het verband gelegd wordt met eerstegraadsfunctie(s), kan de oplossing van de vergelijking grafisch afgelezen worden of als het snijpunt van twee eerstegraadsfuncties (bijv. rechter- en linkerlid) bepaald worden.

3 Algebraïsch rekenen

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	**Et**
g30	B	Rekenregels toepassen bij het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen van eentermen en veeltermen in één veranderlijke met graad ten hoogste 3.	
g31	B	Een veelterm ontbinden in factoren door gebruik te maken van – de distributieve eigenschap; – merkwaardige producten; – groepering van termen.	

Pedagogisch-didactische wenken

30 In de eerste graad hebben de leerlingen een-, twee- en drietermen leren optellen en vermenigvuldigen. Dit rekenen zou door de leerlingen moeten verworven zijn. Toch valt te verwachten dat sommige leerlingen de gestelde algebraïsche rekenvaardigheid niet meer voldoende beheersen. Voor zover de realisatie van andere doelstellingen hierdoor niet gehypothekeerd wordt, kan hier nog remediërend gewerkt worden. Dit betekent bijvoorbeeld dat leerlingen gedifferentieerd en gericht oefeningen kunnen verwerken. Hier ligt een belangrijke kans om de leerlingen gestuurd, maar toch zelfverantwoordelijk aan het werk te laten (bijv. via meerdere, over het gehele schooljaar gespreide, maar korte herhalingstaken), eventueel na een korte herhaling tijdens de lestijden. Wel moet men zich realiseren dat met de mogelijkheden die rekenmachines en computer zullen hebben in verband met het algebraïsch rekenen, de impact van het manueel algebraïsch rekenen kleiner wordt. Hiermee zou een ernstig obstakel voor de leerlingen kunnen weggenomen worden.

31 Een aantal *merkwaardige producten* en het *ontbinden in factoren* zijn behandeld in het tweede leerjaar van de eerste graad. Dit kan zo nodig zeer kort herhaald worden (bijv. na een diagnostische toets, met gespreide, korte herhalingstaken gericht op vaardigheidstraining). Er komen echter geen nieuwe vormen bij. Dus ook de beperkingen uit de eerste graad (ten hoogste twee veranderlijken, eenvoudige vormen) blijven van kracht. Als verantwoording kan aangevoerd worden dat de leerlingen dit in de praktijk maar zullen gebruiken bij het zoeken van nulpunten van veeltermfuncties in één veranderlijke. Te ingewikkelde vormen zullen het inzicht en de vaardigheid eerder bemoeilijken. Er dient dus voorrang gegeven te worden aan het vlot beheersen van de basisvormen. De beschikbare tijd voor dit onderwerp is echter zeer beperkt!

Nu de wortelvormen gekend zijn kan aandacht besteed worden aan vormen zoals $x^2 - 3$, die in □ wel ontbindbaar zijn en in □ niet en die vorig jaar niet behandeld werden.

Het invoeren van de formule voor $(a+b)^3$ en aanverwante vormen wordt uitgesteld.

5.6.3 REËLE FUNCTIES EN ANALYTISCHE MEETKUNDE

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **reële functies en analytische meetkunde** worden ca. **35** lestijden besteed

algebraïsche verbanden expliciteren	ca. 10 lestijden
eerstegraadsfuncties	ca. 15 lestijden
stelsels van twee vergelijkingen in twee onbekenden	ca. 10 lestijden

Pedagogisch-didactische wenken

Het onderdeel *Reële functies* zal de volgende jaren studieonderwerp zijn voor de leerlingen. Het verder afliggend doel is het verloop van dergelijke functies te begrijpen, te beschrijven, te beheren, te gebruiken en toe te passen in praktische situaties. In dit leerjaar komen als hoofddoel de eerstegraadsfuncties aan bod. Het opstellen van de algemene vergelijking van een rechte wordt hierin geïntegreerd aangebracht.

Bij het begin van het onderdeel *Reële functies* is het zinvol enkele voorbeelden te onderzoeken van relaties tussen grootheden. Daarbij wordt uitgegaan van situaties die betekenisvol zijn voor de leerlingen en waarin de elementen in een wiskundig verband staan. Dat kunnen situaties uit hun leefwereld zijn, maatschappelijk relevante situaties of elementen uit hun basiskennis wiskunde of wetenschappen. Het verband tussen twee of meer grootheden wordt hierbij wiskundig geëxpliciteerd, bijv. de afgelegde weg bij eenzelfde snelheid is recht evenredig met de tijd; de rente is het product van kapitaal, rentevoet en tijd.

Het is evenwel gebruikelijk die verbanden niet slechts woordelijk te expliciteren. Ze kunnen omschreven worden met een formule (bijv. $I = K \cdot i \cdot t$; $S = \pi r^2$). Of aan de hand van een tabel van overeenkomstige waarden (bijv. de rente van eenzelfde kapitaal bij verschillende rentevoeten, de resultaten van een meting of experiment). Of door een grafische voorstelling ervan (bij een artikel in de krant valt vaak eerst de grafiek op en de legende, dan eventueel een tabel met ‘precieze’ waarden, daarna volgt het lezen van het verhaal).

Leerlingen moeten in de inleiding op het onderdeel *Reële functies* leren omgaan met deze drie presentatievormen. De didactische aanpak kan daarbij verschillen naargelang de leerlingengroep. Zo kan bijv. in de aanvangsfase aandacht besteed worden aan elke mogelijkheid afzonderlijk, daarna aan de samenhang tussen de verschillende elementen. Het is zinvol de verschillende voorstellingen in een geïntegreerde aanpak ter sprake te brengen, bijv. uitgaande van enkele goed gekozen situaties zowel het tabuleren, het omzetten in een formule of de grafiek bespreken.

De leerlingen zijn uit de eerste graad al vertrouwd met enkele belangrijke elementaire verbanden, zoals die tussen recht evenredige grootheden of omgekeerd evenredige grootheden. Deze kunnen in de aanloop hernomen worden. Andere mogelijkheden zijn een verband van de eerste graad (alhoewel die verderop expliciet aan bod komen) en kwadratische verbanden (bijv. het verband tussen de oppervlakte van een cirkel en de straal). Ook kunnen verbanden aan bod komen met een meervoudig voorschrift of met meer dan twee variabelen. De leerlingen beschikken evenwel nog niet over een uitgebreid algebra- of analysearsenaal om deze verbanden te bestuderen. De tweedegraadsfuncties komen expliciet aan bod in het tweede leerjaar van de tweede graad! In de aanloopfase is het niet de bedoeling onderhands ingewikkelde algebraïsche uitdrukkingen ter sprake te brengen. De bestudeerde verbanden zullen dus relatief eenvoudig blijven.

Leerlingen moeten bij een aantal situaties, geformuleerd in woorden, de verschillende voorstellingswijzen kunnen gebruiken: een tabel van overeenkomstige waarden maken; een grafiek tekenen en daarbij het gekozen assenstelsel accuraat kiezen; een voorschrift of formule opstellen. Ze moeten vlot van de ene vorm naar de andere overstappen als dat mogelijk en wenselijk is.

Bij de exploratie van grafieken van functies, het bekijken van een bijbehorende tabel functiewaarden kan een grafische rekenmachine of een computer gebruikt worden. Dit is dan een gelegenheid om de doelstellingen in verband met ICT-hulpmiddelen na te streven.

In de wiskunde is het gebruikelijk in de meer geabstraheerde formules de letters x en y te gebruiken. Om te vermijden dat dit een al te stereotiep gebruik zou worden, is het zinvol bij de ontwikkeling van het functiebegrip en bij de inoefening letters te gebruiken die aangepast zijn aan de situatie (bijv. grootheden uit de techniek worden best met hun gebruikelijk symbool geschreven).

1 Algebraïsche verbanden expliciteren bij betekenisvolle situaties

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f32	B	Een gegeven tabel interpreteren, o.m. – bepaalde waarden aflezen; – extreme waarden aflezen; – het globale verloop (constant, stijgen, dalen) bespreken.	18
f33	B	Een gegeven grafiek interpreteren, o.m. – bepaalde waarden aflezen; – extreme waarden aflezen; – het globale verloop (constant, stijgen, dalen) bespreken.	18
f34	B	In een gegeven formule – de waarde van één veranderlijke berekenen bij vervanging van de andere veranderlijke(n) door een getal; – het effect aangeven van de verandering van één veranderlijke op de andere.	21 20
f35	B	Het verband tussen twee veranderlijke grootheden weergeven door middel van – een tabel; – een grafiek in een opportuun gekozen assenstelsel; – een formule.	16 17 20
f36	B	De samenhang tussen verwoording, tabel, grafiek en formule uitleggen.	22
f37	B	De onderlinge ligging van twee grafieken vergelijken en interpreteren.	19

Pedagogisch-didactische wenken

32 Het is zinvol bij de aanvang van dit onderdeel enkele concrete voorbeelden te bespreken van tabellen en grafieken over situaties uit de ‘leefwereld’ (bijv. uit kranten of tijdschriften, uit informatiebrochures, uit technische handleidingen, afstands- of hoeveelheidstabellen, reisbrochures). Het lezen en interpreteren ervan is een belangrijke vaardigheid.

Veel informatie wordt vaak vergezeld van tabellen bijv. over afmetingen, resultaten van een meetproces, opbrengst bij verschillende rentevoet, omzetting van verhoudingen, prijsberekeningen (eventueel met verrekening van korting), wisselkoersschommelingen, evolutie van de beursindex, omzetting van verhoudingen, prijsberekeningen, …. Vanuit de eerste graad zijn leerlingen al vertrouwd met het aflezen van tabellen van eenvoudige relaties, zoals tussen twee recht evenredige grootheden. Nu kunnen meer algemene verbanden aan bod komen.

Een eerste stap in het begrijpen van de informatie in een tabel is het aflezen van de grootheden, het aflezen van waarden en het opzoeken van bijzondere waarden zoals extreme waarden. Ook over het globale ‘verloop’ van de waarden uit een tabel moeten leerlingen een indruk kunnen geven. Gaat het bijvoorbeeld om een stijgende, een dalende, een constante trend? Is er informatie af te lezen in verband met gelijkmatige toename of is er een maat te bepalen voor de snelheid van toe- of afname, bijv. is het percentage van toename of afname te berekenen?

Belangrijk is dat leerlingen de afgelezen getallen terug in de juiste context kunnen plaatsen, bijv. wat is de betekenis van een extreme waarde of van een stijgende trend in deze situatie.

Leerlingen moeten kritisch leren omgaan met de geboden informatie en de veralgemening ervan. Zo wordt in een tabel het verband tussen twee grootheden maar gegeven voor bepaalde waarden. Informatie voor tussenliggende of verderliggende waarden kan berekend worden met behulp van interpoleren en extrapoleren. Hierbij moeten leerlingen wel beseffen dat hiervoor meestal lineaire voortzetting gebruikt wordt en dat dit niet altijd de juiste weergave is van het verband. Een tegenvoorbeeld kan de leerlingen hier tot voorzichtigheid in hun interpretatie aanzetten. Een tabel biedt maar beperkte informatie aan over bepaalde waarden. Hieruit een vast verband afleiden is moeilijk. De kennis van een aantal bijkomende waarden zou het vermoeden over het beschreven verband kunnen wijzigen.

33 Een grafiek biedt heel wat zintuiglijke en overzichtelijke informatie. De leerlingen moeten over de vaardigheid beschikken om die informatie snel te lezen en te interpreteren. Het is vanzelfsprekend dat hier wordt uitgegaan van concreet materiaal over situaties uit de maatschappij en de werkomgeving waarin de leerlingen leven en zullen werken. Meestal vallen belangrijke waarden zoals extreme waarden onmiddellijk op. Nulwaarden kunnen meestal snel afgelezen worden. En toename of afname van de beeldwaarden is verbonden met het stijgen of dalen van de grafiek. Bij het aflezen wordt soms informatie over het hoofd gezien, bijvoorbeeld welke zijn de effectieve grootheden die uitgezet werden en op welke assen (cf. het gebruik in economie om de onafhankelijke veranderlijke op de verticale as uit te zetten), en met welke eenheden op de assen. Zo kan de keuze van de eenheid (schaal) een andere indruk geven over dezelfde informatie (bijv. met betrekking tot het stijgen of dalen, de schijnbare helling van een grafiek). Het vergelijken van grafieken van eenzelfde fenomeen uit verschillende informatiebronnen is een voor de hand liggende instap, die heel wat inzicht kan bijbrengen.

Anderzijds moeten leerlingen beseffen dat bij grafische informatie vaak aan nauwkeurigheid van de waarden moet ingeboet worden, omdat bij het opmeten van een ‘beeldwaarde’ onvermijdelijk meetfouten gemaakt worden. Hieruit blijkt dan weer dat een combinatie van zowel tabel als grafiek zinvol is om de informatie te versterken. Het precies omschrijven van het verband met een voorschrift of formule is een andere mogelijkheid om preciezere informatie te geven.

Ook ten aanzien van de informatie in een grafiek moeten leerlingen leren kritisch staan. Ook een grafiek kan maar gegeven zijn voor een bepaald deel. Het verloop kan buiten het beschikbare deel totaal anders zijn. Extrapolatie is mogelijk, maar kan helemaal niet beantwoorden aan de rest van het verloop of aan het reële verloop.

34 Uit het voorgaande onderzoek van tabellen en grafieken blijkt dat ze zeer zinvolle informatie kunnen geven. Om een verband tussen grootheden precies te beschrijven zal een formule of een voorschrift nochtans de meeste informatie bieden. Op grond daarvan kunnen overeenkomstige waarden berekend worden en kan een grafiek getekend worden.

Voor het praktisch gebruik in de wiskunde (bijv. financiële algebra in de derde graad) en in andere vakken (bijv. wetenschappen) moeten de leerlingen beschikken over de techniek om formules te gebruiken om waarden te berekenen of om bepaalde veranderlijken te expliciteren. Als een van de veranderlijken geschreven is in functie van de andere, kan die berekend worden als aan de andere veranderlijken een waarde wordt toegekend. Het gaat om het berekenen van de ‘getalwaarde’, zoals leerlingen dat voor veeltermen hebben gedaan in het tweede leerjaar.

Meestal ontstaan de moeilijkheden voor de leerlingen als de gevraagde veranderlijke niet geëxpliciteerd is. Vooral de werkwijze van het omvormen, d.w.z. door middel van letterrekenen de veranderlijke expliciteren, levert problemen op. Een andere mogelijkheid is de gekende waarden invullen en de overgebleven veranderlijke oplossen, bijv. met technieken van het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen (overbrengen van een term, overbrengen van een factor), die de leerlingen kennen uit de eerste graad. Als men zich beperkt tot deze techniek, is het zinvol de andere leerkrachtengebruikers van deze methodiek op de hoogte te brengen, zodat leerlingen in die vakken deze werkwijze kunnen blijven hanteren.

Het uitdrukken van een verband in een formule is een gelegenheid om de leerlingen te laten inzien dat de ene veranderlijke in functie van de andere verandert. Dit leidt tot begrippen zoals onafhankelijke en afhankelijke veranderlijke. Als het verband tussen twee grootheden geëxpliciteerd is in een formule, dan kan onderzocht worden welk effect er is op een van de veranderlijken als de andere gewijzigd wordt, bijv. wat is het effect van een vermenigvuldiging met 5 (bijv. ook een vermenigvuldiging met factor 5, met factor $\frac{1}{5}$, met factor 25, …).

Ook hier worden de uitdrukkingen vrij eenvoudig gehouden, bijv. vormen zoals $y = a$, $y = ax$, $y = ax + b$, $ax + by = c$, $y = ax^2$, $y^2 = x$, $x \cdot y = a$.

35 De leerlingen moeten zelf een tabel kunnen opstellen, een grafiek tekenen, een verband in een formule vertolken. Om dit zinvol te maken wordt best aangesloten bij situaties die de leerlingen kennen.

De leerlingen moeten eigenhandig een tabel kunnen opstellen en een grafiek kunnen tekenen. Dit vraagt enige inoefening. Bij de grafische voorstelling zal aandacht besteed worden aan de keuze van het assenstelsel en de eenheden op de assen, bijv. in functie van het aangeven van extreme waarden, nulwaarden, enz.. Mogelijke oefeningen zijn het uitvergroten van een deel van een grafiek of het kiezen van de eenheden om een bepaald deel van een grafiek te manipuleren (bijv. het benadrukken van de helling in functie van het effect dat men met de grafiek wil bereiken). Dit zijn vaardigheden die nodig zijn bij het gebruik van het scherm op een grafische rekenmachine of een computer. Naast het manueel opmaken van een tabel of een grafiek kan aandacht besteed worden aan het gebruik van een rekenmachine of software. De routine die ze kunnen verwerven in deze relatief eenvoudige situaties kan hen ondersteunen bij meer ingewikkelde functies.

Bij het zelf tekenen van een grafiek zullen de leerlingen voldoende zorg besteden aan het 'vloeiend verloop' van de grafiek.

36 Het is te verwachten dat leerlingen een beter inzicht in de samenhang tussen tabel, grafiek, voorschrift en situatie zullen verwerven als ze een aantal oefeningen gemaakt hebben op het overbrengen van de informatie van de ene voorstelling naar een andere (bijv. een grafiek geeft in het algemeen een meer globale indruk van het verloop, een tabel biedt meer preciezere informatie over de waarden; als beide gegeven zijn moeten leerlingen voor het globaal verloop spontaan naar de grafiek grijpen, voor precieze waarden niet; of een gegeven prijzentabel uit een reisbrochure omzetten naar een grafiek met de tijd als onafhankelijke veranderlijke).

Het doel is vlot te kunnen overgaan van een vorm van voorstelling naar een andere. Leerlingen moeten verschillende voorstellingen van eenzelfde situatie met elkaar kunnen associëren (bijv. zij een tabel en een grafiek gegeven, bieden ze wel dezelfde informatie?). De overgang van 'tabel' of 'grafiek' naar 'voorschrift' is een gelegenheid om de leerlingen kritisch te leren omgaan met de besluitvorming (bijv. een tabel biedt maar informatie over een beperkt aantal koppels van de functie). Het omzetten van een situatie (verhaal, tekst) naar een meer formeel wiskundig voorschrift sluit dan weer nauw aan bij het doel van mathematiseren en/of modelleren van de leefwereld. Uiteindelijk zullen de leerlingen aan de vergelijking (of het voorschrift) de grafiek van een functie herkennen.

37 Bij het interpreteren van grafieken zal aandacht besteed worden aan het vergelijken van verschillende grafieken van eenzelfde verband. Daaruit zou een kritische houding moeten volgen ten aanzien van de keuze van assen, eenheden, kijkvenster, …. Anderzijds moeten leerlingen grafieken van verschillende verbanden met elkaar kunnen vergelijken (bijv. welk systeem van betalen kost het meest?). Zo kan de vraag naar de gelijkheid van twee functiewaarden voor een bepaalde x-waarde leiden tot het algebraïsch berekenen van de coördinaat van het snijpunt van de twee bijbehorende grafieken (bijv. met gelijkstelling van de voorschriften), tot het grafisch interpreteren ervan en tot het oplossen van een stelsel.

Bijzondere aandacht kan besteed worden aan de ligging van een grafiek ten opzichte van bepaalde 'niveaulijnen', in het bijzonder de nullijn.

2 Eerstegraadsfuncties

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f38	B	De definitie van een eerstegraadsfunctie geven.	
f39	B	De grafiek van een eerstegraadsfunctie tekenen.	23
f40	B	Het nulpunt van een eerstegraadsfunctie bepalen en grafisch interpreteren.	24
f41	B	De grafische betekenis van de coëfficiënten m en q in het voorschrift $f(x)=mx+q$ van de functie uitleggen.	24
f42	B	Het verband leggen tussen de algemene vergelijking van een rechte $ax+by+c=0$ (met $a\neq 0$ en $b\neq 0$) en de verwante eerstegraadsfunctie.	25
f43	B	Een vergelijking opstellen van een rechte als ze gegeven wordt door – een punt en de richtingscoëfficiënt; – twee punten.	25

f44	B	Uit de grafiek van een eerstegraadsfunctie het voorschrift bepalen.	
f45	B	De tekenverandering van een eerstegraadsfunctie onderzoeken en interpreteren op de grafiek.	24
f46	B	Vraagstukken oplossen waarbij – het verband beschreven wordt door een eerstegraadsfunctie; – de vergelijking van een rechte moet opgesteld worden.	

Pedagogisch-didactische wenken

38 Bij de voorbeelden in de inleiding op reële functies worden de leerlingen geconfronteerd met de vier mogelijkheden waarmee een functie kan bepaald worden. Daaruit blijkt dat het voorschrift het middel is om een functie te bepalen. De grafiek, voor zover er vanuit gegaan wordt dat ze volledig gekend is op grond van het getekende deel, vervult die rol ook. Een tabel van functiewaarden kan daartoe ook gebruikt worden, al geeft die relatief beperkte informatie over het geheel van de functie.

Leerlingen moeten inzien dat een verband wordt beschreven met een functievoorschrift van de eerste graad, als de grafiek ervan een rechte is. En omgekeerd is de grafiek van een functie met een voorschrift van de eerste graad een rechte. Dit proces moet leiden tot een hanteerbare definitie van eerstegraadsfunctie met behulp van het functievoorschrift.

Er moet gelet worden op een correct taalgebruik: een punt ligt op een rechte, terwijl een coördinaat een oplossing is van een vergelijking van de rechte; een functie f met voorschrift $f(x) = mx + q$ heeft een grafiek, die grafiek heeft in een coördinatenstelsel een vergelijking $y = mx + q$.

39 De leerlingen hebben in de eerste graad kennis gemaakt met een grafische voorstelling van het verband tussen recht evenredige grootheden. De gevonden coördinatenkoppels liggen op een ‘rechte’. Nu de reële getallen gekend zijn, kan deze voorkennis een zinvol uitgangspunt zijn om de grafiek van eerstegraadsfuncties op te bouwen.

Deze doelstelling moet ruim geïnterpreteerd worden. Leerlingen moeten een idee hebben van de punt voor punt constructie van een grafiek. Zo kunnen ze bijv. een tabel van functiewaarden opstellen, de bijbehorende punten tekenen, nog tussenliggende koppels berekenen, om uiteindelijk vast te stellen dat de grafiek een rechte is. De grafische mogelijkheden van rekenmachine en computer kunnen hier het beeld van een effectieve punt voor punt constructie versterken.

Vanuit de meetkunde weten leerlingen dat een rechte kan bepaald worden met een *minimum* aan gegevens, bijv. twee punten of een punt en een rechte waaraan ze evenwijdig is. Analytisch vertaalt zich dat in een meer praktische werkwijze om het functievoorschrift op te stellen, met name op grond van de coördinaten van twee punten of van de coördinaat van een punt en de richtingscoëfficiënt van de rechte. Verwijzend naar enkele meer algemene voorbeelden uit de inleiding op functies moeten ze kunnen inzien dat slechts eerstegraadsfuncties een rechte als grafiek hebben.

De grafiek van een eerstegraadsfunctie is een rechte. Het voorschrift van de functie kan gekoppeld worden aan de algemene vergelijking van die rechte (zie f42). Bij de ontwikkeling van de eerstegraadsfuncties kan dus meteen een deel van de ‘analytische meetkunde’ opgebouwd worden.

40 De gekende techniek van het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen kan hier gekoppeld worden aan het bepalen van het nulpunt van de overeenkomstige functie of aan het bepalen van het snijpunt van de rechte met de eerste coördinaatas (of de grafische interpretatie).

Bij een gegeven grafiek zal men ook grafisch het nulpunt aflezen. De leerlingen worden op deze wijze geconfronteerd met een eerste vorm van ‘benadering’ van een nulpunt. Ze kunnen hier een voordeel ervaren van het werken met functievoorschriften en een algebraïsch algoritme voor het ‘exact’ oplossen van vergelijkingen. Anderzijds bestaan er functies waarbij dat niet altijd mogelijk is. Het grafisch benaderen van een oplossing biedt dan soms een oplossing.

41 Op basis van voorbeelden over recht evenredige grootheden kan het verband geëxpliciteerd worden tussen formule, grafiek en de functie met voorschrift $f(x) = mx$. Dat de grafiek een rechte is kan o.m. afgeleid worden met gelijkvormigheid van driehoeken (cf. hoek met de eerste coördinaatas).

Snel blijkt dat m een idee geeft over de *helling* van de rechte en bijgevolg over de richting van de rechte.

De betekenis van de term richtingscoëfficiënt wordt hierdoor duidelijk. Hier kan al een verband gelegd worden met het begrip *differentiequotiënt* (quotiënt van de toename van de afhankelijke veranderlijke en de toename van de onafhankelijke veranderlijke). De richtingscoëfficiënt kan in verband gebracht worden met het stijgen of dalen van de grafiek.

Bij de functie met voorschrift $f(x) = mx + q$ gaat de evenredigheid tussen x-waarden en de bijbehorende functiewaarden verloren. Evenredigheid is er wel tussen de toenamen van x en de bijbehorende toenamen van de functiewaarden (cf. differentiequotiënt). De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = mx + q$ is de grafiek van $f(x) = mx$, die onderworpen werd aan een *verschuiving* volgens de tweede coördinaatas waarvan de grootte en de zin bepaald worden door q. Hieruit kan meteen volgen dat evenwijdige rechten eenzelfde richtingscoëfficiënt hebben.

42 De grafiek van een eerstegraadsfunctie is een rechte. De vergelijking is van de vorm $y = mx + q$. Die expliciete vorm kan omgewerkt worden tot de meer algemene vergelijking $ax + by + c = 0$. De relatie tussen de coëfficiënten van de verschillende vormen van de vergelijking kan gelegd worden. Omgekeerd kan de algemene vorm van de vergelijking van de eerste graad in 2 onbekenden omgewerkt worden tot de expliciete vorm, op voorwaarde dat b ≠ 0. De vergelijking $ax + by + c = 0$ kan dan omgevormd worden tot $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Hieruit is af te leiden dat $-\frac{a}{b}$ de richtingscoëfficiënt van deze rechte is. Met deze vorm kan een functie van de eerste graad bepaald worden. Veeleer dan dit als zoveelste formule te laten memoriseren, kan dit als werkwijze aangeleerd worden. Als in de algemene vergelijking b wel nul is (en a ≠ 0), dan stelt ze een rechte voor evenwijdig aan de y-as. Deze vorm is niet herleidbaar tot een functievoorschrift en kan als tegenvoorbeeld aan bod komen.

43 De leerlingen hebben dit verband tussen de coördinaatgetallen (x, y) van de punten van een rechte al onderzocht bij de grafiek van een eerstegraadsfunctie. Hier worden basisformules opgesteld voor rechten die aan bepaalde voorwaarden voldoen, enerzijds door een gegeven punt en met gegeven richtingscoëfficiënt en anderzijds door twee gegeven punten. Formules die aan bod kunnen komen zijn: $y - y_0 = m(x - x_0)$ en $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Voor de tweede vorm bestaat het alternatief van het berekenen van de richtingscoëfficiënt van de rechte met behulp van de coördinaten van de twee gegeven punten met gebruik van de formule $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, waarna de eerste formule wordt toegepast.

Het opstellen van vergelijkingen van rechten moet ingeoefend worden met vele concrete voorbeelden en toepassingen. Zo kan bij het opstellen van een vergelijking van een rechte die aan bepaalde voorwaarden voldoet, al gewerkt worden met de methode van onbepaalde coëfficiënten. Ook het probleem van evenwijdige rechten kan aan bod komen. Als de twee gegeven punten op een rechte liggen evenwijdig aan één van de coördinaatassen wordt spontaan het probleem van de richtingscoëfficiënt gesteld.

44 Een eenvoudige instap kan zijn het associëren van gegeven grafieken aan een reeks gegeven voorschriften. Daarbij komt het eerder aan op het verifiëren, dan op het zelf opzoeken van de elementen.

Als de grafiek van een eerstegraadsfunctie gegeven is, kan men soms de waarden van m en q uit het functievoorschrift grafisch aflezen (de toename van f(x) bij een toename van x met 1 of de verhouding van de toename van f(x) tot de toename van x voor de richtingscoëfficiënt m, de grootte van de afsnijding op de y-as voor q).

Een andere mogelijkheid om het functievoorschrift te bepalen is het aflezen van twee stellen coördinaatgetallen zodat de vergelijking van de rechte door die twee punten kan opgesteld worden. Explicitering van de afhankelijke veranderlijke geeft het functievoorschrift. Voor het opstellen van de vergelijking kan gekozen worden voor een werkwijze met behulp van onbepaalde coëfficiënten.

Leerlingen moeten bij het aflezen van coördinaatgetallen oog leren hebben voor 'nauwkeurigheid'. Zo zullen ze uitkijken naar punten met een stel gehele coördinaten of met eenvoudige coördinaten zoals die van het nulpunt. Dit is niet altijd mogelijk, wat de beperktheid van de procedure aangeeft.

Als toepassingen kunnen hier oefeningen aangeboden worden op het opzoeken van het voorschrift van constante functies en van functies met een meervoudig voorschrift.

46 Als toepassing worden enkele vraagstukken behandeld die aanleiding geven tot een beschrijving met een functie van de eerste graad met twee onbekenden. Hierbij komt het omzetten in wiskundige vorm (het

mathematiseren) door geschikte keuze van de onbekenden expliciet aan bod.

In deze toepassingssituaties kunnen voor de berekeningen van de karakteristieken van de eerstegraadsfuncties ICT-hulpmiddelen gebruikt worden, bijv. de ingebouwde oplosser voor nulpunten, het grafisch aflezen van nulpunten (cf. vergelijkingen), teken (cf. ongelijkheden), snijpunten of onderlinge ligging van twee functies (cf. rechter- en linkerlid van gelijkheid of ongelijkheid). Het is evident dat in eenvoudige situaties het manueel rekenen zinvol blijft.

Met behulp van vergelijkingen kunnen een aantal meetkundige problemen opgelost worden. Daartoe kan men een aantal gekende meetkundige situaties beschrijven met behulp van coördinaten of vergelijkingen, bijv. de vergelijking van een zwaartelijn in een driehoek opstellen.

3 Stelsels van vergelijkingen

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f47	B	Bij een gegeven verbale situatie een stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden opstellen.	25
f48	B	Een stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden algebraïsch oplossen.	25
f49	B	Vraagstukken oplossen door gebruik te maken van stelsels van vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.	25

Pedagogisch-didactische wenken

47 De leerlingen beschikken al over het model vergelijking om bepaalde situaties tussen twee veranderlijke grootheden te mathematiseren. Een aantal probleemsituaties leidt tot een systeem van twee (of meer) dergelijke vergelijkingen. Het aanpakken van stelsels vanuit voldoende vraagstukken moet waarborgen dat leerlingen vertrouwd geraken met deze nieuwe vorm van modellering.

Stelsels van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden kunnen geassocieerd worden met het bepalen van het snijpunt van twee rechten. Dit leidt tot het grafisch aflezen van de coördinaat van het snijpunt en tot algebraïsche methoden om dit nauwkeuriger te bepalen. In de praktijk komen stelsels voor in allerlei situaties waar het verband met de meetkundige situatie minder duidelijk is. De moeilijkheid voor leerlingen is daarbij niet zozeer de oplossingstechniek zelf, dan wel het kiezen van de onbekenden, het opstellen van de vergelijkingen aan de hand van de beschreven situatie. Daarom is het zinvol hierop enkele afzonderlijke oefeningen te voorzien, zonder dat noodzakelijk onmiddellijk de oplossing wordt berekend.

48 De vergelijkingen van een stelsel kunnen in een assenstelsel voorgesteld worden als rechten (bijv. met ICT-hulpmiddelen). De oplossing van het stelsel kan grafisch afgelezen worden. Zo nodig kan een nauwkeurige oplossing berekend worden door gebruik van de daartoe geëigende middelen van de grafische rekenmachine of computer (bijv. met intersect).

Soms is het zinvol de oplossing van een stelsel zo exact mogelijk te bepalen. Daartoe kunnen als algebraische oplossingsmethoden de gelijkstellingsmethode, de combinatie- en de substitutiemethode aangeleerd worden. Als basis kan men zich eventueel tot één methode beperken. De inoefening kan dus beperkt worden. Als geopteerd wordt voor het aanbrengen van slechts één enkele algebraïsche methode kan gekozen worden voor de gelijkstellingsmethode, omdat ze het meest aangepast is voor het werken met functievoorschriften. Daartegenover staat dat de combinatiemethode interessant is voor sommige toepassingen en gemakkelijk veralgemeenbaar is (onder meer bij ICT-gebruik).

Als men wil dat de leerlingen een adequate keuze kunnen maken tussen de verschillende methoden is een brede inoefening wel noodzakelijk. Toch moet dit afgewogen worden tegen de beschikbare lestijden.

Met ICT-hulpmiddelen kan deze grafische oplossingswijze eventueel als controlemiddel gehanteerd worden bij andere oplossingsmethoden.

49 Bij het oplossen van vraagstukken op stelsels krijgen de leerlingen weer kansen om probleemoplossende vaardigheden te verwerven. Ze moeten leren een beschreven situatie te mathematiseren. Bij het analytisch oplossen van een probleem ondervinden de leerlingen daarbij 'nieuwe' moeilijkheden. Ze moeten het verband tussen gegevens en tussen gegevens en gevraagde leren analytisch te omschrijven, bijv. het kiezen van de onbekenden en het opstellen van de verschillende vergelijkingen. De leerlingen hebben hiermee vaak meer problemen dan met het uitvoeren van rekentechnieken voor het berekenen van de oplossing van het stelsel. Het gebruik van ICT-hulpmiddelen voor het effectieve rekenwerk kan hier meer tijd vrij maken voor aandacht aan dit mathematiseringsproces.

4 Lineaire programmatie

Als het aantal wekelijkse lestijden wiskunde 4 bedraagt, dan wordt de doelstellingen van dit onderdeel aangezien als uitbreiding. Als het aantal wekelijkse lestijden wiskunde wordt uitgebreid tot *5 lestijden*, dan worden de doelstellingen van dit onderdeel aangezien als *basis*doelstellingen.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	**Et**
f50	U	Een ongelijkheid van de eerste graad met één onbekende oplossen.	
f51	U	Vraagstukken oplossen die leiden tot een ongelijkheid van de eerste graad met één onbekende en de oplossing grafisch voorstellen en/of symbolisch noteren.	
f52	U	Een ongelijkheid van de eerste graad met twee onbekenden oplossen en de oplossing grafisch voorstellen.	
f53	U	Een stelsel van twee ongelijkheden van de eerste graad met twee onbekenden oplossen en de oplossing grafisch voorstellen.	
f54	U	Een eenvoudig probleem op lineair programmeren met twee veranderlijken oplossen.	

Pedagogisch-didactische wenken

In de realiteit worden we vaak geconfronteerd met verschillende wegen om een bepaald probleem of situatie te bekijken. Een probleem kan ook niet één juist oplossing hebben, maar een ruimere verzameling. Soms zijn we geïnteresseerd in een minimale oplossing (bijv. een minimale kost) of een maximale oplossing (bijv. maximaal rendement of voordeel). De veranderlijken die een rol spelen zijn vaak aan beperkende voorwaarden onderhevig (bijv. een positief aantal, cf. productieaantallen, of een fabriek kan niet meer dan 24 uur per dag open zijn, de capaciteit van een productieketen is beperkt). Dit leidt tot ongelijkheden of vergelijkingen. De vraag naar minimale of maximale doelmatigheid leidt tot een 'doelfunctie'. De oplossing is de optimalisering van die functie. De voorwaarden samen maken een stelsel van ongelijkheden en/of vergelijkingen. De oplossing van het stelsel geeft de verzameling van de mogelijkheden aan. Daarvan kan de 'optimale' waarde gezocht worden (met isolijnen).

Een voorwaarde om deze problemen van 'lineaire programmatie' te kunnen oplossen is dat de leerlingen ongelijkheden en stelsels van ongelijkheden hebben leren oplossen. De doelstellingen over ongelijkheden en stelsels ongelijkheden worden daarom in dit onderdeel opgenomen. Een mogelijke oplossingsweg voor ongelijkheden is deze met behulp van de tekenverandering van de verwante eerstegraadsfunctie. Ongelijkheden kunnen daarom ook in dat leerstofonderdeel geïntegreerd worden.

50 *Uitbreiding*

Zowel het algebraïsch als het grafisch oplossen van ongelijkheden van de eerste graad met één onbekende kan hier aan bod komen. Een mogelijkheid is de (grafische) oplossing te verbinden met de tekenverandering van de bijbehorende eerstegraadsfunctie (cf. f45). Het verband met het voorstellen van de oplossingen op een geijkte rechte ligt voor de hand (cf. eerste coördinaatas).

De eigenschappen van ongelijkheden zijn geen doel op zich, maar dienen toegepast te worden bij het oplossen van de ongelijkheden of om de gelijkwaardigheid van twee ongelijkheden aan te geven. In het bijzonder zal aandacht besteed worden aan de verandering van de zin van de ongelijkheid bij het vermenigvuldigen van beide leden van een ongelijkheid met een negatief getal.

51 *Uitbreiding*

Zoals geldt voor vergelijkingen dient het oplossen van ongelijkheden met één onbekende in $\mathbb{R}$ geïntegreerd te worden in het aanbieden van realiteitsbetrokken *vraagstukken*.

In verband met het gebruik van ICT-hulpmiddelen geldt voor ongelijkheden een analoge opmerking als voor vergelijkingen. Bij meer ingewikkelde vormen kan een rekenmachine of software ingeschakeld worden. Als het verband gelegd wordt met eerstegraadsfunctie(s), kan de oplossing van de ongelijkheid grafisch afgelezen worden of bepaald worden door het vergelijken van de onderlinge ligging van twee eerstegraadsfuncties (bijv. welk is het gebied waarin de functie bepaald door het rechterlid groter is dan deze bepaald door het linkerlid).

De leerlingen moeten de oplossing symbolisch kunnen noteren. Dit betekent de oplossing schrijven met behulp van een interval of een unie van intervallen. Dit kan ondersteund worden vanuit het grafisch aanduiden van de oplossingsverzameling. Het biedt ook een gelegenheid waarbij leerlingen het voordeel kunnen waarderen van een beknopte wiskundige schrijfwijze.

52 *Uitbreiding*

Hier moet de oplossing grafisch voorgesteld worden. Het begrip halfvlak is nog niet aan bod gekomen.

Het is niet zinvol een aantal kale oefeningen te maken op dit onderdeel, vermits het uitvoeren van dergelijke oefeningen slechts kadert in de hele ontwikkelingslijn naar de lineaire programmatie toe.

53 *Uitbreiding*

Ook hier moet de oplossing zeker grafisch voorgesteld worden, waarbij de doorsnede van twee halfvlakken aan bod moet komen. Hier geldt dezelfde bedenking over de aard van de oefeningen.

Omdat dit onderdeel gericht is op eenvoudige oefeningen op lineaire programmatie kan hier eventueel al een begrenzing aangebracht worden van positieve veranderlijken (cf. realistische situaties zijn allicht met positieve veranderlijken).

54 *Uitbreiding*

Het oplossen van een probleem op lineaire programmatie verloopt in een aantal stappen. Achtereenvolgens: een formule voor de doelfunctie opstellen, de beperkende voorwaarden omzetten in ongelijkheden (of vergelijkingen), het toegestane gebied in een assenstelsel aangeven (door middel van het oplossen van het stelsel van ongelijkheden), het optimum van de doelfunctie berekenen, de gevonden waarde(n) interpreteren in de context.

Vermits het de eerste kennismaking betreft met dit soort problemen en de leerlingen maar over beperkte kennis beschikken in verband met het oplossen van stelsels (vergelijkingen en ongelijkheden) zal men zich beperken tot eenvoudige duidelijke en haalbare problemen. Een beperking van het aantal ‘voorwaarden’ tot vier is daarom zinvol.

5.7 Leerplan c - tweede leerjaar

Dit leerplan is voorzien voor vier wekelijkse lestijden wiskunde. Als het aantal wekelijkse lestijden wiskunde wordt uitgebreid tot *vijf* lestijden, dan worden de doelstellingen van het onderdeel ***5.7.5 Rijen, telproblemen en rekenen met kansen*** *basis*doelstellingen.

5.7.1 MEETKUNDE

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **meetkunde** worden ca. **28** lestijden besteed

de cirkel	ca. 14 lestijden
driehoeksmeting	ca. 14 lestijden

1 De cirkel

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m1	B	Eigenschappen in verband met straal, koorde en apothema onderzoeken, bewijzen en gebruiken.	26
m2	B	De onderlinge ligging van een cirkel en een rechte onderzoeken en de definitie van raaklijn formuleren.	
m3	B	Eigenschappen in verband met middelpuntshoeken en omtrekshoeken onderzoeken, bewijzen en gebruiken.	26
m4	B	Meetkundige constructies uitvoeren en verklaren, zoals: – de raaklijn in een punt van een cirkel; – raaklijnen uit een punt aan een cirkel; – de ingeschreven cirkel van een driehoek; – de omgeschreven cirkel van een driehoek.	26

Pedagogisch-didactische wenken

In dit deel meetkunde blijft de essentie het *onderzoeken van meetkundige figuren en hun eigenschappen*. Het verdient aanbeveling daarbij gebruik te maken van een grafische rekenmachine of software die de analyse van dergelijke figuren toelaat. De vraag daarbij is: waarom gebeurt, wat we zien op het scherm, op deze wijze.

Met het onderdeel cirkel wordt voor de meeste leerlingen het onderdeel (vlakke) meetkunde afgerond. Uiteraard zal de meetkundekennis van de vorige jaren, bijv. congruentie, gelijkvormigheid, Pythagoras, betrokken worden bij de verwerking en integratie van dit onderdeel. Voor het toepassen van de eigenschappen moet zowel gezocht worden in het vlak als in de ruimte.

1 Leerlingen zijn vanuit hun vooropleiding vertrouwd met het *zelf onderzoeken* van eigenschappen. De eigenschappen die hier bedoeld worden zijn relatief eenvoudig en kunnen door middel van een goede didactische aanpak hoofdzakelijk via zelf onderzoeken gevonden en verklaard worden.

Eigenschappen die in aanmerking komen zijn onder meer: middelloodlijn van een koorde en omgekeerd, verband lengte apothema's en koorden, middellijn en symmetrie.

2 Het vergelijken van de afstand van het middelpunt van de cirkel tot een rechte en de straal van die cirkel leidt tot informatie over de onderlinge ligging van een rechte en een cirkel. Dat onderzoek leidt tot het begrip raaklijn aan de cirkel. Het begrip 'raken' komt hier voor het eerst specifiek aan bod. Omdat dit een belangrijk wiskundig begrip is, waarmee leerlingen nog meermaals geconfronteerd zullen worden, moeten de 'kenmerkende eigenschappen' onderzocht en geformuleerd worden.

3 De relatie tussen middelpuntshoek en omtrekshoek op eenzelfde koorde (of boog) kan onderzocht en verklaard worden. De toepassingen zullen in de eerste plaats gericht zijn op een praktisch gebruik van de eigenschappen in berekeningen van hoeken (bijv. omtrekshoek op een middellijn).

Uitbreiding

Als toepassing kunnen omtrekshoeken bepaald worden waarbij een been raaklijn is aan de cirkel.

Een andere toepassing is de bespreking van de begrippen binnen- en buitenomtrekshoek en de berekening van hun grootte in functie van middelpuntshoeken.

4 De constructies van cirkels die aan gegeven voorwaarden voldoen en van raaklijnen aan cirkels moeten tegelijk *teken- en denkproblemen* zijn. De leerlingen moeten daarbij een verklaring kunnen geven over de gebruikte technieken en procedures en waarom die een antwoord bieden op de gestelde problematiek.

De constructie van de ingeschreven cirkel en de omgeschreven cirkel van een driehoek is een aanleiding om de eigenschap van het snijden in één punt van respectievelijk de bissectrices en de middelloodlijnen van een driehoek aan te tonen.

2 Driehoeksmeting

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m5	B	De sinus, de cosinus en de tangens van een hoek definiëren in een goniometrische cirkel.	
m6	B	De verbanden tussen de goniometrische getallen van verwante hoeken onderzoeken, formuleren en verklaren met behulp van de goniometrische cirkel.	
m7	B	Het verband onderzoeken tussen de begrippen hellingshoek en richtingscoëfficiënt van een rechte.	
m8	B	De sinusregel en cosinusregel toepassen bij het oplossen van vraagstukken.	

Pedagogisch-didactische wenken

5 De definities van *sinus en cosinus* van een georiënteerde hoek worden vastgelegd met behulp van de coördinaatgetallen van zijn beeldpunt op de goniometrische cirkel. Met behulp van gelijkvormige driehoeken krijgt de tangens een meetkundige interpretatie.

Het aflezen en het interpreteren van de uitlezing bij het gebruik van een *rekenmachine* moet voldoende aandacht krijgen.

Op basis van de definities en eigenschappen (bijv. Pythagoras, gelijkvormige driehoeken) kunnen de betrekkingen tussen de goniometrische getallen van eenzelfde hoek, die in het eerste leerjaar van de tweede graad werden afgeleid voor scherpe hoeken, veralgemeend worden en/of uitgebreid.

6 Uitgaande van de betekenis van de goniometrische getallen op de goniometrische cirkel en op basis van meetkundige eigenschappen (bijv. van spiegelingen t.o.v. van de coördinaatassen en hun invloed op de coördinaten) kunnen de relaties tussen de goniometrische getallen van verwante hoeken (i.c. tegengestelde hoeken, complementaire hoeken en supplementaire hoeken) afgeleid worden. Belangrijk hierbij is dat de goniometrische cirkel als hulpmiddel voor het terugvinden van de betrekkingen functioneert. Deze formu-

les kunnen ondersteunend werken bij het terugzoeken van een hoek uitgaande van een van zijn goniometrische getallen door middel van een rekenmachine.

De relaties tussen de goniometrische getallen van een hoek onderling en tussen die van verwante hoeken kunnen gebruikt worden om goniometrische uitdrukkingen te herleiden naar een eenvoudigere gedaante. Bij het 'bewijzen van goniometrische identiteiten' zal dit eenvoudiger maken voorop staan. De moeilijkheidsgraad van de oefeningen wordt bewust niet te complex gemaakt.

7 Let wel. Het verband tussen de tangens van de hellingshoek en de richtingscoëfficiënt geldt ten opzichte van een orthonormaal assenstelsel. Leerlingen gebruiken deze regel wel eens verkeerd in situaties die daaraan niet voldoen.

8 Bij het *oplossen van vraagstukken in willekeurige driehoeken* ligt de kennis van de sinusregel en de cosinusregel voor de hand. De regels zullen voor de leerlingen plausibel gemaakt worden met voorbeelden. Het bewijs ervan behoort niet tot de basiskennis.

Het oplossen van driehoeken wordt best gesitueerd in het oplossen van problemen. Leerlingen moeten dan aandacht besteden aan de interpretatie van de resultaten. Bovendien worden zo al te extreme berekeningen vermeden. Het gebruik van ICT-hulpmiddelen voor het effectieve rekenwerk kan hier meer tijd vrij maken voor aandacht aan het mathematiseringsproces.

Men kan aandacht besteden aan het berekenen van allerlei elementen van de driehoek, zoals hoogtelijn, zwaartelijn, oppervlakte van de driehoek, …. Zo komen een aantal problemen uit de synthetische meetkunde nog eens op een andere wijze aan bod. Bij het oplossen van driehoeken zal aandacht besteed worden aan *ruimtelijk gesitueerde problemen*.

3 Toepassingen in het vlak en de ruimte

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m9	B	Gebruik maken van schetsen en tekeningen bij het oplossen van problemen gesteld in vlakke en beperkte ruimtelijke situaties.	26
m10	B	Gebruik maken van begrippen en elementaire eigenschappen bij het oplossen van problemen in vlakke en ruimtelijke situaties.	26

Pedagogisch-didactische wenken

9 Leerlingen moeten bij het onderzoeken en het oplossen van allerlei problemen ook in ruimtelijke situaties behoorlijke voorstellingen hanteren die hun redenering duidelijk maken. Zeker als tekeningen gebruikt worden om een redenering te onderbouwen (te verklaren), zal voldoende nauwkeurigheid aan de dag gelegd worden. Overigens is de onnauwkeurigheid een argument om meer aandacht te besteden aan het opbouwen van een verklaring gesteund op 'zekere' eigenschappen.

10 De leerlingen moeten de gekende meetkundige begrippen en eigenschappen leren gebruiken om meetkundige problemen op te lossen, zowel in het vlak als in de ruimte. Oefeningen waarbij lengten en hoeken berekend worden, moeten zeker aan bod komen. Daarna kan men beperkt aandacht besteden aan het afleiden en verklaren van nieuwe eigenschappen.

Het best worden deze toepassingen niet opgenomen in een afzonderlijk deeltje, maar aangesloten bij de behandeling van de eigenschappen zelf.

Pedagogisch-didactische wenken

Zoals in het eerste leerjaar van de tweede graad kan ook hier gewerkt worden aan het samenstellen van een hanteerbare gereedschapskist meetkunde. Dat wil zeggen: het aanleggen van een verzameling meetkundige eigenschappen, die vlot kunnen toegepast worden bij het onderzoeken van meetkundige situaties, het verklaren van eigenschappen, het oplossen van meetkundige problemen. Een vlotte en soepele verwoording ervan en een duidelijke visuele ondersteuning kunnen de toepasbaarheid vergroten. Ze moeten een duidelijk en hanteerbaar kader vormen, waarop de leerling kan terugvallen. Dit betekent niet dat de leerlingen dergelijke overzichten moeten memoriseren. Het overzicht moet wel beschikbaar zijn. Dat kan bijvoorbeeld in de vorm van een *'vademecum'*. Zo'n lijst kan geleidelijk (gespreid over de verschillende leerjaren) en samen met de leerlingen worden opgebouwd (bijv. een synthesetaak na een hoofdstuk).

Mogelijke aanvullingen voor de vlakke meetkunde:

- Eigenschappen over de relaties in een cirkel tussen koorden, hun middelloodlijn, apothema's en straal.
- Eigenschappen over de raaklijnen (aan een cirkel) uit een punt buiten de cirkel.
- Eigenschappen van middelpunts- en omtrekshoeken, en hun onderlinge relaties.

In functie van hetgeen men wil bereiken in de ruimtemeetkunde kunnen eventueel ook enkele eigenschappen in de gereedschapskist worden opgenomen.

5.7.2 REËLE FUNCTIES

	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **reële functies** worden ca. **35** lestijden besteed

functies van de tweede graad in één veranderlijke	ca. 25 lestijden
elementaire begrippen in verband met functies	ca. 10 lestijden

1 Functie van de tweede graad in één veranderlijke

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f11	B	De definitie geven van een functie van de tweede graad in één veranderlijke.	
f12	B	De grafiek van $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ (grafisch) opbouwen vanuit de parabool met vergelijking $y=x^2$ en daarbij – de top en de as van de grafiek bepalen, – de coördinaat van de snijpunten met de x-as bepalen.	
f13	B	Aantonen dat de vergelijking $y=ax^2+bx+c$ kan worden omgevormd tot de vorm $y=a(x-\alpha)^2+\beta$.	
f14	B	De formule voor het algebraïsch oplossen van een tweedegraadsvergelijking bewijzen en toepassen.	
f15	B	De nulpunten van een tweedegraadsfunctie bepalen en grafisch interpreteren.	
f16	B	Onderzoeken of een drieterm van de tweede graad te ontbinden is in factoren van de eerste graad.	
f17	B	De grafiek van een tweedegraadsfunctie tekenen gebruik makend van top, as, ...	
f18	B	Het verloop van de tweedegraadsfunctie onderzoeken.	
f19	B	Het voorschrift van een tweedegraadsfunctie opstellen als de top en een punt van de grafiek gegeven zijn.	
f20	B	Gemeenschappelijke snijpunten van twee grafieken algebraïsch interpreteren.	
f21	B	Vraagstukken oplossen die aanleiding geven tot een vergelijking van de tweede graad in één onbekende of waarbij het verband beschreven wordt door een tweedegraadsfunctie.	

	Pedagogisch-didactische wenken

11 Het begrip tweedegraadsfunctie kan verklaard worden vanuit een aantal betekenisvolle voorbeelden waarvoor de tweedegraadsfunctie het accurate beschrijvingsmodel is. De relaties tussen de vier elementen die een functie kunnen bepalen (situatie, tabel, grafiek en voorschrift) worden besproken.

De grafiek van de functie kan in deze fase al met een punt voor punt constructie getekend worden. Het gebruik van de grafische mogelijkheden van een rekenmachine of de computer kan de beeldvorming ondersteunen. Bij de punt voor punt constructie moeten leerlingen wel inzien dat tussenliggende punten niet met lineaire interpolatie kunnen bepaald worden.

12 Kan men met de moderne technologie vrij snel de grafiek bekomen van een ‘willekeurige’ tweedegraadsfunctie, het proces waarin de grafiek in een aantal stappen ontwikkeld wordt vanaf de parabool met verge-

lijking $y = x^2$ met behulp van transformaties (zoals horizontale en verticale verschuiving, uitrekking, inkrimping) geeft een rijk inzicht in de samenhang tussen de grafieken onderling en tussen de grafieken en hun voorschrift. Uiteraard kan de grafische rekenmachine of de computer ingeschakeld worden om snel en handig voorbeelden voort te brengen die het leerproces kunnen ondersteunen.

Leerlingen hebben in hun vooropleiding het verband gezien tussen de coördinaten van punten die symmetrisch liggen t.o.v. een (spiegel)as (in hoofdzaak x-as en y-as). Dit kan hier gebruikt worden om de naam 'as' te verantwoorden. De letters α en β krijgen betekenis in verband met as en top.

Door de verschuiving β kan de grafiek snijpunten hebben met de eerste coördinaatas. De coördinaten van de snijpunten kunnen berekend worden uit $a(x-\alpha)^2+\beta = 0$. Meteen is de basis gelegd om de vergelijking van de tweede graad op te lossen of de nulpunten van de tweedegraadsfuncties te bepalen. Het spreekt vanzelf dat deze leerinhouden hier geïntegreerd aan bod kunnen komen.

13 Het proces waarin de grafiek van de tweedegraadsfunctie ontwikkeld wordt vanaf de parabool met vergelijking $y = x^2$ met behulp van transformaties leidt tot de voorstelling van functies met voorschrift $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$. En daaruit volgt op natuurlijke wijze de vraag of een tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2+bx+c$ tot dergelijke vorm terug te brengen is. Dit leidt tot de berekening van de relaties tussen a, b en c enerzijds en α en β anderzijds en tot het inzicht dat elke tweedegraadsfunctie met voorschrift $f(x) = ax^2+bx+c$ voorgesteld wordt door een parabool.

14 De leerlingen kunnen sommige tweedegraadsvergelijkingen al oplossen door middel van ontbinding in factoren. Voor andere leidt het leerproces opgezet voor de realisatie van doelstellingen f12 en f13 tot een oplossingswijze. Op voorwaarde van een positieve discriminant biedt de opgestelde formule een algemeen algoritme. Naast een zekere automatisering van de werkwijze moet het oplossen van vierkantsvergelijkingen gekoppeld worden aan het oplossen van een aantal vraagstukken.

Men zal de leerlingen wijzen op een niet-verantwoord gebruik van de formule bij 'eenvoudige' oefeningen, bijv. onvolledige vierkantsvergelijkingen (bijv. van de vorm $2x^2 - 7x = 0$) of vormen die opvallend geen nulpunten hebben (bijv. van de vorm $4x^2 + 3 = 0$).

15 Het bepalen van nulpunten van de tweedegraadsfunctie komt neer op het oplossen van een tweedegraadsvergelijking. De grafische betekenis van nulpunt wordt uitgelegd.

Een mogelijke interpretatie van het bepalen van nulpunten is de doorsnede bepalen van de grafiek met niveaulijn nul. Dit laat een veralgemening toe, naar het bepalen van de snijpunten met andere niveaulijnen (of de doorsnede van een tweedegraadsfunctie en een constante functie).

16 De formule voor het oplossen van de tweedegraadsvergelijking kan toegepast worden bij het ontbinden in factoren van een drieterm van de vorm ax^2+bx+c. De leerlingen kennen nu de voorwaarde waaronder dit al of niet kan. Ze kunnen de ontbinding uitvoeren voor drietermen waar die niet voor de hand ligt. Het kennen van een algemene formule mag niet leiden tot het uitschakelen van de andere ontbindingsvormen, als die voordeliger (sneller) zijn. Ook het gebruik van de som en het product van de wortels en het inzicht in getallen leidt soms tot een snellere werkwijze.

17 In het kader van het realiseren van tekenvaardigheden mag in deze computertijd aandacht besteed worden aan het behoorlijk tekenen van een grafiek. Enige kwaliteitseisen aan de grafiek zijn hier op hun plaats.

18 Het onderzoeken van de grafiek van een tweedegraadsfunctie leidt tot inzichten in de tekenverandering, het stijgen en dalen van de grafiek en het herkennen van een extreme waarde bij de top.

19 Het onderzoek van een aantal situaties kan tot het inzicht leiden dat een tweedegraadsfunctie volledig vastgelegd wordt door bepaalde voorwaarden (bijv. top en een punt gegeven, drie punten gegeven) en door andere niet (bijv. twee nulpunten gegeven, as en een punt gegeven). De leerlingen kunnen hier al geconfronteerd worden met een werkwijze met 'onbepaalde coëfficiënten'. Een verdere toepassing is dat leerlingen op grond van een gegeven grafiek zelf een aantal voorwaarden bepalen waarmee ze het functievoorschrift kunnen opstellen. Hierbij kan nog eens gewezen worden op de wisselwerking tussen de vier mogelijkheden waarmee een functie kan aangeboden worden.

20 In concrete situaties kunnen situaties onderzocht worden waarbij twee gekende grafieken snijden: de doorsnede bepalen van een rechte en een parabool. Daarbij moet zowel de numerieke berekening uitgevoerd worden, als de grafische oplossing onderzocht worden. Het snijden van rechte en parabool kan leiden tot het onderzoeken wanneer een rechte rakend zal zijn aan een parabool. Een verwijzing naar de

werkwijze bij de raaklijn aan een cirkel ligt voor de hand.

21 De tweedegraadsfunctie en de tweedegraadsvergelijking hebben een ruim toepassingsgebied. Een aantal concrete situaties kan hier de toepassing van wiskunde in allerlei gebieden illustreren. Hier liggen veel kansen om leerlingen te wijzen op het gebruik van probleemoplossende vaardigheden, zoals het leren een probleem om te zetten naar een wiskundige vorm, het gepast kiezen van onbekenden, het uitvoeren van oplossingstechnieken en het interpreteren van resultaten. Zo leren leerlingen hun wiskundekennis te gebruiken in toepassingen in andere vakken.

Het oplossen van *vraagstukken* op tweedegraadsfuncties komt vaak neer op het oplossen van een vierkantsvergelijking. Daarnaast zouden andere vragen aan bod moeten komen, zoals de vraag naar het stijgen of dalen van de functie of het bereiken van een extremum. Ook hier is het zinvol de vraagstukken niet in geïsoleerde lessen aan te bieden, maar ze te integreren als toepassingen op de leerinhouden.

In toepassingssituaties kunnen eenvoudige stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden, waarvan een van de tweede graad, aan bod komen.

2 Elementaire begrippen in verband met functies

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
f22	B	De grafiek herkennen van de volgende elementaire functies en het verband leggen met het voorschrift $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.	
f23	B	De grafiek schetsen van de functies $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ uitgaande van een tabel van coördinaten van een aantal van haar punten.	
f24	U	Uit de grafiek van een aantal voornoemde functies met voorschrift $f(x)$ de grafiek van de functies met voorschrift $f(x) + k$, $f(x + k)$, $kf(x)$ grafisch opbouwen.	
f25	B	Met behulp van de grafiek het verloop van voornoemde functies onderzoeken, o.m. de nulpunten, de tekenverandering, het stijgen en dalen, het voorkomen van een extreme waarde, symmetrie in de grafiek.	

Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen werden doorheen de tweede graad geconfronteerd met een aantal aspecten van functieleer. Het is zinvol deze vast te zetten onder de vorm van een *synthese* over de verschillende aspecten (bijv. het domein, het bereik, de invloed van coëfficiënten, de nulpunten, de tekenverandering, het stijgen en dalen, het voorkomen van extreme waarden, symmetrie in een grafiek). Dit kan door een overzicht te maken in het bijzonder van de eerste en de tweedegraadsfunctie. Dit is meteen het kader waartegen enkele nieuwe functies aan bod kunnen komen en waarin bepaalde aspecten (zoals de invloed van coëfficiënten) nog eens extra benadrukt worden. Een aantal van deze functies zal voor een aantal leerlingen in de derde graad een algemenere gedaante krijgen (bijv. homografische functies, rationale functies, irrationale functies). In die zin kan dit onderdeel beschouwd worden als een overgang naar de derde graad waar functiecategorieën in hun algemeenheid aan bod kunnen komen en kan het de leerlingen ondersteunen in hun keuzeproces naar het volume wiskunde in hun verdere vorming.

22 Waar mogelijk worden zinvolle situaties aangeboden waar de relaties tussen de vier elementen die een functie kunnen bepalen (situatie, tabel, grafiek en voorschrift), kunnen worden besproken.

De grafiek van de functie wordt met een punt voor punt constructie getekend. In een manueel uitgewerkt voorbeeld zal men er over waken dat een voldoend aantal punten wordt berekend en uitgezet. Leerlingen kunnen hier, door opeenvolgende verfijning van het puntenraster, al meteen geconfronteerd worden met het inzicht dat een grafiek tussen twee uitgezette punten anders kan verlopen dan ze in een oppervlakkige aanpak vermoedden. Het gebruik van de grafische mogelijkheden van een rekenmachine of de computer zal de beeldvorming ondersteunen. In de praktijk volstaat meestal dat de leerlingen een vlugge schets van de grafiek kunnen maken.

De functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $f(x) = \frac{1}{x}$ zijn niet bepaald voor elke reële waarde van x. Dit leidt tot het begrip domein. Dit moet hier aan bod komen, als het nog niet eerder besproken werd. Zonder de theorie over asymptoten te behandelen kan aandacht besteed worden aan het gedrag van de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ voor grote x-waarden (in absolute waarde) en voor waarden naderend naar nul.

24 *Uitbreiding*

De bedoeling is elementair kennis te maken met het effect van transformaties op de grafiek van een functie en het verband met coëfficiënten uit het voorschrift.

De leerlingen hebben bij de eerstegraadsfunctie, de tweedegraadsfunctie en eventueel de sinusfunctie al kunnen onderzoeken wat de invloed is van coëfficiënten. Deze voorbeelden kunnen nu veralgemeend worden voor de hoger genoemde functies.

25 De nulpunten van de basisfuncties (genoemd onder f22) zijn vrij eenvoudig te bepalen. Eveneens aan bod kunnen komen: de tekenverandering, het stijgen en dalen, het bereiken van een maximum en/of minimum, het vertonen van symmetrie (bijv. t.o.v. assen).

Uitbreiding

Voor de functies genoemd onder f24 kan een redenering opgezet worden, gebruik makend van de transformatie die uitgevoerd wordt. Wat gebeurt er met het nulpunt bij bijv. een verticale verschuiving en omgekeerd? Welke waarde wordt daarbij op nul afgebeeld? (En eventueel door de asymptoten, die voor de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ werden gevonden, aan dezelfde transformatie te onderwerpen als de functie, worden asymptoten bepaald voor de functies van de vorm f(x + k), ….)

5.7.3 ALGEBRAÏSCH REKENEN

	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **algebraïsch rekenen** worden ca. **14** lestijden besteed.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
g26	B	De Euclidische deling uitvoeren van veeltermen in één veranderlijke.	
g27	B	De reststelling bij deling door x - a bewijzen.	
g28	B	De deling van een veelterm door x - a uitvoeren door middel van de regel van Horner.	
g29	B	De reststelling toepassen in vraagstukken.	
g30	B	Tweetermen van de vorm $a^3 - b^3$ en $a^3 + b^3$ ontbinden in factoren.	

	Pedagogisch-didactische wenken

26 Het algebraïsch rekenen werd al aangezet in de eerste graad. Die lijn begon met ‘letters die de plaats innemen van getallen’ tot ‘met die lettervormen kan gerekend worden zoals met getallen’. Als bewerkingen zijn aan bod gekomen: optelling, aftrekking, vermenigvuldiging van tweetermen en drietermen met ten hoogste twee veranderlijken. De deling werd beperkt tot delen van eentermen, vooral gericht op het ontbinden in factoren (het ‘afzonderen’ van een gemeenschappelijke factor). Wat ontbreekt, wordt nu afgewerkt: veeltermen delen door een eenterm en delen door een veelterm.

Waar nodig kan het algebraïsch rekenen *gedifferentieerd herhaald* worden, zonder evenwel een reeks kale rekenvaardigheidsoefeningen te maken (bijv. als proef op de deling kan het quotiënt en de deler vermenigvuldigd worden en met de rest vermeerderd). De tijd hiervoor is wel beperkt!

De hoofdeigenschap van het delen bij natuurlijke getallen, die het verband uitdrukt tussen deeltal, deler, quotiënt en rest, behoort tot de leerinhouden van het eerste leerjaar van de eerste graad. De verklaring van de formule was daar uitbreidingsleerstof. Een korte herhalingsfase lijkt aangewezen indien dit als uitgangspunt van het leerproces bij veeltermen wordt genomen.

28 De regel van Horner wordt hier aangebracht als verkorte vorm voor de deling door x - a, zonder te vervallen in overmatig rekenwerk.

29 Mogelijke toepassingen zijn oefeningen met onbepaalde coëfficiënten, bijv. de rest berekenen bij deling door (x - a)(x - b) als de rest gekend is van de delingen door x - a en door x - b, het voorschrift van een derdegraadsfunctie waarin een parameter(s) voorkom(en)t bepalen als de rest(en) van de deling door tweetermen van de vorm x - a gegeven zijn.

5.7.4 BESCHRIJVENDE STATISTIEK

	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **beschrijvende statistiek** worden ca. **15** lestijden besteed.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	**Et**
s31	B	Verschillende soorten gegevens herkennen.	
s32	B	Aan de hand van voorbeelden het belang uitleggen van de representativiteit van een steekproef voor het formuleren van statistische besluiten over een populatie.	
s33	B	Vragen beantwoorden in verband met de betekenis van de frequenties van gegevens in een frequentietabel en ze interpreteren.	28
s34	B	Verschillende grafische voorstellingen van statistische gegevens gebruiken en interpreteren.	28
s35	B	Gemiddelde en mediaan, bij een reeks gegroepeerde gegevens berekenen en interpreteren.	29
s36	B	Variantie, standaardafwijking en interkwartielafstand, bij een reeks individuele of gegroepeerde gegevens berekenen en interpreteren.	29

	Pedagogisch-didactische wenken

De hoofdbedoeling van beschrijvende statistiek is *het ordenen, het samenvatten, het overzichtelijk voorstellen en het interpreteren van gegevens* afkomstig van allerlei situaties uit diverse disciplines.

Leerlingen moeten in de eerste plaats leren *aangeboden informatie kritisch* te *analyseren* en te *beoordelen*. Het hoofdaccent van de verwerking van dit onderdeel 'beschrijvende statistiek' ligt dus op het interpreteren van gegeven voorstellingen en informatie. Maar daarbij kan wel vermeld worden dat het zelf verwerken van een reeks gegevens, het berekenen van een aantal parameters en het grafisch voorstellen van de informatie kan leiden tot een beter inzicht in het proces (bijv. de indeling van gegevens in klassen bij een voorstelling op een rekenmachine of computer kan beter begrepen worden als men zelf geconfronteerd wordt met het indelen van een reeks gegevens in zinvolle klassen). Toch zal men zich hierbij dan beperken tot relatief eenvoudig te verwerken reeksen, zodat het omslachtige rekenwerk het inzicht niet in de weg staat. Anderzijds zullen leerlingen een sterkere motivatie ondervinden als ze gegevens moeten verwerken die betrekking hebben op hun leefwereld. Binnen dit hoofdstuk is die aansluiting zeker mogelijk door gebruik te maken van allerlei enquêtes uit jongerentijdschriften.

Het *zelf verwerken van informatie* met behulp van statistische voorstellingsmiddelen en het bespreken van parameters die een maat aangeven over de gegevens en de spreiding ervan komen pas in de tweede plaats aan bod. Het opzetten van een beperkte bevraging in de klas of in de school en de statistische verwerking van de verzamelde gegevens als synthese kunnen een aantal belangrijke vaardigheden en attitudes ontwikkelen zoals samenwerken in groep, communicatie, planning, organisatie, hanteren van de wiskundetaal in alledaagse situaties, kritische analyse van de resultaten en de besluitvorming. Het verwerken van gegevens die ze zelf verzameld hebben, bijv. door middel van een zelf opgestelde of uitgevoerde enquête, kan de motivatie weer versterken. Het opstellen van een enquête biedt dan weer mogelijkheden om vanuit vakoverschrijdende contacten te werken.

Voor het verwerken en voorstellen van statistische gegevens is heel wat *software* beschikbaar op de rekenmachine en de computer. Een radicale keuze voor het gebruik ervan, die het handmatig rekenwerk tot een minimum beperkt is aangewezen. Zo komt tijd vrij voor interpretatieactiviteiten.

31 De leerlingen moeten geconfronteerd worden met allerlei materiaal dat statistisch verwerkt werd, bijv. uit kranten of tijdschriften, gegevens beschikbaar op informatiedragers zoals Internet, …. Aan de hand van goed gekozen voorbeelden moet, uiteraard op een elementair niveau, het onderscheid duidelijk worden tussen verschillende soorten van data. Mogelijkheden daarbij zijn: onderscheid tussen kwalitatieve of kwantitatieve gegevenstypes (bijv. er zijn al of niet berekeningen mogelijk), of tussen gegevenstypes al naargelang de ge-

hanteerde (of mogelijk te hanteren) meetschalen (bijv. nominaal (indeling in categorieën), ordinaal (bepalen van rangorde), intervalinvariant (temperatuur) of verhoudingsinvariant (lengte)), of tussen gegevenstypes al naargelang ze behoren tot een discreet of continu berekeningstype (al of niet nauwkeurig te bepalen).

32 Bij het onderzoeken van concrete voorbeelden van statistische verwerking (bijv. in kranten- of tijdschriftenartikels) moet voldoende tijd besteed worden aan de omschrijving van de populatie, van de steekproef en de samenstelling van de steekproef, van de onderzoeksvraag.

Voorbeelden:

Hoe zal men de gemiddelde lengte van de Vlaamse bevolking onderzoeken (zal men dan 'willekeurige' metingen kunnen beperken tot deze aan een kleuterschool, of aan het lokaal van de plaatselijke basketploeg)?
Als men wil nagaan wat de partijvoorkeur is van de inwoners van een bepaalde gemeente, doet men dan de waarnemingen in één willekeurige straat, aan een partijlokaal, op de marktdag, …?
Bij een telefonische enquête sluit men personen zonder telefoon uit. Bij een schriftelijke enquête kan men geen rekening houden met enquêteformulieren die niet werden teruggestuurd.
Het werken met een kleine steekproef heeft een invloed op de betrouwbaarheid van de conclusies.

Belangrijk is wel dat leerlingen zelf creatief naar eigen voorbeelden zoeken om bepaalde voorwaarden, bij het opstellen van een steekproef, te onderbouwen. Het heeft geen zin hier enkele voorbeelden te laten memoriseren.

Een mogelijke werkwijze is in een eerste fase de verwerking en interpretatie van cijfergegevens te bestuderen op duidelijke voorbeelden (bijv. kleine populaties). Nadat verschillende onderzoeken en interpretaties over dezelfde onderzoeksvragen bovenkomen, kan in een tweede fase de vraag naar de extrapolatie van de resultaten en de interpretatie vanuit een beperkte groep (steekproef) naar een ruimere populatie aan bod komen. De leerlingen beschikken dan al over voorbeelden om de problematiek van omschrijving van populatie, steekproef en onderzoeksvraag te onderbouwen.

32 Het ordenen van de gegevens gebeurt aan de hand van een frequentietabel. Hiervoor worden de begrippen *absolute frequentie, relatieve frequentie, cumulatieve frequentie en cumulatieve relatieve frequentie* ingevoerd.

Als het aantal gegevens te groot is, worden ze gegroepeerd in klassen. Het zijn niet de frequenties van de individuele gegevens die nu gebruikt worden, maar die van de klassen. Hierbij moeten termen aangebracht worden zoals klassenbreedte, klassenmidden. Om de betekenis van klassenbreedte mee te geven kan men bijv. bij eenzelfde reeks gegevens de klassenbreedte veranderen en de invloed op de voorstelling illustreren. Alleszins moeten de leerlingen ermee geconfronteerd worden dat samenvatten van informatie (bijv. bij het groeperen) verlies aan informatie betekent.

33 In de media worden gegevens vaak grafisch voorgesteld. De leerlingen zijn vanuit de eerste graad vertrouwd met voorstellingen zoals staaf-, strook en schijfdiagram. Het is aangewezen dat de leerlingen deze frequent voorkomende *grafische voorstellingen* leren *lezen en interpreteren*, d.w.z. er vragen over beantwoorden.

Het interpreteren houdt in dat men oog heeft voor de aard van de voorstelling, de schaalverdeling, de keuze van de oorsprong en eenheden, de keuze van de klassenbreedte, …, om daaruit de informatie die achter de gegevens ligt te ontdekken. Daarbij hoort de vraag waarom bepaalde voorstellingen gebruikt worden om bepaalde kenmerken van bepaalde veranderlijken weer te geven. Daarbij kan geïllustreerd worden hoe soms misbruik gemaakt wordt van voorstellingen, met als gevolg een verkeerde besluitvorming. Hierdoor leren de leerlingen kritisch omgaan met aangeboden informatie.

Als nieuwe mogelijke voorstellingen kunnen aan bod komen: stengel- en bladdiagram; histogram, frequentieveelhoek en ogief. (Noot: de laatste drie termen worden bij voorkeur gebruikt voor situaties waarin de gegevens als 'continu' verlopend kunnen worden aangezien, bijv. bij gegroepeerde gegevens.) Bij het histogram en de frequentieveelhoek wordt gewezen op de eigenschap dat de oppervlakte ervan gelijk is aan de steekproefgrootte.

Uitbreiding

De leerlingen kunnen aan de hand van een enquête of bevraging in de klas of de school zelf een aantal gegevens verzamelen, die zelf verwerken en zelf een aangepaste voorstelling ervan maken. Er wordt wel over gewaakt dat, het leerproces meer te maken heeft met het inzicht in de verwerking van statistische gegevens, dan met het turven van een veelheid van gegevens. In die zin is het gebruik van de statistische functies, met inbegrip van de grafische mogelijkheden, van een rekenmachine of een computer aangewezen.

34 Een verdere stap in het beschrijven van gegevens is het opzoeken van *parameters* die ze samenvatten. Op die manier kunnen onder meer reeksen gegevens met elkaar vergeleken worden. Een eerste reeks parameters zijn de *centrummaten*: gemiddelde en mediaan. Ze zijn voor niet-gegroepeerde gegevens al aan bod gekomen in de eerste graad. Ze geven een waarde die ongeveer het midden van de gegevens aanduidt. Aan de hand van concrete voorbeelden wordt hun betekenis en het praktische gebruik ervan verklaard. Voor gegroepeerde gegevens wordt voor mediaan een eenvoudige oplossing gekozen, bijv. het midden van de mediale klasse. De meer complexe oplossingen kunnen eventueel in de latere vorming van de leerlingen snel geassimileerd worden.

Leerlingen moeten de beperktheid van de door centrummaten verkregen informatie leren relativeren. Zonder een maat voor de spreiding betekenen ze niet veel. Daarom is het zinvol centrum- en spreidingsmaten samen aan te brengen aan de hand van een aantal concrete voorbeelden. Daarna kunnen samenvattend de verschillende begrippen vastgelegd worden.

Omwille van het inzicht in de betekenis en de procedures is het zinvol het principe van de berekening aan te brengen en even in te oefenen. Voor de praktische berekeningen in opgaven en praktische problemen wordt bij voorkeur een rekenmachine of een computer gebruikt.

35 Statistische gegevens met dezelfde centrummaten kunnen van elkaar verschillen door hun spreiding rond deze parameters. Daarover kunnen een tweede reeks parameters, de *spreidingsmaten*, informatie geven: m.n. variantie, standaardafwijking, *interkwartielafstand* en eventueel percentielen. Variantie en standaardafwijking zijn klassiek veel gebruikte parameters, waarvan de berekening moeilijker kan uitvallen. De rekenmachine is hierbij aangewezen. De interkwartielafstand is gemakkelijker te berekenen en laat toe relatief snel een globale indruk van de gegevens te verkrijgen. Aan de hand van concrete voorbeelden wordt hun betekenis en het praktische gebruik ervan verklaard.

Een voorstelling van gegevens die eerder nog niet ter sprake kon komen is de *boxplot*. Ze geeft een interessante indruk van de spreiding van de gegevens, omdat ze opgesteld wordt met gebruik van enkele van de hoger genoemde parameters, m.n. de mediaan en de kwartielen.

5.7.5 RIJEN, TELPROBLEMEN EN REKENEN MET KANSEN

Als het aantal wekelijkse lestijden wiskunde vier bedraagt, dan wordt dit onderdeel aangezien als uitbreiding. Als het aantal wekelijkse lestijden wiskunde wordt uitgebreid tot *vijf*, dan worden de doelstellingen van dit onderdeel aangezien als *basis*doelstellingen.

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan ***rijen, telproblemen en rekenen met kansen*** *worden ca. 20 lestijden besteed*

(rijen	*ca. 10 lestijden uitbreiding)*
(telproblemen en rekenen met kansen	*ca. 10 lestijden uitbreiding)*

1 Rijen

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
g37	U	Van een gegeven rij vaststellen of het een rekenkundige of een meetkundige rij is.	
g38	U	Bij een rekenkundige of meetkundige rij een formule gebruiken om de algemene term af te bepalen.	
g39	U	Bij een rekenkundige of meetkundige rij een formule gebruiken om de som van de eerste n termen te berekenen.	
g40	U	Vraagstukken oplossen in verband met rekenkundige of meetkundige rijen.	

Pedagogisch-didactische wenken

37 In de eerste graad werden getallenrijen onderzocht op mogelijke *regelmaat* in de opbouw ervan. In een aantal rijen kan een getal op een willekeurige plaats afgeleid worden uit (het) vorige(n).

Hier worden systematisch twee bijzondere soorten rijen onderzocht: *de rekenkundige rij en de meetkundige rij*. Ze beschrijven op discrete wijze twee belangrijke groeiprocessen: *de lineaire en de exponentiële groei*. Anderzijds is het zinvol de leerlingen te wijzen op de relatieve beperktheid van beide ‘systemen’ om rijen op te bouwen. De leerlingen moeten geconfronteerd worden met een aantal andere soorten rijen, bijvoorbeeld *de rij van Fibonacci*.

38 De leerlingen kunnen onderzoeken hoe ze een andere term van de rij kunnen bepalen als een aantal termen van een rekenkundige of meetkundige rij gegeven zijn. Uitgangspunt is allicht dat de eerste termen van de rij gegeven zijn, met de vraag de rij verder te zetten. Dit proces leidt tot formules waarmee ze een willekeurige term kunnen berekenen.

39 Eenzelfde werkwijze wordt gevolgd voor de berekening van *de som van de eerste n termen*. Als toepassing kan de som van de eerste n natuurlijke getallen berekend worden. Gezien de tijd voor dit onderwerp beperkt is, is het niet de bedoeling ingewikkelde oefeningen op deze formules te maken.

40 Als toepassing van rekenkundige en meetkundige rijen kan de *logaritme* aangebracht worden.

Rekenkundige rijen en meetkundige rijen kunnen allerlei vraagstukken verwerkt worden. Voorbeelden: de jaarlijkse groei bij enkelvoudige intrest, de groei van een salaris met een constante jaarlijkse toename, de stapelwijze van palen, de jaarlijkse groei bij samengestelde intrest, een aangroei van een bacteriepopulatie, de afstand tot de grond van een botsende bal, de omtrek en de oppervlakte van een rij in elkaar ingebedde vierkanten (telkens vanuit de middens van de zijden), enz.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
g41	U	Een boomdiagram, een venndiagram of een schema gebruiken bij het oplossen van een telprobleem.	
g42	U	Het aantal elementen bepalen van de doorsnede, de vereniging of het verschil van eindige verzamelingen in functie van het oplossen van telproblemen.	
g43	U	Het aantal elementen bepalen van het complement van een eindige verzameling in functie van het oplossen van telproblemen.	
g44	U	Bij eenvoudige kansexperimenten beslissen of alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn of niet.	
g45	U	De kans berekenen van een uitkomst in een situatie waarin alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.	
g46	U	Een schema (onder meer een boomdiagram) gebruiken om kansen te bepalen.	
g47	U	Het begrip kans interpreteren in termen van relatieve frequenties.	
g48	U	In een situatie met statistische gegevens kansen schatten met relatieve frequenties.	

Pedagogisch-didactische wenken

41 In allerlei situaties moeten op een verstandige of handige wijze aantallen geteld worden (bijv. hoeveel autonummerplaten kunnen in het Belgische systeem uitgereikt worden). Zonder de gebruikelijke formules van de combinatieleer op te stellen kunnen *eenvoudige telproblemen* toch meer systematisch aangepakt worden, bijvoorbeeld door ze voor te stellen met een boomdiagram, een venndiagram of een ander schema. Tellen wordt dan het aantal wegen, deelverzamelingen, mogelijke gebieden zoeken. Hier komt dus vooral de schematische aanpak van een probleem tot uiting. Twee belangrijke regels kunnen eenvoudig geïllustreerd worden, de som- en de productregel. De terminologie in verband met permutatie, variatie en combinatie komt aan bod in de derde graad.

44 Het gooien van een eerlijk muntstuk of van een normale dobbelsteen zijn voorbeelden van *kansexperimenten* waarbij elke uitkomst *even waarschijnlijk* is. Door middel van gepaste voorbeelden zoals het opgooien van een punaise of van de kwaliteitscontrole van gloeilampen kan gewezen worden op voorbeelden waarbij niet altijd elke uitkomst even waarschijnlijk is.

Om zinvol op het begrip kans te kunnen ingaan moeten leerlingen het onderscheid leren maken tussen situaties met uitkomsten met een gelijke waarschijnlijkheid (bijv. op grond van symmetrieoverwegingen) en situaties met uitkomsten waarbij dat niet geldt. In het ene geval kan de kans ‘berekend’ worden bijv. met de formule van Laplace, in het andere geval zal men de kans experimenteel moeten schatten.

45 Het is hier zeker niet de bedoeling het begrip kans axiomatisch op te bouwen. Een minimale terminologie is echter wel vereist (bijv. gebeurtenis, uitkomst, …). Voor het bepalen van een kans wordt *de formule van Laplace* gebruikt (het aantal gunstige gevallen gedeeld door het aantal mogelijke gevallen). Er dient verder op gewezen te worden dat deze formule alleen kan gebruikt worden in een kansexperiment waarbij alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.

Bij de voorbeelden beperkt men zich niet tot het berekenen van individuele of enkelvoudige uitkomsten. Ook verzamelingen van uitkomsten kunnen berekend worden, maar vermits begrippen zoals variatie en combinatie niet aan bod komen kan dit beperkt blijven tot eenvoudige situaties.

46 Bij de berekening van kansen waarbij de uitkomsten niet even waarschijnlijk zijn, kan het gebruik van schema’s zoals boomdiagrammen een uitweg bieden en komt de leerstof in verband met de telproblemen van pas.

47 Het begrip kans kan op natuurlijke wijze gekoppeld worden aan *relatieve frequentie*. Zeggen dat de kans op vijf ogen bij het gooien van een dobbelsteen gelijk is aan een zesde is zo te interpreteren, dat ongeveer

een zesde van het aantal worpen een 5 oplevert bij een groot aantal keer opgooien. Het verband tussen kans en relatieve frequentie moet geregeld geëxpliciteerd worden, zowel bij het aanbrengen van het kansbegrip, als bij de interpretatie van resultaten.

48 In de beschrijvende statistiek hebben de leerlingen kennisgemaakt met het begrip relatieve frequentie. Vanuit een groot aantal experimenten wordt het begrip kans bepaald met behulp van 'relatieve frequentie'. Wat is het aandeel van een uitkomst in het totale aandeel? Dit biedt de mogelijkheid om ruimere problemen te bestuderen en bijv. kansexperimenten aan te pakken waarbij niet alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.

Een interessante toepassing is het raadplegen van sterftetabellen i.v.m. overlevingskansen van bepaalde leeftijdsgroepen, zoals in gebruik in de actuariële wiskunde. Hier wordt de gelegenheid geboden kansen te berekenen vanuit tabellen opgebouwd uit statistisch onderzoek. Het is belangrijk de leerlingen zeker te laten aanvoelen dat niet alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn en dat dus niet steeds de formule van Laplace aangewezen is voor kansberekeningen.

leerplan d

drie wekelijkse lestijden wiskunde

KSO-studierichtingen

Artistieke opleiding
Audiovisuele vorming
Beeldende en architecturale kunsten
Muziek
Woordkunst-drama

TSO-studierichtingen

Bio-esthetiek
Bouwtechnieken
Brood en banket
Creatie en mode
Elektrotechnieken
Fotografie
Grafische media
Handel-talen
Hotel
Houttechnieken
Lichamelijke opvoeding en sport
Mechanische technieken
Plant-, dier- en milieutechnieken
Slagerij en vleeswaren
Sociale en technische wetenschappen
Textieltechnieken
Toerisme
Voedingstechnieken
Topsport

5.8 Leerplan d - eerste leerjaar

5.8.1 MEETKUNDE

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **meetkunde** worden ca. **35** lestijden besteed

de stelling van Pythagoras	ca. 10 lestijden
congruentie van driehoeken	ca. 10 lestijden
driehoeksmeting	ca. 10 lestijden
omtrek, oppervlakte, inhoud	ca. 5 lestijden

Pedagogisch-didactische wenken

Door de studie van de meetkunde moeten leerlingen methoden verwerven om *meetkundige problemen* te herkennen en op te lossen, zowel in het vlak als in de ruimte. De leerlingen wordt een aantal begrippen, eigenschappen en methodes meegegeven waarmee ze deze problemen kunnen aanpakken. Een eerste belangrijke stap is het herkennen van deze elementen in de situatie, de opgave, de toepassing en het nauwkeurig stellen van het probleem in termen van gekende elementen. Een tweede is het correct uitvoeren van de werkwijzen die ze ter beschikking hebben. De klemtoon ligt eerder op het oplossen van problemen dan op een veelheid aan begrippen en eigenschappen die toepassingsloos gememoriseerd worden.

Meetkunde blijft het onderdeel waarbij de leerlingen het sterkst geconfronteerd worden met het onderbouwen van hun oplossingswegen met *argumenten*. Dit is voor hen zeker niet eenvoudig. Daarom is het zinvol hen van in het allereerste begin te betrekken bij het opbouwen van een dergelijke argumentatie. Er moet heel wat aandacht gaan naar het leergesprek waarin die ontwikkeld wordt. Het is belangrijker dat leerlingen een opgezette redenering ‘begrijpen’ en in hun eigen onvolmaakte woorden kunnen uitleggen, dan dat ze een gememoriseerd bewijs perfect kunnen reproduceren. Alhoewel zeker niet gemakkelijk, moet de nadruk toch liggen op het *zelf onderzoeken* van eigenschappen en het opzoeken van een verklaring. Hoe moeizaam deze zoektocht ook verloopt, het is zinvol hierin tijd te investeren, omwille van het effect op de vorming en de transfer die hiervan uitgaat op het zoeken, ook in andere dan wiskundige probleemstellingen. Leerlingen zelf exploratief te werk laten gaan betekent evenwel niet, dat dit proces niet kan ondersteund worden met gerichte vragen, dat er niet voor kan gekozen worden de leerstappen zo aan te bieden dat leerlingen gemakkelijker zelf tot een oplossing komen. Zo kan aandacht besteed worden aan enkele eenvoudige, gerichte herkenningsoefeningen (bijv. op congruentie in driehoeken).

1 Stelling van Pythagoras

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m1	B	De stelling van Pythagoras formuleren en de betekenis ervan met figuren illustreren.	26
m2	B	De stelling van Pythagoras gebruiken om de lengte van een lijnstuk te berekenen.	26
m3	B	De afstanden berekenen tussen twee punten in het vlak gegeven met hun coördinaten.	27
m4	B	De afstand berekenen tussen de hoekpunten van een balk als de lengten van de ribben gegeven zijn.	27
m5	B	Vraagstukken oplossen die betrekking hebben op de stelling van Pythagoras.	26

Pedagogisch-didactische wenken

1 De *stelling van Pythagoras* kan door voorbeelden geïllustreerd worden, bijv. door de interpretatie met oppervlakten van vierkanten. Wil men 'gehele' getallen als resultaat, dan is men uiteraard vrij beperkt in de mogelijkheden. Meer algemeen is het vergelijken van de verschillende oppervlakten meteen een oefening op het omgaan met benaderingen van resultaten.

Met behulp van een simulatieprogramma voor meetkunde kan voor een hele reeks rechthoekige driehoeken geïllustreerd worden dat de som van de oppervlakten van de vierkanten op de rechthoekszijden gelijk is aan de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde. Dit moet overtuigend werken voor de leerlingen. Het toepassen van dezelfde regel op niet-rechthoekige driehoeken levert tegenvoorbeelden en kan in de formulering van de eigenschap de wending 'in een rechthoekige driehoek' plausibel maken.

Naast de meet- en rekenaanpak kunnen met korte en liefst visuele redeneringen andere argumenten aangereikt worden, die onafhankelijk zijn van de concrete afmetingen.

Zo kan het 'bewijs' dat toegeschreven wordt aan Euclides visueel vertolkt worden: de oppervlakte van het vierkant op een rechthoekszijde wordt in verband gebracht met een deel van de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde door beide te vergelijken met de oppervlakte van goed gekozen driehoeken. Zo kunnen als oefening een aantal 'puzzels' aan bod komen over het herschikken van oppervlakten.

In de praktijk kunnen drietallen van Pythagoras gebruikt worden om een rechte hoek te construeren. De 3-4-5-regel, zoals gekend bijvoorbeeld in de bouw, kan hier ter sprake komen.

De toepassingen van de stelling van Pythagoras leiden op een natuurlijke wijze tot het begrip *vierkantswortel*. Dit begrip behoort al tot de kennis van de leerlingen vanuit de eerste graad, zonder evenwel uitgebreid aan bod te zijn gekomen. Ook nu blijft het begrip op gebruikersniveau functioneren, zonder een theorie over de vierkantswortel op te zetten of er uitgebreide rekenregels voor op te stellen. Wel moet ervoor gezorgd worden dat de leerlingen 'begrijpen' wat ze gebruiken. Dit houdt een minimale explicitering in van het begrip. Zo kan vermeld worden dat het een 'nieuwe' soort getallen betreft. Het gebruik van een *rekenmachine* om vierkantswortels te berekenen zal hier worden aangeleerd. Met de rekenmachine kunnen benaderende waarden voor deze getallen opgezocht worden. Zo krijgen vierkantswortels toch een aanvaardbare betekenis voor de leerlingen. De stelling van Pythagoras biedt de mogelijkheid om voor enkele van die getallen een lijnstuk te construeren met het gegeven getal als lengte.

3 De stelling van Pythagoras leidt op evidente wijze tot een formule om de *afstand* te berekenen tussen twee punten van het vlak gegeven door hun coördinaten in een cartesiaans assenstelsel.

Leerlingen kunnen doorheen de oefeningen ervaren dat het soms zinvol is in een coördinatensysteem te werken. Een oefening waarbij een kaart voorzien wordt van 'coördinaten' laat toe de afstand tussen twee punten te bepalen en de lengte van bepaalde 'wegen' te berekenen.

4 De stelling van Pythagoras kan toepast worden om afstanden tussen de hoekpunten van een balk te berekenen. Het is niet de bedoeling de formule voor de afstand tussen twee punten in de ruimte te gebruiken. Wel wordt gewerkt in verschillende stappen, waarbij telkens gebruik gemaakt wordt van een vlakke situatie. Het is daarbij nodig aandacht te besteden aan het zichtbaar, transparant maken van de vlakke situatie. Het inzicht in de probleemstelling zal versterkt worden als de leerlingen zich een adequate voorstelling kunnen maken van de ruimtelijke situatie en het gebruikte 'vlak'. Op zich versterkt dit het ruimtelijk inzicht en het ruimtelijk voorstellingsvermogen.

5 *Meetkundige vraagstukken* zijn voor de leerlingen niet eenvoudig. Vaak hebben ze hiertegen een niet te veronachtzamen tegenstand opgebouwd. Daarom zal ervoor gezorgd worden dat de besproken problemen gesteld worden in voor leerlingen haalbare situaties en in een taal die hen aanspreekt. Dat betekent ondermeer dat de leraar oog heeft voor een *gradatie in moeilijkheidsgraad*, bijvoorbeeld van kale, in het oog springende toepassingen, over ingeklede oefeningen, naar wat meer verholen toepassingen. Dat telkens aandacht besteed wordt aan het 'stellen' van het probleem, vanuit de situatie, de opgave, …. Dat in een eerste fase een tekening beschikbaar is, dat men een dergelijke tekening leert analyseren en uiteindelijk opstellen. En dat betekent dat de leraar de leerlingen wijst op een heuristische methode als die gebruikt wordt of als dat aangewezen is (zie hiervoor het algemeen deel probleemoplossend werken bij 5.1), …. Dat houdt meteen in dat hiervoor voldoende tijd moet uitgetrokken worden. Opdat leerlingen vooruitgang zouden boeken is geduldig werk van de leraar en een voldoend aantal oefeningen nodig. Maar het resultaat loont zeker de moeite.

De stelling van Pythagoras moet toegepast worden in allerlei *meetkundesituaties*. Daarvoor staan de situaties uit m2, m3 en m4 model, d.w.z. de lengte van een lijnstuk, de afstand tussen twee punten in een vlak of op een ruimtefiguur berekenen. Zo bijvoorbeeld: de diagonaal van een vierkant of een rechthoek; de hoogte van een gelijkzijdige driehoek; de lengte van de diagonalen van een kubus of een balk. De te berekenen zijde hoeft niet enkel de schuine zijde te zijn, bijvoorbeeld: bereken de zijde van een vierkant als de lengte van een diagonaal gegeven is; bereken de lengte van een rechthoek als de lengte van een diagonaal en de breedte gegeven zijn; bereken in een concrete figuur waarvan een aantal afmetingen gegeven zijn enkele andere afmetingen; controleer of een figuur met bepaalde afmetingen concreet gegeven wel de vereiste kenmerken heeft; onderzoek of een driehoek waarvan een aantal afmetingen gegeven zijn gelijkbenig is. Ook *ruimtelijke situaties* moeten aan bod komen, bijvoorbeeld: bereken de hoogte van een piramide; bereken de lengte van een ribbe van een vierzijdige rechte piramide als de zijde van het grondvlak en de hoogte gegeven zijn; bereken de omtrek van de gelijkzijdige driehoek gevormd door drie diagonalen in verschillende zijvlakken van een kubus; bereken de lengte van lijnstukken op gegeven ruimtefiguren als bepaalde afmetingen gegeven zijn, bijv. een lijnstuk begrensd door de middens van twee ribben van een kubus.

2 Congruentie van driehoeken

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m6	B	Congruente driehoeken definiëren.	
m7	B	Congruentiekenmerken van driehoeken formuleren en verklaren door een tekening.	
m8	B	Congruentiekenmerken van driehoeken gebruiken om in vlakke figuren een gelijkheid van lengten en/of hoeken te onderzoeken en te verklaren.	26
m9	B	Meetkundige problemen oplossen, ook in ruimtelijke situaties door gebruik van begrippen en eigenschappen in verband met driehoeken en vierhoeken.	26

Pedagogisch-didactische wenken

6 De leerlingen hebben in de eerste graad kennis gemaakt met *congruente figuren*. Slechts de leerlingen die wiskunde hebben gekregen op basis van het leerplan a hebben het begrip verder uitgewerkt. Bij de andere bleef dit beperkt tot het ‘herkennen’ van congruente figuren. Door de moeilijkheden die heel wat leerlingen met dit begrip hebben, is het te verwachten dat de opbouw van dit begrip opnieuw heel wat aandacht moet krijgen.

Voor sommige leerlingen zal het zeker nog zinvol zijn oefeningen te maken op het herkennen of *analyseren* van ‘gelijke’ patronen in voorstellingen en vlakvullingen (bijv. behangpapier, verpakkingsmateriaal, friezen van gebouwen, vloertegels, Escher-figuren). Zonder de transformaties formeel te hernemen kan er op gewezen worden dat een driehoek die verschoven, gedraaid of gespiegeld werd een congruente figuur oplevert. In de ontvouwing van bepaalde ruimtefiguren komen ‘congruente’ figuren voor (bijv. de ontvouwing van een piramide kan aanleiding geven tot congruente driehoeken, cf. bepaalde tetrabrikken).

Leerlingen kunnen van figuren zeker zeggen of ze gelijk van maat en vorm zijn. Dat kan gecontroleerd worden door de figuren op elkaar te leggen, door de lengten van de zijden en de grootte van de hoeken te meten en te vergelijken. Het intuïtieve begrip ‘gelijk van maat en vorm’ krijgt een meer wiskundige vertolking. Bij driehoeken leidt dit tot de definitie van congruentie met de gelijkheid van de zes overeenkomstige elementen (zijden en hoeken).

7 In hoofdzaak moeten de leerlingen hier ervaren dat niet alle zes elementen moeten gegeven worden opdat een driehoek zou bepaald zijn, en welke dan wel volstaan en welke niet om de driehoek te kennen.

Ze moeten ervaren dat er een ‘verband’ bestaat tussen zijden en hoeken van een driehoek, zo onder meer: tegenover de grootste zijde ligt de grootste hoek (bijv. in een driehoek waarvan de zes elementen gegeven zijn, kan je ze zomaar niet in een willekeurige volgorde samenbrengen); niet met alle opgegeven lengten kan een driehoek gemaakt worden (driehoeksongelijkheid); met drie gegeven zijden ligt de grootte en de vorm van de driehoek vast (metaalconstructies bij bruggen), met drie hoeken niet noodzakelijk. Om al te veel tijdrovende ‘constructies’ hier te vermijden kan eventueel gewerkt worden met didactisch materiaal (stokjes voor zijden, hoekstukjes in hout, plastiek of karton, vouwmeter, constructiespeelgoed) dat handig kan ingeschakeld worden of snel in en uit elkaar kan genomen worden.

Bij tekenopdrachten van driehoeken waarvan de zes elementen gegeven zijn merken de leerlingen vrij snel dat, als ze werken met drie ‘goed gekozen’ elementen, de driehoek volledig vastligt. Dit leidt tot de *kenmerken*. Belangrijk zijn de tegenvoorbeelden, twee overeenkomstige elementen gelijk of drie overeenkomstige elementen gelijk, maar die niet aan de ‘voorwaarden’ voldoen, volstaan niet.

Het ontwikkelen van de kenmerken op basis van veel tekenwerk moet het later zoekproces in figuren ondersteunen. Het is zinvol, los van verder gebruik in een redenering, enkele situaties te onderzoeken waarbij congruentie tussen driehoeken kan getoond worden. De moeilijkheid voor vele leerlingen is daarbij het ‘zichtbaar’ maken in de tekening van de congruente figuren. (Dat is overigens een meer algemeen probleem bij meetkunde, waaraan heel wat aandacht kan besteed worden.) Daarom zal zeker gewerkt worden met eenvoudige figuren (bijv. waarbij bedekkingen vermeden worden) en zullen met behulp van kleur de figuren en de gebruikte overeenkomstige elementen aangegeven worden. Zo nodig kan met behulp van didactisch materiaal (bijv. uitgeknipte figuren) ‘reliëf’ in de figuur gebracht worden.

8 Eens de congruentiekenmerken geformuleerd en herkenbaar gemaakt in figuren moeten ze gebruikt worden om *meetkundeproblemen* op te lossen. Zo worden ze gebruikt om de gelijkheid van lijnstukken en hoeken te verklaren. Daartoe worden bij die lijnstukken en/of hoeken driehoeken gezocht waarvan ze overeenkomstige elementen zijn en waarvan de congruentie kan aangetoond worden. Ook hier zal aandacht besteed worden aan het transparant maken in de figuren van die lijnstukken, hoeken en driehoeken. De complexiteit van de situaties zal geleidelijk aan toenemen. In een eerste fase wordt de voorkeur gegeven aan figuren die elkaar niet bedekken.

Heel wat leerlingen hebben weinig inzicht in meetkundige figuren. Evenmin kunnen ze de redenering die tot de oplossing of de verklaring zal leiden zomaar ‘van voor af aan’ opstarten. Leerlingen moeten in een eerste stap duidelijk de betrokken lijnstukken en/of hoeken ‘zien’ in de tekening. Ze moeten dan een aantal driehoeken zien waarin deze als ‘element’ functioneren. Tussen deze gevonden figuren moeten ze dan op zoek gaan naar driehoeken die ‘congruent’ zijn. Eerst dan kan opgezocht worden welk het te gebruiken kenmerk zal zijn, en of dat te argumenteren is met de beschikbare gegevens. Als die argumenten gevonden worden, kan het besluit dat men verhoopte, geformuleerd worden. Dit proces kan afgesloten worden met een behoorlijk ‘samenvatten’ van de gevonden weg. En dat moet hier niet noodzakelijk op een vormelijke en wiskundig formele wijze.

Deze beschrijving van het proces bij de leerling maakt duidelijk dat het zoek- en leerproces bij hen eerder regressief zal gaan. De leraar, die uiteraard snel de oplossing zal zien, moet hier toch geduldig de weg van de leerling kiezen.

De eerste verklaring van de gebruikte congruentiekenmerken kan op basis van gemeten lengten en hoeken. De meetkundige verantwoording met eigenschappen blijft nog op de achtergrond. Het accent ligt op het ‘gebruik’ van de kenmerken. De interferentie met eventuele problemen met andere onderdelen van meetkunde is dan minimaal. Waar mogelijk zal men de leerlingen toch de stap laten zetten naar een verantwoording met eerder geziene meetkundige eigenschappen.

9 De congruentie is een van de belangrijkste middelen om een aantal eigenschappen in driehoeken of vierhoeken te *verklaren* (bijv. in verband met hoogtelijn, zwaartelijn, gelijkbenigheid, symmetrie, diagonaal in een parallellogram, …). Gezien de moeilijkheden die leerlingen ondervinden om meetkundige problemen op te lossen en die oplossing te verantwoorden, komt het er hier niet op aan een overzicht van alle mogelijke eigenschappen en toepassingen te maken. Wel moet het meetkundig problemen aanpakken behoorlijk kunnen functioneren. De leraar zal hier een zinvolle selectie maken in functie van de leerlingengroep, de studierichting en de perspectieven die leerlingen moeten behouden in de toekomst.

3 Driehoeksmeting in een rechthoekige driehoek

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m10	B	In een rechthoekige driehoek de sinus, de cosinus en de tangens van een scherpe hoek beschrijven als verhoudingen van twee van de zijden.	26
m11	B	De sinus, de cosinus en de tangens van een scherpe hoek bepalen met behulp van een rekenmachine.	
m12	B	De scherpe hoek bepalen met behulp van een rekenmachine als de sinus, de cosinus of de tangens ervan gegeven is.	
m13	B	Vraagstukken in een rechthoekige driehoek oplossen door gebruik van goniometrische verhoudingen.	26

Pedagogisch-didactische wenken

10 De begrippen *sinus*, *cosinus* en *tangens* van een scherpe hoek in een rechthoekige driehoek drukken de verhouding uit tussen de lengten van de zijden. De kennis van één van deze getallen laat toe de scherpe hoek ondubbelzinnig te bepalen. Als symbool voor de tangens van een hoek wordt gekozen voor ‘tan’, dat internationaal wordt aanbevolen en dat op de meeste rekenmachines gebruikt wordt.

De fundamentele formule $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ kan afgeleid worden met behulp van de stelling van Pythagoras en $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ kan verantwoord worden door het vergelijken van de verschillende verhoudingen.

11 Voor de praktische toepassingen wordt het gebruik van een *rekenmachine* aangeleerd. Rekening houdend met de hoeken waarmee de leerlingen in de praktijk effectief geconfronteerd zullen worden, kan men zich bij de meeste leerlingengroepen beperken tot hoeken uitgedrukt op een graad nauwkeurig. Dat laat meteen toe in de praktijk te werken met *decimaal* genoteerde graden. Die worden dan afgerond zoals decimale getallen, werkwijze waarmee de leerlingen al vertrouwd zijn. Let wel, het resultaat is een benoemd getal (met ° genoteerd). Leerlingen moeten beseffen dat het werken met kleinere hoeken zeer nauwkeurige meettoestellen vereist. Zo ver wordt het in de praktijk in de meeste gevallen echter niet gedreven. Door deze beperking kan tijd vrijgemaakt worden voor het oplossen van problemen.

Waar het evenwel nodig is voor de technische vakken zal in wiskunde het gebruik van minuten en seconden aangeleerd worden. Best wordt hierover overlegd met de vakgroep en met deze van de technische vakken.

13 Vraagstukken bieden de mogelijkheid de goniometrische verhoudingen te gebruiken bij het oplossen van praktische, concrete problemen. Voor leerlingen is de moeilijkheid vaak het herkennen van de situatie op een figuur. Daarom wordt in een eerste benadering best gewerkt met gegeven, heldere figuren. Toch blijft het zelf maken van een dergelijke figuur behoren tot de analysevaardigheden die doorheen het oplossingsproces van deze vraagstukken moeten verworven worden.

4 Omtrek, oppervlakte, inhoud

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m14	B	Vraagstukken oplossen in verband met omtrek en oppervlakte van vlakke figuren en oppervlakte en inhoud van ruimtefiguren.	26

	Pedagogisch-didactische wenken

14 De leerlingen kunnen al een aantal problemen in verband met omtrek, oppervlakte en inhoud oplossen. Hier worden een aantal problemen hernomen, omdat men nu over de mogelijkheden beschikt om bepaalde lengten en/of hoeken te berekenen uit andere gegevens. Daarbij wordt de geziene leerstof over eigenschappen van vlakke figuren toegepast om tot de oplossing te komen. (Voorbeelden: omtrek van de regelmatige zeshoek die gevormd kan worden door het verbinden van middens van zes ribben van een kubus, omtrek en oppervlakte van een driehoek gevormd door een ribbe van een kubus, een diagonaal van een zijvlak en een lichaamsdiagonaal.)

Naast kubus en balk kan aandacht besteed worden aan recht prisma en piramide (maximaal vierzijdig). (De cirkel maakt deel uit van de leerinhouden van het tweede jaar van de tweede graad. Cilinder, kegel en bol komen daarom later aan bod.) De leerlingen moeten de formules hiervoor niet memoriseren. Overigens zal men meer algemeen geen nadruk leggen op het memoriseren van formules, maar wel leren adequaat een *formularium* te gebruiken om de ontbrekende of niet (meer) gekende informatie op te zoeken.

Alhoewel dit tot de basiskennis van de leerlingen zou moeten behoren, kan waar noodzakelijk enige aandacht besteed worden aan het herleiden van gebruikelijke maten uit het metriek stelsel. Een systematische studie is gezien de beperkte tijd niet meer te verantwoorden! Als men de klemtoon wil leggen op de toepassingen van de geziene meetkunde, kan men de problematiek van het herleiden beperken door opgaven te voorzien met ‘eenzelfde’ maateenheid voor de gegevens. Algemeen kan men eerst de herleiding naar eenzelfde, meest geschikte maateenheid doorvoeren en dan pas rekenen (zo nodig met een rekenmachine). Als binnen een studierichting expliciet noodzakelijk kan in overleg met de vakgroepen wiskunde en technische vakken beperkt aandacht besteed worden aan de herleidingen zelf. Ze blijven dan toch best beperkt tot die situaties waarmee de leerlingen in de praktijk geconfronteerd zullen worden.

Bij berekeningen van de lengte van de ribbe van een kubus als de inhoud gegeven is, is de derdemachtswortel nodig. De invoering hiervan blijft beperkt tot die praktisch noodzakelijke gevallen.

5 Toepassingen in het vlak en de ruimte

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m15	B	Gebruik maken van schetsen en tekeningen bij het oplossen van problemen gesteld in vlakke en beperkte ruimtelijke situaties.	26
m16	B	Gebruik maken van begrippen en elementaire eigenschappen bij het oplossen van problemen in vlakke en ruimtelijke situaties.	26

	Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen moeten hun kennis leren gebruiken bij het oplossen van meetkundige problemen, zowel in het vlak als in de ruimte. Het gaat daarbij hoofdzakelijk om berekeningen in praktische en concrete situaties en minder om het opstellen van nieuwe eigenschappen.

Bij het oplossingsproces maken ze *gebruik van tekeningen* om de problemen te analyseren en gekende eigenschappen om de oplossing te argumenteren. Het lezen van en het zichtbaar maken van informatie op een tekening is voor de leerlingen een belangrijke stap in de probleemanalyse. Het is een cruciale stap naar het zelf maken van tekeningen bij een gesteld probleem. Met het argumenteren van hun oplossing hebben de leerlingen vaak moeilijkheden. Het leren argumenteren van een oplossing moet daarom volgens een weg van geleidelijkheid opgebouwd worden. Ook daarbij is het ‘lezen’, m.a.w. het overwegen en begrijpen, van een aangeboden argumentatie (bijvoorbeeld van een medeleerling of van de leraar) een belangrijke tussenstap. (Zie de opmerkingen bij m8)

Het best sluiten deze toepassingen aan bij de behandeling van de eigenschappen zelf. (Zie de doelstellingen m5, m8, m9, m13 en m14.) Toch wil de expliciete formulering van deze doelstellingen het belang ervan aangeven. De tijd voor het verwerken van deze doelstellingen werd evenwel verrekend bij de andere onderdelen.

15 Leerlingen beschikken uit de eerste graad over een aantal voorstellingstechnieken voor ruimtelijke situaties (aanzichten, cavalièreperspectief, eventueel isometrisch perspectief). Bij de behandeling van toepassingen in de ruimte zal aandacht besteed worden aan een adequate voorstelling, waarbij de eerder gemaakte conventies gerespecteerd worden. Omdat bij een ruimtelijke voorstelling soms bepaalde informatie over situaties anders wordt voorgesteld (bijv. een rechte hoek wordt scherp of stomp, kruisende rechten worden snijdend, …) zal veel zorg besteed worden aan de tekeningen en eventueel het zichtbaar maken van de vlakke situatie waarvan men gebruik wil maken. Zo nodig zal men de feitelijke ruimtelijke situatie met didactisch materiaal illustreren om het inzicht van de leerlingen te bevorderen.

16 De leerlingen moeten de gekende meetkundige begrippen en eigenschappen leren gebruiken om meetkundige problemen op te lossen, zowel in het vlak als in de ruimte. Oefeningen waarbij lengten en hoeken berekend worden, moeten zeker aan bod komen.

5.8.2 GETALLENLEER EN ALGEBRA

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **getallenleer en algebra** worden ca. **33** lestijden besteed

rekenen met reële getallen	ca. 15 lestijden
algebraïsche verbanden	ca. 12 lestijden
algebraïsch rekenen	ca. 6 lestijden

1 Rekenen met reële getallen

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	**Et**
g17	B	De rekenmachine gebruiken bij berekeningen met getallen – in decimale vorm; – in breukvorm.	12
g18	B	Regels voor het rekenen met machten toepassen.	
g19	B	De rekenmachine gebruiken bij berekeningen met getallen in wetenschappelijke schrijfwijze.	12
g20	B	Vraagstukken oplossen, en daarbij – in de probleemstelling herkennen welke grootheden aan de orde zijn; – het probleem vertalen in een wiskundige vorm met algebraïsche bewerkingen tussen de grootheden; – verantwoord kiezen tussen schattend rekenen, benaderend rekenen en het gebruik van een rekenmachine; – de oplossing zinvol afronden en interpreteren.	13 14 15 20
g21	B	Vraagstukken oplossen in verband met recht en omgekeerd evenredige grootheden.	13 14
g22	B	Vraagstukken oplossen die leiden tot een vergelijking van de eerste graad met één onbekende.	

Pedagogisch-didactische wenken

17 Het rekenen met rationale getallen (zowel in breukvorm als in decimale vorm) behoort tot de leerinhouden van de eerste graad. Toch is het te verwachten dat een aantal leerlingen van deze groep nog moeilijkheden heeft met deze ‘rekenvaardigheid’. De leerinhouden van dit leerjaar bieden binnen het normale leerproces voldoende gelegenheden om het rekenen met rationale getallen te onderhouden (bijv. bij vraagstukken als toepassing op verscheidene nieuwe leerinhouden, bij meetkundeproblemen over berekeningen van lengten en hoeken). Als de herhaling gebeurt in *functionele* situaties, zullen de leerlingen dit rekenen meer zinvol ervaren en kan de motivatie ervoor toenemen.

Waar fundamentele rekenproblemen vastgesteld worden kunnen die uiteraard *gericht geremedieerd* worden. Een adequaat gebruik van een rekenmachine kan een oplossing bieden. Maar ook los van de remediëringsproblematiek moeten de leerlingen leren verantwoord gebruik te maken van een *rekenmachine*. Dat wil onder meer zeggen dat leerlingen geleerd wordt de bekomen resultaten te toetsen, bijv. door ze te vergelijken met een schatting van de grootteorde. Bij het gebruik van een rekenmachine zal moeten ingegaan worden op problemen zoals nauwkeurigheid en afronding van het eindresultaat. Dit is een gelegenheid om de problematiek te bespreken van het te gebruiken aantal decimalen bij de uitlezing. In het algemeen is het zinvol leerlingen resultaten te leren aflezen (afronden) in functie van de betekenis of het gebruik ervan (bijv. ‘precies’ resultaat of grootteorde gewenst). Voor sommige doeleinden zal een benadering tot op bijv. 0,1 volstaan, voor andere zal een nauwkeurigheid tot op bijv. 0,0001 gevraagd worden. Dat staat onder meer in verband met de gebruikte nauwkeurigheid bij het invoeren van getallen, met het verdere gebruik van het getal in berekeningen, …. Het is nuttig met het wiskundeteam en met de leraren van de technische vakken af te spreken om volgens eenzelfde principe te werken, zodat de leerling maar één systeem moet verwerven.

Bij het gebruik van een rekenmachine worden leerlingen in hoofdzaak geconfronteerd met het rekenen met decimale getallen. Dit zou hen de idee kunnen geven dat resultaten niet exact kunnen berekend worden. Het is zinvol deze problematiek te bespreken naar aanleiding van een gepast voorbeeld. Zonder hierop uiteraard een hele reeks oefeningen uit te voeren zal, waar de gebruikte toestellen het toelaten, het gebruik van het rekenen met de breukvorm machinaal uitgevoerd worden, zodat een ‘exact’ resultaat bekomen wordt. Anderzijds zullen resultaten die evident verwijzen naar breuken als dusdanig geïnterpreteerd worden. Zo kan bijvoorbeeld 0,333… in sommige situaties tot 0,3 afgerond worden, maar men zal niet nalaten dergelijk resultaat te noteren als $\frac{1}{3}$.

18 In de eerste graad hebben de leerlingen het begrip macht opgebouwd. Voor een aantal leerlingen (tweede leerjaar met leerplan b) bleef dit beperkt tot machten van 2 en van 10. Dit wordt nu uitgebreid tot machten van willekeurige getallen. De rekenregels voor machten worden herhaald met *toepassingen* in *functionele* situaties. Als nodig voor het begrip van de leerlingen, moet men hierbij terugvallen op de werkwijze die gebruikt werd bij de eerdere invoering, m.n. starten met getalvoorbeelden, die in een volgende stap veralgemeend worden tot lettervoorbeelden met getalexponenten.

Met het oog op het algebraïsch rekenen kan hier al wat meer aandacht besteed worden aan het rekenen met machten met letters als grondtal, waar de rekenregels meer symbolisch moeten toegepast worden. Het aantal letters wordt hier evenwel bewust beperkt gehouden.

19 Niet alle leerlingen zijn vanuit de eerste graad vertrouwd met het rekenen met getallen in wetenschappelijke schrijfwijze. Ze hebben al wel gerekend met machten van 10, wat als basis voor het rekenen met de wetenschappelijke schrijfwijze kan gebruikt worden. Deze schrijfwijze van getallen moet geïllustreerd worden met realistische voorbeelden (van zeer kleine of zeer grote getallen) uit de wetenschappen en de technische toepassingen.

Bij het rekenen met getallen in wetenschappelijke schrijfwijze zal men zich beperken tot situaties die voorkomen in het normale leerproces van wiskunde en van de vakken die hiervan gebruik maken. Het heeft geen zin hierop artificiële oefeningen te maken.

20 De herhaling en de uitdieping van getallenkennis zal bij de leerlingen nagestreefd worden aan de hand van het oplossen van allerlei problemen uit hun omgeving. Die kunnen aansluiten bij de technische vakken van de studierichting. Meteen kan heel wat aandacht besteed worden aan de ontwikkeling van probleemoplossende vaardigheden. (Voor een algemene situering hiervan zie 5.1.) Dat kan bij wiskundigzwakkere leerlingen niet aan het toeval overgelaten worden.

Belangrijk is dat leerlingen *een probleem* leren *stellen* in een gegeven situatie. Dat betekent dat ze uit het gevraagde de te berekenen grootheid kunnen afleiden. Dat betekent dat ze in functie daarvan de gegevens en de uit te voeren bewerkingen kunnen selecteren. Dit impliceert evenwel niet noodzakelijk dat dit steeds en stereotiep vormelijk moet genoteerd worden.

De leerlingen kennen voorstellingstechnieken van gegevens, zoals *diagrammen, grafieken en tabellen*. Hiervan kan gebruik gemaakt worden om de presentatievorm van de problemen te variëren.

Nadat de leerlingen een accurate wiskundige representatie gekozen hebben moeten ze een aangepaste rekenwijze kiezen. Naargelang de complexiteit van de gegevens en de bewerkingen kan dat zowel het hoofdrekenen als het cijferrekenen of het gebruik van een rekenmachine zijn.

Bij het afronden van berekende getallen, in het bijzonder van het resultaat, moet rekening gehouden worden met de getallen zelf, hun rol eventueel verder in de berekening, de grootteorde van de gegevens en het realiteitsaspect van de situatie.

21 De leerlingen hebben in de eerste graad al vraagstukken opgelost op recht en omgekeerd evenredige grootheden. Toch mag verwacht worden dat een aantal leerlingen hiermee nog moeilijkheden ondervinden. Daarom kan een herhaling ingebouwd worden. Evenredigheden vormen onder meer een concreet

inhoudelijk kader voor de vraagstukken en de problemen om doelstelling g20 te realiseren.

Zowel bij de bespreking van het vertolken van situaties in algebraïsche verbanden, als voor de inleiding op eerstegraadsfuncties in het tweede leerjaar van de tweede graad, kunnen de relaties tussen recht en omgekeerd evenredige grootheden een interessant kader zijn om de nieuwe leerinhouden te ontwikkelen. Om te voorkomen dat leerlingen bij deze ontwikkeling eerder problemen hebben met de begrippen over evenredigheid dan wel met de nieuwe leerinhouden, is het zinvol hieraan eerst extra aandacht te besteden. Anderzijds kan de behandeling van deze vraagstukken in het onderdeel algebraïsche verbanden geïntegreerd worden.

22 De oplossingstechniek van *vergelijkingen van de eerste graad met één onbekende* zou door de leerlingen verworven moeten zijn. Het oplossen van deze vergelijkingen is dus geen doel op zich meer en dient geïntegreerd te worden in het aanbieden van *realiteitsbetrokken vraagstukken* (zie g20). Vergelijkingen die hierbij voorkomen zijn trouwens meestal relatief eenvoudig. De eventueel noodzakelijke herhaling van oplossingstechnieken kan beperkt worden tot die vormen. Dergelijke duidelijke gevallen moeten ook het inzicht versterken.

Voor het oplossen van meer ingewikkelde vormen kunnen ICT-hulpmiddelen ingeschakeld worden. Zo kan men in deze gevallen gebruik maken van de ingebouwde oplosser.

2 Algebraïsche verbanden expliciteren bij betekenisvolle situaties

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
g23	B	Een gegeven tabel interpreteren, o.m. – bepaalde waarden aflezen; – extreme waarden aflezen; – het globale verloop (constant, stijgen, dalen) bespreken.	18
g24	B	Een gegeven grafiek interpreteren, o.m. – bepaalde waarden aflezen; – extreme waarden aflezen; – het globale verloop (constant, stijgen, dalen) bespreken.	18
g25	B	In een gegeven formule – de waarde van één veranderlijke berekenen bij vervanging van de andere veranderlijke(n) door een getal; – het effect aangeven van de verandering van één veranderlijke op de andere.	21 20
g26	B	Het verband tussen twee veranderlijke grootheden weergeven door middel van – een tabel; – een grafiek in een opportuun gekozen assenstelsel; – een formule.	16 17 20
g27	B	De samenhang tussen verwoording, tabel, grafiek en formule uitleggen.	22
g28	B	De onderlinge ligging van twee grafieken vergelijken en interpreteren.	19

Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen zullen doorheen de wiskunde van het secundair onderwijs in mindere of meerdere mate geconfronteerd worden met het onderdeel *Reële functies*. Het verder afliggend doel is het verloop van dergelijke functies te begrijpen, te beschrijven, te beheren, te gebruiken en toe te passen in praktische situaties.

Een eerste stap in dit proces is het vertolken of vertalen in wiskundetaal van relaties tussen grootheden. Voor de leerlingen, die dit leerplan volgen, volstaat het in dit leerjaar inzicht te verwerven in dat vertalingsproces. In het tweede leerjaar van de tweede graad volgt dan de eerstegraadsfunctie als belangrijk model.

Uitgangspunt voor het leerproces zijn situaties die betekenisvol zijn voor de leerlingen en waarin de elementen in een wiskundig verband staan. Dat kunnen situaties uit hun leefwereld zijn, maatschappelijk relevante situaties of elementen uit hun basiskennis wiskunde of wetenschappen. Het verband tussen twee of meer grootheden wordt hierbij wiskundig geëxpliciteerd, bijv. de afgelegde weg bij eenzelfde snelheid is recht evenredig met de tijd; de rente is het product van kapitaal, rentevoet en tijd; de oppervlakte van een cirkel is het product van π met het kwadraat van de straal.

Het is evenwel gebruikelijk die verbanden niet slechts woordelijk te expliciteren. Ze kunnen omschreven worden met een formule (bijv. $I = k \cdot i \cdot t$; $S = \pi r^2$). Of aan de hand van een tabel van overeenkomstige waarden (bijv. de rente van eenzelfde kapitaal bij verschillende rentevoeten; de resultaten van een meting of experiment). Of door een grafische voorstelling ervan (bij een artikel in de krant valt vaak eerst de grafiek op en de legende, daarna volgt het lezen van het verhaal).

Leerlingen moeten leren omgaan met deze drie presentatievormen. De didactische aanpak kan daarbij verschillen naargelang de leerlingengroep. Zo kan bijv. in de aanvangsfase aandacht besteed worden aan elke mogelijkheid afzonderlijk, daarna aan de samenhang tussen de verschillende elementen. Het is zinvol de verschillende voorstellingen in een geïntegreerde aanpak ter sprake te brengen, bijv. uitgaande van enkele goed gekozen situaties zowel het tabuleren, het omzetten in een formule als de grafiek te bespreken.

De leerlingen zijn uit de eerste graad vertrouwd met enkele belangrijke elementaire verbanden, zoals die tussen recht evenredige grootheden of omgekeerd evenredige grootheden. Deze kunnen in de aanloop hernomen worden. Andere mogelijkheden zijn verbanden van de eerste graad (alhoewel die later expliciet aan bod komen) en kwadratische verbanden (bijv. het verband tussen de oppervlakte van een vierkant en de zijde). Ook verbanden uitgedrukt met een meervoudig voorschrift of verbanden tussen meer dan twee variabelen kunnen aan bod komen. Anderzijds moet men wel beseffen dat de leerlingen niet over een uitgebreid algebra- of analysearsenaal beschikken om deze verbanden te bestuderen. In deze aanloopfase is het zeker niet de bedoeling onderhands allerlei ingewikkelde algebraïsche uitdrukkingen ter sprake te brengen. De bestudeerde verbanden zullen relatief eenvoudig blijven.

Leerlingen moeten in een aantal situaties de vier voorstellingswijzen kunnen weergeven: de situatie verwoorden, een tabel van overeenkomstige waarden maken, een grafiek tekenen en daarbij het gekozen assenstelsel accuraat kiezen en een formule opstellen. Ze moeten vlot van de ene vorm naar de andere kunnen overstappen als dat mogelijk en wenselijk is.

Bij de exploratie van grafieken, het bekijken van een bijbehorende tabel kan een rekenmachine, een grafische rekenmachine of een computer gebruikt worden. Dit is dan een gelegenheid om de doelstellingen in verband met ICT-hulpmiddelen na te streven.

In de wiskunde is het gebruikelijk in de meer geabstraheerde formules de letters x en y te gebruiken. Om te vermijden dat dit een al te stereotiep gebruik zou worden, is het zinvol bij de ontwikkeling van het functiebegrip en bij de inoefening ook letters te gebruiken die aangepast zijn aan de situatie (bijv. grootheden uit de techniek worden best met hun gebruikelijk symbool geschreven).

23 Het is zinvol bij de aanvang van dit onderdeel enkele concrete voorbeelden te bespreken van tabellen en grafieken over situaties uit de ‘leefwereld’ (bijv. uit kranten of tijdschriften, informatiebrochures, technische handleidingen, afstand- of hoeveelheidstabellen, reisbrochures). Het *lezen en interpreteren* ervan is een belangrijke vaardigheid.

Veel informatie, ook binnen technische toepassingen, wordt vergezeld van *tabellen* bijv. afmetingen, resultaten van een meetproces, opbrengst bij verschillende rentevoet, omzetting van verhoudingen, prijsberekeningen (eventueel met korting voor grote aantallen), …. Vanuit de eerste graad kunnen leerlingen al tabellen van eenvoudige relaties aflezen, zoals tussen twee recht evenredige grootheden. Nu kunnen ook meer algemene verbanden aan bod komen.

Een eerste stap in het begrijpen van de informatie in een tabel is het aflezen van de grootheden, het aflezen van waarden en het opzoeken van bijzondere waarden zoals extreme waarden. Ook over het globale ‘verloop’ van de waarden uit een tabel moeten leerlingen een indruk kunnen geven. Gaat het bijvoorbeeld om een stijgende, een dalende, een constante trend. Is er informatie af te lezen in verband met gelijkmatige toename of is er een maat te bepalen voor de snelheid van toe- of afname.

Belangrijk is dat leerlingen de afgelezen getallen terug in de juiste context kunnen plaatsen, bijv. wat is de betekenis van een extreme waarde of van een stijgende trend in deze situatie.

Leerlingen moeten kritisch leren omgaan met de geboden informatie en de veralgemening ervan. Een tabel biedt maar beperkte informatie aan over bepaalde waarden. Hieruit een vast verband afleiden is moeilijk. De kennis van een aantal bijkomende waarden zou het vermoeden over het beschreven verband kunnen wijzigen.

24 Een *grafiek* biedt heel wat zintuiglijke en overzichtelijke informatie. Meestal vallen belangrijke waarden zoals extreme waarden onmiddellijk op. Nulwaarden kunnen meestal snel afgelezen worden. En toename of afname van beeldwaarden is verbonden met het stijgen of dalen van de grafiek. Bij het aflezen wordt soms informatie over het hoofd gezien, bijvoorbeeld welke zijn de effectieve grootheden die uitgezet werden en met welke eenheden op de assen. Zo kan de keuze van de eenheid (schaal) een andere indruk geven over de zelfde informatie (bijv. met betrekking tot het stijgen of dalen, de schijnbare helling van de grafiek). Het vergelijken van grafieken van eenzelfde fenomeen uit verschillende kranten is een voor de hand liggende instap, die heel wat inzicht kan bijbrengen.

Anderzijds moeten leerlingen beseffen dat bij grafische informatie vaak aan nauwkeurigheid van de waarden moet ingeboet worden, omdat bij het aflezen van een ‘beeldwaarde’ onvermijdelijk meetfouten gemaakt worden. Hieruit blijkt dan weer dat een combinatie van zowel tabel als grafiek zinvol is om de informatie te versterken. Het precies omschrijven van het verband met een voorschrift of formule is een andere mogelijkheid om preciezere informatie te geven.

Ook ten aanzien van de informatie in een grafiek moeten leerlingen leren kritisch staan. Ook een grafiek kan maar gegeven zijn voor een bepaald deel. Het verloop kan buiten het beschikbare deel totaal anders zijn. Extrapolatie is mogelijk, maar kan helemaal niet beantwoorden aan de rest van het verloop of aan het reële verloop.

25 Uit het voorgaande onderzoek van tabellen en grafieken blijkt dat ze zeer zinvolle informatie kunnen geven. Om een verband tussen grootheden precies te beschrijven zal een *formule* of een *voorschrift* nochtans de meeste informatie bieden. Op grond daarvan kunnen overeenkomstige waarden berekend worden en kan een grafiek getekend worden.

Voor het praktisch gebruik in de wiskunde en in andere vakken (wetenschappen, technische vakken zoals mechanica, elektriciteit, toegepaste economie, labo-activiteiten, …) moeten leerlingen beschikken over de techniek om formules te gebruiken om waarden te berekenen of om bepaalde veranderlijken te expliciteren. Als een van de veranderlijken geschreven is in functie van de andere, kan die berekend worden als aan de andere veranderlijken een waarde wordt toegekend. Het gaat om het berekenen van de ‘getalwaarde’, zoals leerlingen dat voor veeltermen hebben gedaan in het tweede leerjaar. Bij het verwerken van formules zal men zich beperken tot zinvolle, herkenbare formules. Het oefenen op louter abstracte uitdrukkingen heeft het verlies van de ‘werkelijkheidswaarde van een formule’ tot gevolg en daardoor een zekere controlemogelijkheid.

Meestal ontstaan de moeilijkheden voor de leerlingen als de gevraagde veranderlijke niet geëxpliciteerd is. Vooral de werkwijze van het omvormen, d.w.z. door middel van letterrekenen de gevraagde veranderlijke expliciteren, levert problemen op. Een andere mogelijkheid is de waarden van de gekende veranderlijken invullen in de gegeven formule en de overgebleven veranderlijke oplossen, bijv. met technieken van het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen (overbrengen van een term, overbrengen van een factor), die de leerlingen kennen vanuit de eerste graad. Als men zich beperkt tot deze techniek, is het zinvol de andere leerkrachten‘gebruikers’ van deze methodiek op de hoogte te brengen, zodat leerlingen in die vakken deze werkwijze kunnen blijven hanteren.

Het uitdrukken van een verband in een formule is een gelegenheid om leerlingen te laten inzien dat de ene veranderlijke in functie van de andere verandert. Dit leidt tot begrippen zoals onafhankelijke en afhankelijke veranderlijke. Als het verband tussen twee grootheden geëxpliciteerd is in een formule, dan kan onderzocht worden welk effect er is op één van de veranderlijken als de andere gewijzigd wordt, bijv. wat is het effect van een vermenigvuldiging met 5 (bijv. ook een vermenigvuldiging met factor 5, met factor $\frac{1}{5}$, met factor 25, …).

Ook hier worden de uitdrukkingen relatief eenvoudig gehouden, bijv. vormen zoals $y = a$, $y = ax$, $y = ax + b$, $ax + by = c$, $y = ax^2$, $y^2 = x$, $x \cdot y = a$.

26 De leerlingen moeten *zelf* een tabel kunnen opstellen, een grafiek tekenen, een verband in een formule vertolken. Om dit zinvol te maken sluit men best aan bij situaties die de leerlingen kennen, bijv. uit de technische toepassingen.

De leerlingen moeten een tabel kunnen opstellen en een grafiek kunnen tekenen. Dit vraagt enige oefening. Bij de grafische voorstelling zal aandacht besteed worden aan de keuze van het assenstelsel en de eenheden op de assen, bijv. in functie van het aangeven van extreme waarden, nulwaarden, enz. Dit is een vaardigheid die nodig is bij het gebruik van het kijkvenster op een grafische rekenmachine en computer. Naast het manueel opmaken van een tabel of een grafiek kan aandacht besteed worden aan het gebruik van een rekenmachine of een computerprogramma. De routine die ze kunnen verwerven in deze relatief eenvoudige situaties kan hen ondersteunen bij meer ingewikkelde functies.

Bij het zelf tekenen van een grafiek zullen de leerlingen voldoende zorg besteden aan het 'vloeiend verloop' van de grafiek.

27 Het is te verwachten dat leerlingen een beter inzicht in de *samenhang* tussen tabel, grafiek, voorschrift en situatie zullen verwerven als ze een aantal oefeningen gemaakt hebben op het overbrengen van de informatie van de ene voorstelling naar een andere. Het doel is vlot te kunnen overgaan van een vorm van voorstelling naar een andere. Leerlingen moeten voorstellingen van eenzelfde situatie aan elkaar kunnen associëren.

De overgang van 'tabel' of 'grafiek' naar 'voorschrift' is een gelegenheid om de leerlingen kritisch te leren omgaan met de besluitvorming (bijv. een tabel biedt maar informatie over een beperkt aantal koppels). Het omzetten van een situatie (verhaal, tekst) naar een formeel wiskundig voorschrift sluit nauw aan bij het doel van mathematiseren en/of modelleren van de leefwereld. Hierbij moet aandacht besteed worden aan het gebruik van conventionele letters voor de veranderlijken (cf. technische notaties).

28 Bij het interpreteren van grafieken zal aandacht besteed worden aan het vergelijken van verschillende grafieken van eenzelfde verband. Daaruit zou een kritische houding moeten volgen ten aanzien van de keuze van assen, eenheden, kijkvenster, … Leerlingen moeten grafieken van verschillende verbanden met elkaar kunnen vergelijken (bijv. welk systeem van betalen kost het meest?). Zo kan de vraag naar de gelijkheid van twee functiewaarden voor een bepaalde waarde leiden tot het algebraïsch berekenen van de coördinaat van het snijpunt van de twee bijbehorende grafieken (bijv. met gelijkstelling van de voorschriften en beperkt tot eerstegraadsvergelijkingen) en tot het grafisch interpreteren ervan.

3 Algebraïsch rekenen

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
g29	B	Rekenregels toepassen bij het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen van eentermen en veeltermen in één veranderlijke met graad ten hoogste 3.	

Pedagogisch-didactische wenken

29 In de eerste graad hebben de leerlingen een-, twee- en drietermen leren optellen en vermenigvuldigen. Dit rekenen zou door de leerlingen moeten verworven zijn. Toch valt te verwachten dat ze niet over de gestelde algebraïsche rekenvaardigheid beschikken. Voor zover de realisatie van andere doelstellingen hierdoor niet gehypothekeerd wordt, kan hier nog *remediërend* gewerkt worden. Dit betekent bijvoorbeeld dat leerlingen gedifferentieerd en gericht oefeningen kunnen verwerken. Hier ligt een belangrijke kans om de leerlingen gestuurd, maar toch zelfverantwoordelijk aan het werk te laten, eventueel na een korte herhaling tijdens de lestijden. Wel moet men zich realiseren dat met de mogelijkheden die rekenmachines en computer zullen hebben in verband met het algebraïsch rekenen, de impact van het manueel algebraïsch rekenen kleiner wordt. Hiermee zou een ernstig obstakel voor de leerlingen kunnen weggenomen worden.

5.9 Leerplan d - tweede leerjaar

5.9.1 MEETKUNDE

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **meetkunde** worden ca. **29** lestijden besteed

gelijkvormigheid	ca. 12 lestijden
de cirkel	ca. 12 lestijden
omtrek, oppervlakte, inhoud	ca. 5 lestijden.

1 Gelijkvormigheid van driehoeken

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m1	B	Gelijkvormige driehoeken definiëren.	
m2	B	Gelijkvormige driehoeken construeren.	26
m3	B	Gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken afleiden en illustreren op een tekening.	
m4	B	Gelijkvormigheid gebruiken om lengten van lijnstukken te berekenen.	26
m5	B	Meetkundige problemen oplossen, ook in ruimtelijke situaties met behulp van eigenschappen steunende op gelijkvormigheid van driehoeken.	26

Pedagogisch-didactische wenken

In dit deel meetkunde blijft de essentie het onderzoeken van meetkundige figuren en hun eigenschappen. Het verdient aanbeveling daarbij gebruik te maken van een grafische rekenmachine of software die de analyse van dergelijke figuren toelaat. De vraag daarbij is vaak: waarom gebeurt, wat we zien op het scherm, op deze wijze. Daarom blijft de aandacht voor een verklaring zinvol.

1 De leerlingen kennen uit de eerste graad de begrippen schaal, congruente en gelijkvormige figuren. Bij het kijken naar gelijkvormige figuren valt op dat in wezen slechts ‘de grootte’ van de figuur gewijzigd is, de ‘vorm’ blijft dezelfde. Onderzoek naar de wiskundige betekenis hiervan leidt tot het besluit dat de grootte van de hoeken behouden blijft, maar dat alle afmetingen van lengten vergroten of verkleinen met dezelfde factor. Leerlingen kunnen dit onderzoeken in allerlei meetopdrachten.

Voor het praktisch gebruik wordt, zoals bij de congruentie, de gelijkvormigheid van driehoeken beter omschreven aan de hand van de overeenkomstige elementen van de driehoeken (gelijkheid van de overeenkomstige hoeken en evenredigheid van overeenkomstige zijden).

Bij de herhaling van gelijkvormigheid tussen figuren kan aandacht besteed worden aan figuren die niet in eenzelfde vlak liggen (bijv. bij een kubus, een balk, het grond- en het bovenvlak van een recht prisma). Ook kan geïllustreerd worden dat de gelijkvormigheid in allerlei constructies (bijv. hout- of metaalconstructies) gebruikt wordt om een ‘stevige’ vorm te bekomen (bijv. een dakgebinte, vakwerk bij huizen, de poten van een projectietafel, een strijkplank, sommige stoelen).

De gelijkvormigheidsfactor is een aanleiding om het begrip schaal dat al in de eerste graad werd aangebracht te hernemen.

2 Bij het construeren van gelijkvormige driehoeken stellen de leerlingen vast dat de gevraagde figuur gelijkvormig is met een gegeven figuur als ze er een ‘schaalmodel’ van is. Voor een aantal leerlingen klinkt dat vertrouwd, omdat ze vanuit tekeningen lezen (in de technische vakken) al langer bekend zijn met deze werkwijze.

Bij de opdracht ‘een gelijkvormige figuur te tekenen waarbij de gelijkvormigheidsfactor gelijk is aan 1’ kunnen ze vaststellen dat de getekende figuren congruent zijn.

3 Bij een tekenopdracht zoals ‘teken een driehoek gelijkvormig aan een gegeven driehoek (waarvan dus de zes elementen bekend zijn)’ merken de leerlingen dat het volstaat te werken met ‘goed gekozen’ informatie. Dit leidt tot *kenmerken*. Ook hier zijn tegenvoorbeelden belangrijk om de kracht van de kenmerken te onderbouwen.

De moeilijkheid voor vele leerlingen is het doorzien van situaties in figuren. Het ontwikkelen van de kenmerken op basis van veel tekenwerk is ondersteunend voor het opzoeken van gelijkvormige driehoeken in een later stadium. Zoals bij congruentie is het zinvol eerst enkele situaties te onderzoeken, waarbij de gelijkvormigheid tussen driehoeken aangegeven wordt zonder onmiddellijk een verband te leggen met een aan te tonen eigenschap. Daarbij gaat het om oefeningen waarbij de kernopdracht precies is ‘het constateren van gelijkvormigheid’. In een eerste fase worden eenvoudige figuren gebruikt (bijv. waarbij bedekkingen vermeden worden).

4 De gelijkvormigheid van driehoeken kan leiden tot een aantal constructies en berekeningen (bijv. een lijnstuk in n gelijke delen verdelen; constructies van de vierde evenredige; de verhouding van de lengten van lijnstukken berekenen; en omgekeerd, als een aantal afmetingen gegeven zijn, de lengte van een lijnstuk berekenen met behulp van de berekende verhouding voor overeenkomstige lijnstukken; het verband opzoeken tussen de omtrekken en de oppervlakten van gelijkvormige figuren of het berekenen van afstanden die niet meetbaar zijn, bijvoorbeeld omdat ze ontoegankelijk zijn). Ook de grootte van een hoek kan bepaald worden, als die gelijk is aan een overeenkomstige hoek van een gelijkvormige driehoek.

Zoals bij congruentie moet zorg besteed worden aan het opbouwen van een redeneerproces vanuit het vaststellen op figuren, over het aanduiden van de betrokken lijnstukken, het inbouwen ervan in driehoeken, het opzoeken van gelijkvormige exemplaren, … tot uiteindelijk het verantwoorden van die gelijkvormigheid zelf. Bij deze doelstelling ligt de klemtoon echter op het gebruik van de gelijkvormigheid. De gelijkvormigheid kan hierbij intuïtief ingezien worden. Dat wil zeggen dat de leerling bijvoorbeeld op grond van het meten van hoeken en/of lijnstukken tot gelijkvormigheid kan besluiten.

Afhankelijk van de leerlingengroep en de studierichting zal toch aandacht besteed worden aan het leren onderbouwen van vermoedens met argumenten. Hier wordt aan leerlingen de kans geboden die wiskundige attitude te verwerven in relatief eenvoudige situaties.

5 Een aantal eigenschappen kan onderzocht worden op tekeningen, onder meer door effectief meten. Hierbij zal aandacht besteed worden aan tegenvoorbeelden om de ‘voorwaarden’ in de formulering te verantwoorden. Mogelijke eigenschappen zijn de metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek en de verklaring bij de hierboven genoemde berekeningen en constructies.

Van een aantal eigenschappen kan een verklaring gegeven worden, gebruik makend van de beschikbare kennis. De zorg voor het leerproces in het opbouwen van verklaringen primeert op het aantal eigenschappen. En het is geenszins de bedoeling dat leerlingen hier bewijzen gaan memoriseren.

2 De cirkel

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m6	B	Eigenschappen in verband met straal, koorde, apothema, omtrekshoek en middelpuntshoek onderzoeken en gebruiken.	26
m7	B	De omgeschreven cirkel van een driehoek construeren.	
m8	B	In een punt van een cirkel de raaklijn aan de cirkel construeren.	
m9	U	Uit een punt de raaklijnen aan een cirkel construeren.	

	Pedagogisch-didactische wenken

6 De cirkel als vlakke figuur is al langer door de leerlingen gekend. Toch bleef die kennis eerder passief, d.w.z. als ‘een gebruik maken van‘.

De eigenschappen die hier bedoeld worden, kunnen door de leerlingen zelf onderzocht worden op tekeningen of door meten: o.m. een apothema loodrecht op de koorde, het apothema is de middelloodlijn van de koorde, gelijke koorden hebben gelijke apothema’s, de relatie tussen middelpuntshoek en omtrekshoek op eenzelfde koorde, een omtrekshoek op een middellijn is een rechte hoek, …. Het gebruik van een simulatieprogramma voor meetkunde is aangewezen om deze eigenschappen in veelvuldige situaties te illustreren.

Deze eigenschappen geven aanleiding tot een aantal toepassingen, bijv. een aantal lengten en/of hoeken berekenen als andere afmetingen gegeven zijn, o.m. door ze te verbinden met de stelling van Pythagoras en de gekende driehoeksmeting.

7 De constructie van de omgeschreven cirkel van een driehoek is een aanleiding om de eigenschap te illustreren dat de middelloodlijnen van een driehoek snijden in één punt (bijv. met een simulatieprogramma). De constructie kan gelden als verklaring voor de eigenschap dat door drie niet-collineaire punten precies een cirkel bepaald wordt.

8 Het vergelijken van de afstand van het middelpunt van een cirkel tot een rechte en de straal van die cirkel leidt tot informatie over de onderlinge ligging van de rechte en de cirkel. Dat onderzoek leidt tot het begrip raaklijn aan een cirkel. Het begrip ‘raken’ komt hier voor het eerst specifiek aan bod. Met behulp van een meetkundig simulatieprogramma kan getoond worden hoe een snijlijn met de cirkel tot raaklijn kan gedraaid worden. Als in de figuur de loodlijn op de snijlijn door het ‘vaste’ snijpunt wordt getekend, kunnen de leerlingen visueel vaststellen dat deze bij de raaklijn door het middelpunt van de cirkel gaat. Dit geeft meteen een constructiemiddel.

9 *Uitbreiding*

Het construeren van de raaklijnen uit een punt aan een cirkel is technisch niet ingewikkeld. De verklaring van dit proces is ingewikkelder en kan met behulp van differentiatie aan een beperkt aantal leerlingen meegegeven worden.

3 Omtrek, oppervlakte, inhoud

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
m10	B	Vraagstukken oplossen over de omtrek en de oppervlakte van een cirkel.	26
m11	B	Vraagstukken oplossen over de oppervlakte en de inhoud van ruimtefiguren.	26

	Pedagogisch-didactische wenken

10 De leerlingen beschikken al over de formules om de omtrek en de oppervlakte van een cirkel te berekenen. Hier worden deze leerinhouden toegepast bij het oplossen van problemen in verband met omtrek en oppervlakte, ook van delen van de cirkel, zoals een cirkelsector, een cirkelsegment (cf. eigenschappen van apothema en koorde). Uit het verband tussen een koorde en de daardoor bepaalde middelpuntshoek kan de zijde van een regelmatige veelhoek berekend worden en vervolgens het apothema, de omtrek en de oppervlakte.

11 De leerlingen hebben al problemen in verband met omtrek, oppervlakte en inhoud opgelost. Die werden beperkt tot ruimtefiguren als kubus, balk, recht prisma en piramide. Aansluitend bij de cirkel kunnen nu cilinder, kegel en bol aan bod komen.

Hier worden een aantal problemen hernomen, omdat men over de mogelijkheden beschikt om bepaalde lengten en/of hoeken te berekenen uit andere gegevens. Daarbij wordt de geziene leerstof over eigenschappen van vlakke figuren toegepast om tot de oplossing te komen.

De leerlingen moeten de formules voor oppervlakte en inhoud van deze ruimtefiguren niet memoriseren. Wel zal men hen leren adequaat een formularium te gebruiken om de ontbrekende of niet (meer) gekende informatie op te zoeken.

4 Toepassingen in het vlak en de ruimte

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	**Et**
m12	B	Gebruik maken van schetsen en tekeningen bij het oplossen van problemen gesteld in vlakke en beperkte ruimtelijke situaties.	26
m13	B	Gebruik maken van begrippen en elementaire eigenschappen bij het oplossen van problemen in vlakke en ruimtelijke situaties.	26

Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen moeten hun kennis leren gebruiken bij het oplossen van meetkundige problemen, zowel in het vlak als in de ruimte. Het gaat daarbij hoofdzakelijk om berekeningen in praktische en concrete situaties en minder om het opstellen van nieuwe eigenschappen. Het lezen van en het zichtbaar maken van informatie op een tekening is voor de leerlingen een belangrijke stap in de probleemanalyse.

Het best sluiten deze toepassingen aan bij de behandeling van de eigenschappen zelf. Toch wil de expliciete formulering van deze doelstellingen het belang ervan aangeven. De tijd voor het verwerken van deze doelstellingen werd evenwel verrekend bij de andere onderdelen.

12 Leerlingen moeten bij het onderzoeken, het oplossen van allerlei problemen ook in ruimtelijke situaties behoorlijke voorstellingen hanteren die hun redenering duidelijk maken. Zeker als tekeningen gebruikt worden om een redering te onderbouwen, (te verklaren) zal voldoende nauwkeurigheid aan de dag gelegd worden. De ‘onnauwkeurigheid’ is een argument om meer aandacht te besteden aan het opbouwen van een verklaring gesteund op ‘zekere’ eigenschappen.

Enige aandacht moet besteed worden aan het voorstellen van een cilinder, een kegel of een bol (zie doelstelling m11), bijv. het voorstellen van ruimtefiguren met een cirkel als grondvlak in cavalièreperspectief. Enkele vuistregels moeten volstaan om een behoorlijke figuur te maken.

13 De leerlingen moeten de gekende meetkundige begrippen en eigenschappen leren gebruiken om meetkundige problemen op te lossen, zowel in het vlak als in de ruimte. Zeker aan bod komen een aantal oefeningen waarbij lengten en hoeken moeten berekend worden.

5.9.2 REËLE FUNCTIES
FUNCTIES VAN DE EERSTE GRAAD IN EEN VERANDERLIJKE

Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **reële functies - eerstegraadsfuncties** worden ca**. 25** lestijden besteed

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	**Et**
f14	B	De grafiek van een eerstegraadsfunctie tekenen.	23
f15	B	Het nulpunt van een eerstegraadsfunctie bepalen en grafisch interpreteren.	24
f16	B	De grafische betekenis uitleggen van de coëfficiënten m en q in het functie voorschrift $f(x) = mx + q$.	24
f17	B	Het verband leggen tussen de algemene vergelijking van een rechte $ax+by+c=0$ (met $a \neq 0$ en $b \neq 0$) en de verwante eerstegraadsfunctie.	25
f18	B	Een vergelijking opstellen van een rechte als ze gegeven wordt door – een punt en de richtingscoëfficiënt; – twee punten.	25
f19	B	Uit een tabel van functiewaarden van een eerstegraadsfunctie het voorschrift bepalen.	
f20	B	Uit de grafiek van een eerstegraadsfunctie het voorschrift bepalen.	
f21	B	De tekenverandering van een eerstegraadsfunctie onderzoeken en interpreteren op de grafiek.	25
f22	U	Een ongelijkheid van de eerste graad met één onbekende oplossen en het verband leggen tussen die oplossing en een passende grafische voorstelling.	
f23	B	Een stelsel opstellen bij een probleem waarbij verbanden beschreven worden door twee eerstegraadsvergelijkingen in twee onbekenden.	25
f24	B	Een stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden algebraïsch oplossen.	25
f25	B	Vraagstukken oplossen waarbij het verband beschreven wordt door – een eerstegraadsfunctie; – een stelsel van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden.	25

Pedagogisch-didactische wenken

De leerlingen zullen in hun vervolgopleiding in mindere of meerdere mate geconfronteerd worden met het onderdeel *Reële functies.* Het doel is het verloop van dergelijke functies te begrijpen, te beschrijven, te beheren, te gebruiken en toe te passen in praktische situaties. De leerlingen hebben in het eerste jaar van de tweede graad verbanden tussen grootheden leren expliciteren aan de hand van een tabel, een grafiek, een formule. Daarmee is een algemeen kader gecreëerd waartegen het functiebegrip wordt ontwikkeld. In dit leerjaar wordt specifiek aandacht besteed aan de eerstegraadsfunctie. Het blijft daarbij de bedoeling de leerlingen met voldoende en geconcretiseerd materiaal te confronteren, waardoor ze de wiskundige begrippen in een zinvolle samenhang kunnen verwerven.

14 Een functie van de eerste graad in één veranderlijke kan bepaald worden op vier wijzen: door een situatie waarvan ze de beschrijving is, door een tabel, door een grafiek of door het voorschrift. De leerlingen moeten zeker met voldoende situaties geconfronteerd worden, die wiskundig kunnen vertolkt worden met

behulp van een eerstegraadsfunctie. Het is zinvol de leerlingen te confronteren met tegenvoorbeelden, d.w.z. met situaties waarin het verband niet door een eerstegraadsfunctie kan beschreven worden. Aan het functiebegrip op zich zal voor de leerlingen een zeer intuïtieve betekenis gegeven worden. En de ontwikkeling ervan zal voldoende gekoppeld worden aan de grafische voorstelling.

De leerlingen hebben in de eerste graad kennis gemaakt met een grafische voorstelling van het verband tussen recht evenredige grootheden. De gevonden coördinatenkoppels liggen op een ‘rechte’. De leerlingen beschikken evenwel over onvoldoende kennis van de reële getallen om dit tot in de essentie te begrijpen. Toch kan dit vanuit voorbeelden aangegeven worden, bijv. door tussenliggende waarden te berekenen en de overeenkomstige punten op de grafiek aan te brengen.

Ook de *punt voor punt constructie* van de grafiek is een mogelijk uitgangspunt. Zo kunnen leerlingen bijv. een tabel van functiewaarden opstellen, de bijbehorende punten tekenen, tussenliggende koppels berekenen, om uiteindelijk vast te stellen dat de grafiek een rechte is. De grafische mogelijkheden van rekenmachine en computer kunnen hier het beeld van een effectieve punt voor punt constructie versterken.

Nochtans moeten de leerlingen ook oog krijgen voor een meer praktische werkwijze, met name de grafiek tekenen op basis van twee goed gekozen punten of van één punt en de richtingscoëfficiënt. Weliswaar kan dit maar omdat men ‘weet’ dat de grafiek van een eerstegraadsfunctie een rechte is (zie f18).

Er moet gelet worden op een correct taalgebruik: een punt ligt op een rechte, terwijl een coördinaat een oplossing is van een vergelijking van de rechte; een functie f met voorschrift $f(x) = mx + q$ heeft een grafiek, die grafiek heeft in een coördinatenstelsel een vergelijking $y = mx + q$.

15 De gekende techniek van het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen kan hier gekoppeld worden aan het bepalen van het nulpunt van de overeenkomstige functie of aan het bepalen van het snijpunt van de rechte met de eerste coördinaatas (of de grafische interpretatie).

Bij een gegeven grafiek zal men het nulpunt grafisch aflezen. Dat is mogelijk voor gehele en voor een aantal rationale waarden. Dergelijke aflezing in het algemeen kan maar benaderend zijn. Leerlingen kunnen hier inzien wat het voordeel is van het werken met functievoorschriften en het algebraïsch algoritme voor het oplossen van vergelijkingen.

16 Op basis van voorbeelden over recht evenredige grootheden kan het verband geëxpliciteerd worden tussen formule, grafiek en de functie met voorschrift $f(x) = mx$. Dat de grafiek een rechte is kan o.m. afgeleid worden met behulp van gelijkvormigheid van driehoeken (cf. hoek met de eerste coördinaatas).

Het blijkt dat m een idee geeft over de helling van de rechte en bijgevolg over de richting van de rechte. De betekenis van de term richtingscoëfficiënt wordt hierdoor duidelijk. De richtingscoëfficiënt wordt in verband gebracht met het stijgen of dalen van de grafiek.

Bij de functie met voorschrift $f(x) = mx + q$ gaat de evenredigheid tussen x-waarden en de bijbehorende functiewaarden verloren. Evenredigheid is er wel tussen de toenamen van x en de bijbehorende toenamen van de functiewaarden. De grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = mx + q$ is de grafiek van $f(x) = mx$, die onderworpen werd aan een verschuiving volgens de tweede coördinaatas waarvan de grootte en de zin bepaald worden door q. Hieruit kan meteen volgen dat evenwijdige rechten eenzelfde richtingscoëfficiënt hebben.

17 De grafiek van een eerstegraadsfunctie is een rechte. De vergelijking is van de vorm $y = mx + q$. Die expliciete vorm kan omgewerkt worden tot de meer algemene vergelijking $ax + by + c = 0$. De relatie tussen de coëfficiënten van de verschillende vormen van de vergelijking kan gelegd worden. Omgekeerd kan de algemene vorm van de vergelijking van de eerste graad in 2 onbekenden omgewerkt worden tot de expliciete vorm, op voorwaarde dat $b \neq 0$. De vergelijking $ax + by + c = 0$ kan dan omgevormd worden tot $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Hieruit is af te leiden dat $-\frac{a}{b}$ de richtingscoëfficiënt van deze rechte is. Met deze vorm kan een functie van de eerste graad bepaald worden. Veeleer dan dit als zoveelste formule te laten memoriseren, kan dit als werkwijze aangeleerd worden. Als in de algemene vergelijking b wel nul is (en $a \neq 0$), dan stelt ze een rechte voor evenwijdig aan de y-as. Deze vorm is niet herleidbaar tot een functievoorschrift en kan als tegenvoorbeeld aan bod komen.

18 Als een coördinatenstelsel is vastgelegd, kan een rechte beschreven worden door middel van een vergelijking. Die drukt het verband uit tussen de coördinaatgetallen (x, y) van de punten van de rechte. De leerlingen hebben dit verband al onderzocht bij de grafiek van een eerstegraadsfunctie. Hier worden basis-

formules opgesteld voor rechten die aan bepaalde voorwaarden voldoen, enerzijds een punt gegeven en de richtingscoëfficiënt en anderzijds twee punten gegeven. Hier worden basisformules opgesteld voor rechten die aan bepaalde voorwaarden voldoen, enerzijds door een gegeven punt en met gegeven richtingscoefficiënt en anderzijds door twee gegeven punten. Formules die aan bod kunnen komen zijn: $y - y_0 = m(x - x_0)$ en $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Voor de tweede vorm bestaat het alternatief van het berekenen van de richtingscoëfficiënt van de rechte met behulp van de coördinaten van de twee gegeven punten met gebruik van de formule $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, waarna de eerste formule wordt toegepast.

Het opstellen van vergelijkingen van rechten moet ingeoefend worden met vele concrete voorbeelden en toepassingen. Zo kan bij het opstellen van een vergelijking van een rechte die aan bepaalde voorwaarden voldoet, al gewerkt worden met de methode van onbepaalde coëfficiënten. Ook het probleem van evenwijdige rechten kan aan bod komen. Als de twee gegeven punten op een rechte liggen evenwijdig aan één van de coördinaatassen komen leerlingen spontaan in aanraking met het probleem van de richtingscoëfficiënt.

19 Als van een eerstegraadsfunctie een tabel van functiewaarden gegeven is, kan de vergelijking van de rechte opgesteld worden door daaruit twee stellen coördinaatgetallen af te leiden en de redenering te maken voor een rechte door twee punten.

Een andere mogelijkheid is in de tabel zelf op zoek te gaan naar een vaste stapgrootte om daaruit de richtingscoëfficiënt af te leiden. (Bijv. als bij een vaste toename van de x-waarden van 5, een vaste toename van y met 15 overeenkomt is de richtingscoëfficiënt 3.)

20 Een eenvoudige instap zou kunnen zijn het associëren van gegeven grafieken aan een reeks gegeven voorschriften. Daarbij komt het eerder aan op het verifiëren, dan op het zelf opzoeken van de elementen.

Als de grafiek van een eerstegraadsfunctie gegeven is, kan men meestal de waarden van m en q uit het functievoorschrift grafisch aflezen (de toename van f(x) voor een toename van x met 1 of de verhouding van de toename van f(x) tot de toename van x voor de richtingscoëfficiënt m, de grootte van de afsnijding op de y-as voor q).

Een andere mogelijkheid is het aflezen van twee stellen coördinaatgetallen, zodat de vergelijking van de rechte door die twee punten kan opgesteld worden. Explicitering van de afhankelijke veranderlijke geeft het functievoorschrift. Voor het opstellen van de vergelijking kan ook gekozen worden voor een werkwijze met behulp van onbepaalde coëfficiënten.

Leerlingen moeten in beide gevallen bij het aflezen van coördinaatgetallen oog leren hebben voor ‘nauwkeurigheid’. Zo zullen ze uitkijken naar punten met een stel gehele coördinaten of met eenvoudige coördinaten zoals die van het nulpunt. Dit is niet altijd mogelijk, wat de beperktheid van de procedure aangeeft.

Als toepassing kunnen hier oefeningen aangeboden wordt op het opzoeken van het voorschrift van constante functies en van functies met een meervoudig voorschrift.

22 *Uitbreiding*

Het oplossen van ongelijkheden van de eerste graad met één onbekende kan hier verbonden worden met de tekenverandering van de bijbehorende eerstegraadsfunctie. Het verdient aanbeveling dat de ongelijkheden voortspruiten uit vraagstukken over meer realistische situaties. Een interpretatie van de oplossing is dan wel noodzakelijk.

23 De leerlingen beschikken al over het model vergelijking om bepaalde situaties tussen twee veranderlijke grootheden te mathematiseren. Een aantal probleemsituaties leidt tot een systeem van twee (of meer) dergelijke vergelijkingen. Het aanpakken van stelsels vanuit voldoende vraagstukken moet waarborgen dat leerlingen vertrouwd geraken met deze nieuwe vorm van modellering.

Stelsels van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden kunnen meetkundig geassocieerd worden met het bepalen van het snijpunt van twee rechten. Dit leidt tot het grafisch aflezen van de coördinaat van het snijpunt en tot algebraïsche methoden om dit nauwkeuriger te bepalen.

In de praktijk komen stelsels voor in allerlei situaties waar het verband met de meetkundige situatie minder duidelijk is. De moeilijkheid voor leerlingen is daarbij niet zozeer de oplossingstechniek zelf, dan wel het kiezen van de onbekenden, het opstellen van de vergelijkingen aan de hand van de beschreven situatie.

Daarom is het zinvol hierop enkele afzonderlijke oefeningen te voorzien, zonder dat al noodzakelijk onmiddellijk de berekening van de oplossing effectief moet uitgevoerd worden.

24 Soms is het zinvol de oplossing van een stelsel zo exact mogelijk te bepalen. Daarvoor zijn een aantal algebraïsche oplossingsmethoden beschikbaar zoals de gelijkstellingsmethode, de combinatie- en de substitutiemethode. Vanuit de inbedding van de ‘analytische meetkunde’ in de ‘functieleer’ kan gemakshalve gekozen worden voor de gelijkstellingsmethode. Gaat het om het bepalen van het snijpunt van twee grafieken van eerstegraadsfuncties dan ligt ze zelfs voor de hand, omdat de vergelijkingen van de rechten dan meestal in de expliciete vorm staan. Anderzijds kunnen de leerlingen de algemene vorm van de vergelijking omwerken tot de expliciete vorm (als de rechten niet evenwijdig zijn aan de eerste coördinaatas).

In weerwil van de meer wiskundige optie de oplossingsmethode te kiezen in functie van het probleem en de vergelijkingen kan aan wiskundig-zwakkere leerlingen een ‘vast’ stramien (of geconcretiseerd: één oplossingsmethode) aangeleerd worden. De moeilijkheidsgraad die hier voor sommige leerlingen vrij hoog ligt, wordt daardoor beperkt. Hier kunnen ICT-hulpmiddelen ingeschakeld worden om zinloos rekenwerk te vermijden.

Het verband tussen het algebraïsch bepalen van het snijpunt van de grafiek van twee eerstegraadsfuncties en het oplossen van stelsels ligt voor de hand. Dit kan algemener leiden tot een grafische interpretatie of een grafische oplossing van een stelsel. Met ICT-hulpmiddelen kan deze grafische oplossingswijze eventueel als controlemiddel gehanteerd worden bij andere oplossingsmethoden.

25 Een aantal *problemen* kunnen vertolkt worden met behulp van een eerstegraadsfunctie (vergelijking of nulpunt, ongelijkheid of teken van de functie, stijgen of dalen) of een combinatie van twee eerstegraadsfuncties (stelsel). De leerlingen kunnen hier geconfronteerd worden met enkele zinvolle praktische toepassingen van hun wiskundekennis.

Ook meetkundige problemen kunnen leiden tot vergelijkingen of stelsels, bijv. de vergelijking van een zwaartelijn in een driehoek opstellen, de coördinaat van het zwaartepunt bepalen.

Er zal aandacht besteed worden aan het grafisch oplossen van problemen, bijv. bij het vergelijken van twee functies (bijv. welk systeem van betalen kost het meest?). Zo kan de vraag naar de gelijkheid van twee functiewaarden voor een bepaalde x-waarde leiden tot het algebraïsch berekenen van de coördinaat van het snijpunt van de twee bijbehorende grafieken, tot het grafisch interpreteren ervan en tot het oplossen van een stelsel.

In deze toepassingssituaties kunnen voor de berekeningen van de karakteristieken van de eerstegraadsfuncties ICT-hulpmiddelen gebruikt worden, bijv. de ingebouwde oplosser voor nulpunten, het grafisch aflezen van nulpunten (cf. vergelijkingen), teken (cf. ongelijkheden), snijpunten of onderlinge ligging van twee functies (cf. rechter- en linkerlid van gelijkheid of ongelijkheid). Het is evident dat in eenvoudige situaties het manueel rekenen zinvol blijft.

5.9.3 BESCHRIJVENDE STATISTIEK

	Aanbeveling voor de verdeling van de lestijden

aan **beschrijvende statistiek** worden ca. 15 lestijden besteed.

		Leerplandoelstellingen – Leerinhouden	Et
s26	B	Kwalitatieve en kwantitatieve gegevens herkennen.	
s27		Vragen beantwoorden in verband met het belang van de representativiteit van een steekproef voor het formuleren van statistische besluiten over een populatie.	
s28	B	Vragen beantwoorden in verband met de betekenis van de frequenties van gegevens in een frequentietabel en ze interpreteren.	28
s29	B	Vragen beantwoorden in verband met verschillende grafische voorstellingen van statistische gegevens.	28
s30	B	Gemiddelde en mediaan van een reeks gegevens interpreteren.	29
s31	B	De interkwartielafstand van een reeks gegevens interpreteren als maat voor de spreiding.	29

	Pedagogisch-didactische wenken

De hoofdbedoeling van beschrijvende statistiek is *het ordenen, het samenvatten, het overzichtelijk voorstellen en het interpreteren van gegevens* afkomstig van allerlei situaties uit diverse disciplines.

Leerlingen moeten in de eerste plaats leren *aangeboden informatie kritisch te analyseren en te beoordelen*. Het hoofdaccent van de verwerking van dit onderdeel ‘beschrijvende statistiek’ zal dan ook liggen op het interpreteren van gegeven voorstellingen en informatie. Daarbij kan wel vermeld worden dat het zelf verwerken van een reeks gegevens, het berekenen van een aantal parameters en het grafisch voorstellen van de informatie kan leiden tot een beter inzicht in het proces. Toch zal men zich hierbij dan beperken tot relatief eenvoudig te verwerken reeksen, zodat het omslachtige rekenwerk het inzicht niet in de weg staat. Anderzijds zullen leerlingen een sterkere motivatie ondervinden, als ze gegevens moeten verwerken die betrekking hebben op hun leefwereld. Binnen dit hoofdstuk is die aansluiting zeker mogelijk door bijvoorbeeld gebruik te maken van allerlei enquêtes uit jongerentijdschriften.

Voor het voorstellen van statistische gegevens is heel wat *software* beschikbaar op de rekenmachine en de computer. Een radicale keuze voor het gebruik ervan, die het handmatig rekenwerk tot een minimum beperkt is aangewezen. Zo komt tijd vrij voor interpretatieactiviteiten.

26 De leerlingen moeten geconfronteerd worden met allerlei materiaal uit kranten en tijdschriften dat statistisch verwerkt werd. Ook de resultaten van labowerk dat door de leerlingen zelf is uitgevoerd kunnen interessant materiaal bieden. Aan de hand van goed gekozen voorbeelden moet het onderscheid duidelijk worden tussen *verschillende soorten van data*. Bij het verzamelen van gegevens komen verschillende soorten aan bod. Het onderscheid ertussen is belangrijk omwille van de gevolgen voor de verwerking. Gaat het om ‘numerieke’ gegevens? Kan er bijvoorbeeld een gemiddelde berekend worden? Welke voorstellingswijze is het meest aangewezen om de gegevens voor te stellen? De leerlingen zullen aan de hand van een aantal voorbeelden het onderscheid moeten inzien tussen bijv. kwalitatieve en kwantitatieve gegevens. Voorbeelden: classificatie van hotels met behulp van sterren, de graad van tevredenheid over de voorstelling van een popvedette, de lichaamslengte van een groep mensen, de resultaten van een test, …. Eenzelfde opmerking kan gemaakt worden over duidelijk meetbare en niet-meetbare gegevens. Voor bepaalde gegevens kan een duidelijke ‘meting’ uitgevoerd worden. Andere kunnen maar in ‘volgorde’ geplaatst worden.

27 Bij het onderzoeken van concrete voorbeelden van statistische verwerking (bijv. in kranten- of tijdschriftenartikels) moet voldoende tijd besteed worden aan de omschrijving van de *populatie*, van de *steekproef* en de samenstelling van de steekproef, van de *onderzoeksvraag*.

Voorbeelden:

Kan men de gemiddelde lengte van de Vlaamse bevolking onderzoeken aan de poort van een kleuterschool, of aan het lokaal van de plaatselijke basketploeg?
Als men de populariteit van een popgroep wil nagaan, zal men een betrouwbaar resultaat bekomen bij een enquête aan de poorten van een festival waar ze optreden, of waar een concurerende groep optreedt?
Sluit men bij een telefonische enquête personen uit? Met welke situaties houdt men geen rekening bij het houden van een schriftelijke enquête.
Het werken met een kleine steekproef heeft een invloed op de betrouwbaarheid van de conclusies.

Belangrijk is wel dat leerlingen zelf creatief naar *eigen* voorbeelden zoeken om bepaalde voorwaarden, bij het opstellen van een steekproef, te onderbouwen. Het heeft geen zin hier enkele voorbeelden te laten memoriseren.

Een mogelijke werkwijze is in een eerste fase de verwerking en interpretatie van cijfergegevens te bestuderen op duidelijke voorbeelden (bijv. kleine populaties). Nadat verschillende onderzoeken en interpretaties over dezelfde onderzoeksvragen bovenkomen, kan in een tweede fase de vraag naar de extrapolatie van de resultaten en de interpretatie vanuit een beperkte groep (steekproef) naar een ruimere populatie aan bod komen. De leerlingen beschikken dan al over voorbeelden om de problematiek van omschrijving van populatie, steekproef en onderzoeksvraag te onderbouwen.

28 Het ordenen van gegevens gebeurt aan de hand van een frequentietabel. Hiervoor worden de begrippen *absolute frequentie, relatieve frequentie, cumulatieve frequentie en cumulatieve relatieve frequentie* ingevoerd. Het volstaat dat leerlingen een frequentietabel kunnen aflezen. Ze moeten wel over een aantal controlevaardigheden beschikken om de tabel op zinvolheid te onderzoeken, bijv. de som van de frequenties.

Uitbreiding

Omwille van de complexiteit van de verwerking behoort het groeperen van gegevens niet tot de basisleerstof voor de leerlingen. Wel kan er enige aandacht aan besteed worden, omdat sommige voorstellingen uit kranten of op rekentoestellen met klassenindeling werken.

Men kan een voorbeeld bespreken van een reeks gegevens waarbij het aantal (te) groot is en waarbij de verwerking met frequenties problemen oplevert. De gegevens worden dan gegroepeerd in klassen. Het zijn niet de frequenties van de individuele gegevens die nu gebruikt worden, maar die van de klassen. Begrippen zoals klassenbreedte, aantal klassen, klassenmidden kunnen besproken worden.

29 In de media worden gegevens vaak grafisch voorgesteld. De leerlingen zijn vanuit de eerste graad al vertrouwd met voorstellingen zoals staaf-, strook en schijfdiagram. Het is aangewezen dat de leerlingen deze *frequent voorkomende grafische voorstellingen* leren *lezen en interpreteren*, d.w.z. er vragen over beantwoorden.

Het interpreteren houdt ondermeer in dat men oog heeft voor de aard van de voorstelling, voor de schaalverdeling, de keuze van de oorsprong en eenheden, …, om daaruit de informatie die achter de gegevens ligt te ontdekken. Daarbij hoort de vraag waarom bepaalde voorstellingen gebruikt worden om bepaalde kenmerken van bepaalde veranderlijken weer te geven. Daarbij kan geïllustreerd worden, hoe soms misbruik gemaakt wordt van voorstellingen met als gevolg een verkeerde besluitvorming. Hierdoor leren de leerlingen kritisch omgaan met aangeboden informatie.

Uitbreiding

De leerlingen kunnen aan de hand van een enquête of bevraging in de klas of de school zelf een aantal gegevens verzamelen, die zelf verwerken en er zelf een aangepaste voorstelling van maken, bijv. met behulp van een rekenblad op een computer. Er zal evenwel over gewaakt worden dat een dergelijk leerproces meer te maken heeft met het inzicht in de verwerking van statistische gegevens, dan met het uitturven van een veelheid van gegevens. In die zin is het gebruik van de statistische functies, met inbegrip van de grafische mogelijkheden, van een rekenmachine of een computer hierbij ten zeerste aangewezen. Het opzetten van een bevraging en de statistische verwerking van de verzamelde gegevens kan een aantal belangrijke vaardigheden en attitudes ontwikkelen zoals samenwerken in groep, communicatie, planning, organisatie, hanteren van de wiskundetaal in alledaagse situaties, kritische analyse van de resultaten en de besluitvorming.

30 Een verdere stap in het beschrijven van gegevens is het opzoeken van parameters die ze samenvatten. Op die manier kunnen onder meer reeksen gegevens met elkaar vergeleken worden. Een eerste reeks parameters zijn de *centrummaten*: gemiddelde en mediaan. Ze zijn al aan bod gekomen in de eerste graad. Ze geven een waarde die ongeveer het midden van de gegevens aanduidt. Aan de hand van concrete voorbeelden wordt hun betekenis en het praktisch gebruik ervan verklaard.

Leerlingen moeten de beperktheid van de door centrummaten verkregen informatie leren relativeren. Zonder een maat voor de spreiding betekenen ze niet veel. Daarom is het zinvol centrum- en spreidingsmaten samen aan te brengen aan de hand van een aantal concrete voorbeelden. Daarna kunnen samenvattend de verschillende begrippen vastgelegd worden.

Voor de praktische berekeningen in opgaven en praktische problemen wordt bij voorkeur de *rekenmachine* gebruikt.

31 Statistische gegevens met dezelfde centrummaten kunnen grondig van elkaar verschillen door hun spreiding rond deze parameters. Daarover kunnen een tweede reeks parameters, de *spreidingsmaten*, informatie geven. Hier worden variatiebreedte en *interkwartielafstand* behandeld. Die zijn relatief gemakkelijk te berekenen en laat toe een globale indruk van de gegevens te verkrijgen. Aan de hand van concrete voorbeelden wordt hun betekenis en het praktisch gebruik ervan verklaard. Voor sommige studierichtingen is het zinvol een voorbeeld met gebruik van percentielen te bespreken, omdat leerlingen er in hun vervolgopleiding mee geconfronteerd kunnen worden.

Een voorstelling van gegevens die eerder nog niet ter sprake kon komen is de *boxplot*. Ze geeft een interessante indruk van de ligging van de gegevens en de spreiding ervan omdat ze opgesteld wordt met gebruik van enkele van de hoger genoemde parameters, m.n. de mediaan en de kwartielen. Met een voorstelling met een boxplot kunnen twee groepen gegevens gemakkelijk grafisch vergeleken worden.

6 EVALUATIE

Het is niet moeilijk in te zien dat leerprocessen beter (vlotter) zullen verlopen als de leerling regelmatig informatie krijgt over zijn vorderingen en als de leerkracht een goed inzicht heeft in de aard van de eventueel optredende problemen. Evaluatie is daartoe een uitgelezen middel en vormt aldus een belangrijk onderdeel van het onderwijsleerproces.

Schoolcultuur

De gehanteerde terminologie in verband met evaluatie, de verschillende opvattingen over de functie, de organisatievorm, de rapportering, ... zijn echter *niet eensluidend*. Deze verscheidenheid wordt geïllustreerd door de verschillende betekenissen die bijvoorbeeld gegeven worden aan termen als toets, examen, permanente evaluatie, formatieve evaluatie, dagelijks werk, enz.. Daarom is evaluatie van leerlingen en wat ermee gebeurt vaak verbonden met *een schooleigen cultuur*. Evaluatie van wiskunde moet hierin uiteraard passen, omdat evaluatie naar de leerlingen toe over de vakken en de jaren heen wel een zekere eenvormigheid moet vertonen.

Functies van evalueren

Evalueren is het *waarderen* van iets of iemand. De term evalueren wordt in het onderwijs gebruikt voor waardering als deze niet 'uit de lucht komt vallen', maar opgenomen is in de rij meten, waarderen, beslissen. Evaluaties gebeuren dus intentioneel. Evaluaties zijn niet vrijblijvend, omdat ze leiden tot een bepaalde *beslissing*. De functies van evalueren zijn verbonden met de aard van de beslissingssituaties.

Evaluatie kan de functie hebben van *resultaatsbeoordeling*. Over een periode van langere duur wordt het rendement van het onderwijsleerproces vastgesteld. Meestal gebeurt dit aan de hand van examens of summatieve toetsen. Deze vorm is allicht het meest vertrouwd.

Evaluatie kan de functie hebben van *plaatsing, oriëntering en selectie*. Evaluatiegegevens worden bijvoorbeeld gebruikt om leerlingengroepen samen te stellen, om differentiatie mogelijk te maken, om leerlingen te oriënteren naar de meest geschikte onderwijsvorm en studierichting, of toe te laten tot een bepaalde studierichting.

Evaluatie kan de functie van *diagnose* krijgen. Diagnose kan elke activiteit van de leerkracht zijn die erop gericht is een beeld te krijgen van de vorderingen van de leerlingen. Op de vaststelling van de aard en de oorzaak van de leermoeilijkheden kan dan een plan volgen om dit tekort te remediëren of bij te sturen.

In dezelfde zin kan een diagnose opgemaakt worden van de vorderingen van de leerlingen in verband met *redeneer- en probleemoplossende vaardigheden*. Vanuit een goed inzicht in de mogelijkheden en feitelijke situatie kunnen de leerlingen beter begeleid worden in hun leerproces.

Evaluatie kan de functie krijgen van *sturing van het onderwijsleerproces*. Er wordt informatie verzameld over de vorderingen van de leerlingen om het leerproces beter te organiseren. Dit soort evaluatie gebeurt voortdurend tijdens het leerproces. De leerling krijgt voortdurend informatie over zijn vorderingen, de leerkracht krijgt voortdurend informatie over het verloop van het leerproces.

In de tweede graad kunnen bepaalde klasgroepen samengesteld worden met leerlingen met een diverse vooropleiding wiskunde. (Bijv. leerlingen die samenzitten in een groep met leerplan d kunnen in de eerste graad zowel leerplan a als leerplan b als vooropleiding hebben.) Daarom kan een bijzondere plaats gegeven worden aan het evalueren van de *beginsituatie*, bijv. in verband met een aantal routinevaardigheden. Dit kan leiden tot een georganiseerde herhaling in de lessen (als het een 'klassikaal' probleem blijkt te zijn), tot een gedifferentieerde aanpak, maar even zinvol tot gerichte herhalings- of remediëringspakketten die door de leerlingen zelfstandig (als taak) worden verwerkt.

Evaluatie is medebepalend voor de 'beslissing' op de scharniermomenten van het lesverloop. De verkregen informatie kan door de leerkracht gebruikt worden om zijn didactisch handelen te beoordelen en te sturen. Bijsturing kan betrekking hebben op een aantal uiteenlopende factoren, bijvoorbeeld de leerinhoud kan te moeilijk zijn, de doelstellingen te hoog gegrepen, het tempo te hoog (of te laag), het beginniveau kan verkeerd ingeschat zijn, er kunnen problemen zijn van motivationele aard, ... De leerkracht kan hierop inspelen door bijvoorbeeld een bijkomend voorbeeld te geven, de formulering van een definitie of een eigenschap te hernemen, de voorziene oefeningen te beperken of aan te vullen. Sturing kan ook betekenen dat de leerkracht *gedifferentieerd* ingaat op de mogelijkheden van de leerlingen met aangepast oefeningenmateriaal, met remediëring, met ondersteuning van het leerproces door het leren van wiskunde te bespreken. Dergelijke sturing kan ook positief onderscheidend werken, bijv. door aan bepaalde leerlingen optimale ontwikkelingskansen te bieden door hen te confronteren met meer open problemen, meer eigen tips over hun oplossingsproces, gerichte aanwijzingen over heuristische methoden, ….

Evaluatie in de brede betekenis heeft zowel betrekking op het beoordelen van de leerlingen en de beslissingen die hieraan verbonden worden, als op de informatie over het verloop van het onderwijsleerproces zowel voor de leerling als voor de leerkracht. Ze kan betrekking hebben op een sanctionering met ingrijpende gevolgen of op een meer vrijblijvende begeleiding.

Van evaluatie naar zelfevaluatie

In de informatieve functie maakt evaluatie integrerend deel uit van het onderwijsleerproces. Belangrijk is alleszins dat de leerling *zelf informatie krijgt over zijn leren*, zowel wat betreft het proces als het eindresultaat. Zo zal in het leerproces van probleemoplossende vaardigheden niet slechts de beoordeling van het eindresultaat belangrijk zijn. De informatie over zijn wijze van aanpakken en de vorderingen daarin geeft de leerling inzicht in de nodige bijsturing.

Procesevaluatie is een aangewezen weg om leerlingen te leren vragen stellen bij de leerinhouden. In die zin is het een goede ondersteuning bij het verwerven van leervaardigheden. Procesevaluatie is een aangewezen weg om de leerling bewust te maken van de eigen mogelijkheden. In die zin en in het kader van het levenslang leren (waarbij niet alle vorderingen 'getoetst' zullen worden) kan vertrouwd worden met procesevaluatie de groei naar zelfevaluatie bevorderen. Een mogelijke ondersteuning wordt hier geboden door opdrachten waarbij de leerlingen zelf zinvol leren gebruik maken van een correctie- of een antwoordsleutel.

Evaluatie van kennis en inzicht

De essentie van wiskundekennis is de kennis van en het *inzicht in begrippen en eigenschappen*. Dit houdt in: het kunnen geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden, het herkennen van het begrip of eigenschap in contextsituaties, het kennen van de betekenis ervan, het kennen van een formulering van een definitie of de eigenschap, het kunnen toepassen ervan in diverse contextsituaties.

Evaluatie van het inzicht in begrippen en eigenschappen zou de verschillende aspecten moeten onderzoeken. Het kennen van een eigenschap impliceert niet vanzelfsprekend dat ze kan *toegepast* worden en omgekeerd. Dit impliceert dat ook in de evaluatie *in de loop van het onderwijsleerproces* meer aandacht moet besteed worden aan deze aspecten, zoals bijvoorbeeld het begrijpen, het kunnen geven van voorbeelden en tegenvoorbeelden, de formulering, het toepassen van de eigenschap.

Evaluatie zou er toe moeten leiden, dat de leerkracht nog tijdens het onderwijsleerproces informatie verwerft over de misverstanden over begrippen, eigenschappen en methoden bij de leerlingen. Ze kunnen dan sneller bijgestuurd worden. Voor een leerling is het belangrijk te weten op welk niveau een begrip moet gekend zijn en waar hij zich in het leerproces bevindt. Zo kan hij de aangepaste leermethode kiezen.

Van een aantal begrippen en eigenschappen kan gesteld worden dat ze tot de *parate kennis* van de leerlingen moeten behoren. Deze parate kennis moet dan ook als paraat getoetst worden en dus geregeld in de loop van het jaar. Kennis waarvan aanvaard is dat ze niet meteen paraat moet beheerst worden, maar bijvoorbeeld wel is opgenomen in een vademecum, kan getoetst worden met gebruik van het vademecum. Voorwaarde is natuurlijk dat leerlingen er ook buiten de evaluatiemomenten functioneel mee leren werken.

Over het algemeen wordt aangenomen dat in het geheel van de toetsing een goede spreiding van de leerinhouden over de verschillende beheersingsniveaus (kennis, inzicht en toepassing) wenselijk is.

Evaluatie van vaardigheden

In het huidige leerplan wordt het verwerven van een aantal vaardigheden benadrukt. Ook op de evaluatie moet dit zijn weerslag hebben. Daarbij moet een vaardigheid als vaardigheid geëvalueerd worden.

Dit betekent uiteraard dat de leerling wiskundige procedures, methoden en technieken behoorlijk en efficiënt moet kunnen uitvoeren. Dit betekent dat ook de *procedure* (bijvoorbeeld de verschillende stappen) moet geëvalueerd worden en niet slechts het eindresultaat. Hierin is ook ruimte voor evaluatie van de zelfcontrole van de leerling en voor het gecontroleerd uitvoeren (bijv. schatten, grootte-orde, elementaire fouten vermijdend). Ook hier geeft de terugkoppeling die leerlingen krijgen over de uitvoering tijdens het leerproces zelf, hen sneller inzicht in hun fouten.

Voor de toetsing van vaardigheden kan overwogen worden een in de tijd gespreide toetsing uit te voeren. Dit betekent dat het bezitten van een vaardigheid niet afhankelijk gemaakt wordt van het bezit ervan op dat ene examenmoment.

In de evaluatie van vaardigheden neemt die van *probleemoplossende vaardigheden* een bijzondere plaats in. Aandacht voor het ontwikkelen van probleemoplossende vaardigheden leidt tot het aanbieden van meer open gestelde problemen, meer aan (soms nieuwe) situaties gebonden vraagstukken, enz.. Het oplossen van dergelijke problemen is een complex proces. Meer nog dan elders is feedback zowel *over het proces* als over het eindproduct belangrijk. De leerling zou informatie moeten krijgen over zijn kennis, en de vaardigheid waarmee hij die kan hanteren, over de wijze van vraagstelling, het gebruik van gegeven informatie, het formuleren van vermoedens, over de vaardigheid waarmee heuristische methoden gehanteerd worden, over de sturing van zijn oplossingsproces en de wijze van interpreteren en verifiëren van resultaten. Evaluatie van probleemoplossende vaardigheden heeft maar zin als *tijdens het proces* de wijze van werken van de leerling *systematisch, weloverwogen en voortdurend wordt opgevolgd*. Evaluatie kan het vertrouwen van de leerling in zijn mogelijkheden sterk beïnvloeden.

Maar ook de leerkracht krijgt belangrijke feedback, bijvoorbeeld over welke problemen uitdagend zijn, welke instructief, welke interesse wekken, welke niet succesvol zijn.

Evaluatie van attitudes

In dit leerplan wordt gepleit voor het ontwikkelen van attitudes. Nog meer dan bij vaardigheden moet de leerkracht bij de evaluatie ervan oog hebben voor de individuele inspanning die de leerling doet om die doelen te bereiken. Enige omzichtigheid is geboden, want niet bij alle leerlingen is de spontane uitingsvorm de juiste weerspiegeling van de inzet. En sommige leerlingen hebben van nature uit meer tijd en inzet nodig om eenzelfde resultaat te bereiken.

Zeker voor attitudes geldt dat terugkoppeling tijdens het leerproces de meest effectieve weg van bijsturen is. Aanmoediging zal meer vermogen dan neerbuigend afkeuren. Een verbale waardering kan naast een 'resultaat' voor de inhoudelijke toetsing een blijk van waardering zijn voor de inzet van de leerling.

ICT-hulpmiddelen

In de doelstellingen is het gebruik van ICT-hulpmiddelen opgenomen, zowel voor illustratie en demonstratie van begrippen en eigenschappen, als het effectief gebruik ervan door de leerlingen bij het uitvoeren van berekeningen, het onderzoeken van eigenschappen en het verwerken van informatie.

De evaluatie van onderdelen waarbij in de ontwikkelingsfase en de verwerkingsfase een rekenmachine, een grafische rekenmachine of een computer gebruikt werd, zal hiermee rekening houden. Dat betekent dat bij de toetsing hetzelfde materiaal ter beschikking van de leerlingen moet staan of dat de evaluatie tijdens het leerproces zelf ‘permanent’ wordt uitgevoerd.

Als men het gebruik van bepaalde werkwijzen met computer of rekenmachine als specifieke doelstelling heeft nagestreefd, zal dit uiteraard deel uit maken van de evaluatie. Een onderscheid moet gemaakt worden tussen enerzijds de vaardigheid in het gebruik van het toestel (bijv. bij het intikken) en anderzijds het inzicht in het gebruik van de toestelgebonden wiskundige werkwijze. En binnen het ‘vak wiskunde’ mag de eerste geen hypotheek leggen op de tweede. Gespreid over het jaar geleidelijk de vorderingen van de leerlingen opmeten moet een beeld geven van de effectieve vooruitgang die de leerlingen maken. Dit impliceert evenwel ook dat de leerlingen voldoende oefenkansen krijgen. Dit vraagt allicht van de school en de leerkracht een inspanning voor de leerlingen die niet zelf over het aangewezen materiaal kunnen beschikken.

Overleg in de vakgroep is nodig om vertrouwd te worden met deze voor wiskunde ‘nieuwe’ evaluatiesituaties. Zo zal de invoering van ICT-hulpmiddelen in de tweede graad niet los staan van het gebruik ervan in de eerste en de derde graad. Afspraken kunnen gemaakt worden over de aangewezen evaluatievorm, de wijze van werken, de gestelde eisen, … en de afstemming tussen de leerkrachten onderling. Leerlingen moeten alleszins een duidelijk beeld krijgen van wat te verwachten is bij de evaluatie.

Organisatie van de toetsing

In de organisatie van de toetsen bestaat een ruime verscheidenheid tussen de scholen. Hoe die ook gebeurt, belangrijk is dat ze aansluit bij de onderwijspraktijk. Dit wil zeggen dat ze moet aansluiten bij de doelstellingen en de verwerkingsniveaus die tijdens het leerproces en de verwerkingsopdrachten werden nagestreefd.

Wat betreft de criteria die aan toetsen als meetinstrument moeten worden opgelegd, zoals validiteit (meet de toets wat beoogd wordt te meten?) en betrouwbaarheid (is het resultaat een zo adequaat mogelijke weerspiegeling van het bereiken van de doelstellingen door de leerling?), wordt verwezen naar de geëigende literatuur.

Verder wordt aangenomen dat de evaluatie zich niet mag beperken tot enkele momenten. Geregeld toetsen (zowel mondeling als schriftelijk) laat toe adequaat in te spelen op de problemen die zich stellen. Wel mag verwacht worden dat leerlingen ook al grotere leergehelen leren beheersen, bijv. voor een ruimere summatieve toets.

7 OVEREENKOMST EINDTERMEN EN DOELSTELLINGEN

7.1 Eindtermen Wiskunde

1 Algemeen

De leerlingen

1 begrijpen en gebruiken wiskundetaal.
2 passen probleemoplossende vaardigheden toe.
3 reflecteren op de gemaakte keuzen voor representatie- en oplossingstechnieken.
4 controleren de resultaten op hun betrouwbaarheid.
5 gebruiken informatie- en communicatietechnologie om wiskundige informatie te verwerken, te berekenen, uit te voeren of om wiskundige problemen te onderzoeken.
*6 ervaren dat gegevens uit een probleemstelling toegankelijker worden door ze doelmatig weer te geven in een geschikte wiskundige representatie of model.
*7 ontwikkelen zelfregulatie: het oriënteren op de probleemstelling, het plannen, het uitvoeren en het bewaken van het oplossingsproces.
*8 ontwikkelen zelfvertrouwen door succeservaring bij het oplossen van wiskundige problemen.
*9 ontwikkelen bij het aanpakken van problemen zelfstandigheid en doorzettingsvermogen.
*10 zijn gericht op samenwerken om de eigen mogelijkheden te vergroten.
*11 brengen waardering op voor wiskunde (mogelijkheden en beperkingen) door confrontatie met culturele, historische en wetenschappelijke aspecten van het vak.

* In verband met de controle geldt de opmerking: “Attitudes zijn altijd na te streven.”
(Vlor, Advies betreffende de eindtermen … p. 22)

2 Rekenen en schatten

De leerlingen

12 gebruiken de zakrekenmachine bij berekeningen met getallen in decimale en breukvorm en wetenschappelijke notatie.
13 herkennen bij het oplossen van een probleem welke grootheden en welke bewerkingen aan de orde zijn.
14 lossen problemen op (o.m. in verband met verhoudingen) waarbij ze bij het uitvoeren van de berekeningen verantwoord kiezen tussen schattend rekenen en benaderend rekenen met de zakrekenmachine.
15 ronden zinvol af bij opeenvolgende berekeningen.

3 Algebraïsche verbanden

3.1 Tabellen en grafieken

De leerlingen

16 maken een tabel van het verband tussen variabelen in een gegeven betekenisvolle situatie.
17 tekenen, in een opportuun gekozen assenstelsel, een grafiek van het verband tussen variabelen in een gegeven betekenisvolle situatie.
18 kunnen een gegeven tabel en grafiek interpreteren, minstens met betrekking tot:
- het aflezen van bepaalde waarden;
- het aflezen van extreme waarden;
- het interpreteren van het globale verloop (constant, stijgen, dalen).

19 vergelijken en interpreteren de onderlinge ligging van twee grafieken.

3.2 Omgaan met formules

De leerlingen

20 beschrijven eenvoudige verbanden tussen variabelen met behulp van formules en geven het effect aan van de verandering van de ene variabele op de andere.
21 berekenen de waarde van een variabele in formule bij vervanging van de andere variabele(n) door een getal.

3.3 Samenhang tussen tabellen, grafieken, formules

De leerlingen

22 geven de samenhang aan tussen verschillende voorstellingswijzen van het verband tussen variabelen, m.n. verwoording, tabel, grafiek en formule van het verband tussen variabelen.

3.4 Eerstegraadsfuncties

De leerlingen

23 tekenen de grafiek van een eerstegraadsfunctie.
24 leiden nulpunt, tekenverandering, stijgen of dalen af uit de grafiek van een eerstegraadsfunctie.
25 lossen problemen op waarbij verbanden beschreven worden door twee eerstegraadsvergelijkingen.

4 Meetkunde

De leerlingen

26 maken bij het berekenen van hoeken en afstanden in vlakke en in beperkte ruimtelijke situaties gebruik van schetsen en tekeningen, van meetkundige begrippen en elementaire eigenschappen, in het bijzonder van:
- evenwijdigheid;
- gelijke verhoudingen;
- loodrechte stand;
- eigenschappen van hoeken;
- eigenschappen van driehoeken en cirkels;
- de stelling van Pythagoras;
- goniometrische verhoudingen in een rechthoekige driehoek.

27 maken gebruik van coördinaten bij het berekenen van afstanden in vlakke situaties.

5 Statistiek

De leerlingen

28 interpreteren statistische gegevens uit frequentietabellen en diverse grafische voorstellingen.
29 gebruiken in betekenisvolle situaties mediaan, gemiddelde en kwartielen van statistische gegevens bij het trekken van conclusies.

7.2 Overeenkomst

Et	leerplan a		leerplan b		leerplan c		leerplan d	
1	V2 V3 V4		V2 V3 V4		V2 V3 V4		V2 V3 V4	
2	V5		V5		V5		V5	
3	V5		V5		V5		V5	
4	V5		V5		V5		V5	
5	V1 V2 V4 V5		V1 V2 V4 V5		V1 V2 V4 V5		V1 V2 V4 V5	
6	A8 A10		A8 A10		A8 A10		A8 A10	
7	A11		A11		A11		A11	
8	A10		A10		A10		A10	
9	A10		A10		A10		A10	
10	A12		A12		A12		A12	
11	A13		A13		A13		A13	
12	1g26B 1g27B		1g28B 1g29B		1g21B 1g22B		1g17B 1g19B	
13	1g33B		1g35B		1g28B		1g20B 1g21B	
14	1g33B		1g35B		1g28B		1g20B 1g21B	
15	1g26B 1g27B 1g33B		1g28B 1g35B		1g21B 1g28B		1g20B	
16	1f41B		1f43B		1f35B		1g26B	
17	1f44B		1f43B		1f35B		1g26B	
18	1f38B 1f39B		1f40B 1f41B		1f32B 1f33B		1g23B 1g24B	
19	1f41B		1f45B		1f37B		1g28B	
20	1g33B 1f40B 1f41B		1g35B 1f42B 1f43B		1g28B 1f34B 1f35B		1g20B 1g25B 1g26B	
21	1f40B		1f42B		1f34B		1g25B	2f21B
22	1f42B		1f44B		1f36B		1g27B	
23	1f46B		1f47B		1f39B			2f14B
24	1g34B 1g35B 1f47B		1g36B 1g37B 1f48B		1g29B 1f40B 1f41B			2f15B 2f16B 2f21B

	1f48B 1f51B		1f49B 1f53B		1f45B			
25	1f54B 1f55B 1f57B 1f58B 1f59B 1f60B		1f50B 1f51B 1f56B 1f57B 1f58B		1f42B 1f43B 1f47B 1f48B 1f49B			2f17B 2f18B 2f21B 2f23B 2f24B 2f25B
26	1m1B 1m2B 1m4B 1m7B 1m10B 1m12B 1m13B 1m14B 1m21B 1m22B	2m2B 2m4B 2m5B 2m18B	1m1B 1m2B 1m3B 1m5B 1m10B 1m12B 1m15B 1m16B 1m17B 1m24B 1m25B	2m1B 2m3B 2m4B 2m13B 2m14B	1m1B 1m2B 1m3B 1m5B 1m9B 1m11B 1m14B 1m15B 1m16B 1m17B 1m18B	2m1B 2m3B 2m4B 2m9B 2m10B	1m1B 1m2B 1m5B 1m8B 1m9B 1m10B 1m13B 1m14B 1m15B 1m16B	2m2B 2m4B 2m5B 2m6B 2m10B 2m11B 2m12B 2m13B
27	1m12B		1m13B 1m14B		1m12B 1m13B		1m3B 1m4B	
28		2s58B 2s59B		2s54B 2s55B		2s33B 2s34B		2s28B 2s29B
29		2s60B 2s61B		2s56B 2s57B		2s35B 2s36B		2s30B 2s31B

8 BIBLIOGRAFIE

Boeken

ASPEELE, M.-J., DELAGRANGE, N., DE ROO, F., *Wiskundedidactiek, een inleiding*. Leuven, Acco, 1987.
BARNETT, R.A., ZIEGLER, M.R., *College Algebra 4th edition.* New York, McGraw-Hill, 1989.
BKOUCHE, R., CHARLOT, B., ROUCHE, N., *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*. Paris, Armand Colin, 1991.
BUIJS, A., *Statistiek om mee te werken.* Leiden, Stenfort Kroese, 1989.
BURTON, D., *The history of mathematics. An introduction*. Boston, Allyn and Bacon Inc., 1985.
CENTRE DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'a dix-huit ans*. Nivelles, CREM, 1995.
COJEREM, *Des situations pour enseigner la géométrie*. Brussel, De Boeck Wesmael, 1995
COEXETER, H., *Introduction to geometry.* New York, Wiley, 1989
DOUMA, S.W., *Lineaire programmering als hulpmiddel bij besluitvorming.* Academic Service, 1982
FENTEM, R., *Statistics.* London, Collins Educational, 1996.
FREUDENTHAL, H., *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Reidel Publ. Comp., 1973.
GOODMAN, A., HIRSCH, L., *Precalculus.* Englewood Cliffs - New Yersey, Prentice-Hall, 1994.
GRAVEMEIJER, K.P.E., *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, CDβ Press, 1994.
GROUPE D'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE, *L'archipel des isométries: essai de rédecouverte.* Louvain-la-Neuve, GEM, 1982.
GROUPE D'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE, *Les fonctions c'est aussi autre chose.* Louvain-la-Neuve, GEM, 1982.
HERR, T., JOHNSON, K., *Problem solving strategies.* Berkeley, Key Curriculum Press, 1994.
HIRSCH, C.R., NORTON, M.A., e.a., *Geometry.* Glanview, Scott Foresman and Company, 1984.
HUFF, D., *How to lie with statistics*. London, Norton & Company, 1954.
JACOBS, H., *Geometry.* New York, Freeman, 1987.
JACOBS, H., *Mathematics a human endeavor.* New York, Freeman, 1982.
KAISER, H., NÖBAUER, W., *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht*. München, Freytag, 1984.
KLINGEN, H., OOT, A., *Computereinsatz im Unterricht, der pädagogische Hintergrund.* Stuttgart, Metzler Verlag, 1986.
KRABBENDAM, H., *Algebra voor de lerarenopleiding.* Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 1994.
KRABBENDAM, H., *Meetkunde voor de lerarenopleiding.* Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 1994.
KRABBENDAM, H., *Rekenen voor de lerarenopleiding.* Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 1994.
KRABBENDAM, H., *Informatieverwerking en statistiek voor de lerarenopleiding.* Utrecht, Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, 1994.
LAFARGUE-SORT, J., MARQUIS, B., *Les méthodiques pour résoudre des problèmes*. Paris, Hatier, 1992.
LAGERWERF, B., *Wiskundeonderwijs in de basisvorming*. Groningen, Wolters-Noordhoff, 1994.
LEHMANN, E., *Mathematik-Unterricht mit Computer-Einsatz.* Bonn, Dümmler, 1988.
LOWYCK, J., VERLOOP, N., e.a., *Onderwijskunde*. Leuven, Wolters, 1995.
LS MATHEMATIK, *Geometrie I & II.* Stuttgart, Ernst Klett Verlag, 1986.
MANKIEWICZ, R., *Het verhaal van de wiskunde.* Abcoude, Uitgeverij Uniepers, 2000.
NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, *Curriculum and Evaluation Standards for school mathematics* . Reston, Virginia USA, NCTM, 1989.
OLDKNOW, R., TAYLOR, A., Teaching mathematics with ICT. London, Continuum, 2000.
POLYA, G., *How to solve it*. Princeton, University Press, 1973.
POLYA, G., *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving.* New York, Willey, 1981.
POSAMENTIER, A.S., STEPELMAN, J., *Teaching secondary school mathematics*. New York, Merill Publishing Company, 1990.
ROELS, J., DE BOCK, D., e.a., *Wiskunde vanuit toepassingen.* Leuven, Aggregatie wiskunde - K.U.Leuven, 1990.
SCHOENFELD, A. H., *Mathematical problem solving*. London, Academic Press, 1985.
STEUR, H., *Levende wiskunde. Toepassingen geordend naar wiskundig onderwerp*. Culemborg, Educaboek, Tjeenk-Willink, 1980.
STEWART, J., REDLIN, L., e.a., *Precalculus, 3th edition.* Pacific Grove, Brooks/Cole Publishing Company, 1998.
STRUIK, D.J., *Geschiedenis van de wiskunde*. Utrecht, Het Spectrum, 1990.

THAELS, K., e.a., *Van ruimtelijk inzicht naar ruimtemeetkunde.* Deurne, Wolters Plantyn, 2001

VAN DER BLIJ, F., *Wiskunde met verve.* Groningen, Wolters-Noordhoff, 2000

VAN DORMOLEN, J., *Aandachtspunten*. Utrecht, Bohn, Scheltema en Holkema, 1982.
VAN DORMOLEN, J., *Didactiek van de wiskunde*. Utrecht, Bohn, Scheltema en Holkema, 1976.
VON HARTEN, G., STEINBRING, H., *Stochastik in der Sekundarstufe I.* Köln, Aulis Verlag, 1984.

Tijdschriften

UITWISKELING. Driemaandelijks tijdschrift, Aggregatie Wiskunde K.U.Leuven, Celestijnenlaan 200B, 3001 Leuven.
WISKUNDE EN ONDERWIJS. Driemaandelijks tijdschrift van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraren (VVWL), C. Huysmanslaan 60, bus 4, 2020 Antwerpen.

EUCLIDES. Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, De Schalm 19, 8251 LB Dronten.
NIEUWE WISKRANT. Tijdschrift voor Nederlands wiskunde onderwijs, Freudenthal Instituut, Postbus 9432, 3506 GK Utrecht.
PYTHAGORAS. Wiskundetijdschrift voor jongeren, Wiskundig Genootschap, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht.

Internet adressen

Wiskunde SMIC (Scholen Multimedia en Internet Centrum):	http://www.smic.be/edu/tips05wi.htm
Portaalsite voor wiskunde (www.wiskunde.nu):	http://users.pandora.be/wiskunde/
Het wiskundelokaal van de digitale school :	http://www.digischool.nl/wi/index.phtml
Applets:	http://ww.wisweb.nl
Algebra:	http://www.ircc.cc.fl.us/classrooms/trainrescs/masoft.html
Vlaamse wiskundeolympiade:	http://www.kulak.ac.be/vwo/nl/vwowwwnl.html
Vragenbank:	http://www.gricha.bewoner.antwerpen.be/
Uitwiskeling:	http://users.belgacom.net/uitwiskeling/
Nederlandse vereniging voor wiskundeleraren:	http://www.nvvw.nl/
Tijdschrift Pythagoras:	http://www.science.uva.nl/misc/pythagoras/
Freudenthalinstituut (ontwikkelingsonderz. wiskunde-ond.):	http://www.fi.ruu.nl/
Geschiedenis van de wiskunde:	http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history
Vlaamse statistieken:	http://fred.vlaanderen.be/statistieken/statistiek.htm
Statistische gegevens:	http://statbel.fgov.be/figures/home_nl.htm
Centraal Bureau voor Statistiek:	http://www.nrc.nl/W2/Lab/Profiel/Statistiek/